

LEHRBUCH

Matthias Plaue  
Mike Scherfner

# Mathematik für das Bachelorstudium I

Grundlagen und Grundzüge der  
linearen Algebra und Analysis

*2. Auflage*



Springer Spektrum

---

# Mathematik für das Bachelorstudium I

---

Matthias Plaue · Mike Scherfner

# Mathematik für das Bachelorstudium I

Grundlagen und Grundzüge der  
linearen Algebra und Analysis

2. Auflage

 Springer Spektrum

Matthias Plaue  
Berlin, Deutschland

Mike Scherfner  
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-662-58351-7      ISBN 978-3-662-58352-4 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-58352-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2009, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Über dieses Buch

Unter dem Titel „Mathematik für das Bachelorstudium“ decken wir in drei Bänden den Stoff ab, den wir als *überlebensnotwendig* für Studierende der Physik und Mathematik erachten.

Was meinen wir mit überlebensnotwendig? Ein ordentlich gewähltes Mindestmaß an mathematischem Wissen, das Ihnen eine solide Grundlagen bietet und das tiefere Eindringen in spezielle Themen ermöglicht. So werden Ihnen in der Mathematik die Themen Funktionalanalysis (in der Physik z. B. verknüpft mit der Quantenmechanik) und Differentialgeometrie (in der Physik z. B. verknüpft mit der Relativitätstheorie) begegnen, auf die wir Sie gut vorbereiten.

Es ist uns völlig klar, dass wir mit dem Umfang nicht jeden Wunsch erfüllen, denn wir vernehmen aus der Ferne schon die Gedanken derer, die sich an diversen Stellen deutlich mehr wünschen mögen – und wir leiden mit den Studierenden, die in Anbetracht der existierenden Fülle des Stoffes um ihren Schreibtisch wanken.

Es ist unser Ziel gewesen, die Themen so verständlich wie möglich zu machen – die bisherige Rezeption vermeldet einen ehrlichen Erfolg in dieser Hinsicht.

Die vorliegende Reihe entstand aus Vorlesungen, die von Mike Scherfner zum Kurs „Mathematik für Physiker und Physikerinnen I-IV“ seit dem Wintersemester 2007/08 an der TU Berlin gehalten wurden. Das Gesamtkonzept wurde von den Autoren zusammen mit Roland Möws erstellt, mit der Ausbildungskommission der Physik und den dortigen theoretischen Physikern besprochen und dann – nach Abstimmung mit Lehrenden des Instituts für Mathematik – umgesetzt. Der damalige Assistent der Veranstaltung, Matthias Plaue, erstellte dann auf der Basis der Vorlesungen ein Skript, das in der Folge ständig verbessert und schließlich zum Buch wurde. Der Kurs, auf dem diese Reihe basiert, war ein guter Wegweiser für den Inhalt. So müssen Studierende der (insbesondere theoretischen) Physik nämlich ein gehöriges Stück Mathematik meistern, um die Natur zu beschreiben. Daher haben wir die berechtigte Hoffnung, dass das Werk am Ende auch eine brauchbare Grundlage für die Ausbildung in reiner Mathematik bildet und dann die Brücke zu dem schlägt, was in diesem Bereich als fortgeschritten gelten darf.

Wir dachten beim Schreiben besonders an Studierende der Physik, bieten aber auch Wesentliches für angehende Mathematikerinnen und Mathematiker. Wir

sind ferner der Überzeugung, dass ambitionierte Studierende der Ingenieurwissenschaften an Universitäten großen Gewinn aus den Bänden ziehen können. Trotz der gewählten Hauptzielgruppe(n) haben wir das Augenmerk nicht speziell auf die Anwendungen gelegt. Zum einen gibt es z. B. diverse angehende Physikerinnen und Physiker, die in Mathematikveranstaltungen ungeduldig werden, wenn denn einmal keine pure Mathematik gemacht wird, und es gibt Studierende der Mathematik, die beim Wort Anwendungen Ausschlag bekommen. Wir mischen uns in das Für und Wider nicht ein, sondern haben diesen Weg deshalb gewählt, weil der Bachelor tatsächlich gewaltige zeitliche Anforderungen an Studierende stellt und wir uns ferner auf die Mathematik konzentrieren wollen, es kann schließlich nicht allen Herren gedient werden.

Der Übergang vom Diplom zum Bachelor und Master hat nicht alle begeistert, und wir mussten bei der Konzeption erkennen, dass der Bachelor einen vor ganz neue Aufgaben stellte, auf die wir als Lehrende wenig, bis gar nicht, vorbereitet wurden. Die Politik hat befohlen, wir mussten gehorchen (ohne auch nur die Chance zu haben, an geeigneter Stelle den Befehl zu verweigern und die Sache mit mehr sinnvollen Gedanken zu füllen). Es wurde klar, dass nicht einfach die alten Inhalte in die kurze Zeit des Bachelor gepackt werden konnten. Es darf aber auch zu keiner starken „Verwässerung“ kommen, die das Bachelorstudium final zu einem „Studium light“ werden lässt. Vielmehr musste nach unserer Meinung ein neues Konzept entstehen, das die richtige Balance zwischen Anspruch und Realisierbarkeit bietet. Auch diese Überlegungen waren Motivation für Anordnung und Umfang des präsentierten Stoffes in den drei Bänden, der im groben Überblick wie folgt aussieht: allgemeine Grundlagen, lineare Algebra, Analysis in einer Variablen (Band I), Analysis in mehreren Variablen, gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen (Band II), dann weiter zu den Grundzügen der Variationsrechnung, Funktionentheorie, Funktionalanalysis und Mannigfaltigkeiten (Band III).

Wir haben bei der Darbietung einen eigenen Stil verwendet, in welchem es eine strenge Gliederung gibt. In dieser sind Sätze und Definitionen farblich gekennzeichnet und Beweise bilden mit den zugehörigen Sätzen eine Einheit, was durch spezielle Symbole ausgedrückt wird. Als weitere Elemente gibt es noch Erläuterungen und Beispiele. Letztere sorgen oft für das Verständnis eines Sachverhaltes, für Aha-Effekte und sie unterstreichen praktische Aspekte – daher sind wir recht stolz darauf, dass Sie alleine im ersten Band gut 200 Beispiele finden. Wir wollen durch unsere Gliederung die Klarheit des Präsentierten vergrößern, aber auch das Lernen erleichtern. So ist unter dem Druck einer nahenden Prüfung alles schnell zu finden. Auf Schnörkel, allzu historisches und humoristische Einlagen wurde im mathematischen Teil verzichtet (was uns nicht immer leicht fiel) und wir haben alles unterlassen, was die Mathematik in die zweite Reihe drängt; Romane gibt es auf dieser Welt genug. Es war uns

dabei sehr wichtig Ihre Bedürfnisse zu respektieren, die teils auch einfach nur auf das Bestehen einer Prüfung gerichtet sein können. Wir hoffen, dass sich das Konzept beim Lesen unmittelbar erschließt. Alle Abschnitte beginnen mit einem Einblick, der Motivation liefert und eine Einführung gibt, die das Folgende auch einordnet. In der Konsequenz gibt es auch einen Ausblick. Dieser beleuchtet zuvor behandelte Themen teils erneut, zeigt Grenzen auf und ist an einigen Stellen auch nur Hinweis auf das, was am Horizont erscheint. Oft ist der Ausblick eine Art Schlussakkord, der Sie zu einem neuen Stück motivieren soll.

Wir haben davon Abstand genommen, das Werk zu beweislasterig zu machen, selbst wenn ein Beweis stets auch eine Erklärung ist. Jedoch auch mit zu viel gutem Essen lässt sich der Magen verderben. Wir haben daher versucht „weise Beschränkung“ zu üben, da die Zeit im Studium – und der Platz zwischen zwei Buchdeckeln – begrenzt ist, und begnügen uns an einigen Stellen mit Spezialfällen oder der Beweisidee.

Wir setzen einzig solide Schulkenntnisse voraus, sodass z. B. natürliche oder reelle Zahlen und elementare Funktionen nicht grundlegend entwickelt werden.

Am Ende jedes Abschnittes gibt es Aufgaben zum Selbsttest, die nach kurzen Lerneinheiten eine schnelle Kontrolle ermöglichen. Am Ende der größeren Teile gibt es dann Aufgaben mit vollständigen Lösungen, für die das bis dahin erlangte Wissen Bedeutung hat.

Wir können mit diesem Werk nicht allen gefallen, wünschen uns aber, dass Sie Mathematik nicht nur als Mittel zum Zweck begreifen, sondern als das Wunderbare, was sie ist. Und wenn Sie Ihr Mobiltelefon bedienen, aus dem Fenster eines Hochhauses sehen, nach Ecuador fliegen oder mit dem Computer spielen: All dies wäre ohne Mathematik nie möglich!

Am Ende kommen wir mit Freude der Aufgabe nach, einigen Personen zu danken. So haben Stefan Born und Alexander Dirmeier viele Aufgaben gelesen, gerechnet und hilfreiche Bemerkungen gemacht; Katja Lamprecht unterstützte uns tatkräftig bei den Korrekturarbeiten. Hans Tornatzky hat Teile der Vorlage getippt, Ulrike Bücking und Markus Müller waren Assistenten der Kurse und haben viele schöne Dinge bewegt, gleichfalls Torsten Volland. Dirk Ferus, Jörg Rambau und Ruedi Seiler verdanken wir schöne Skripte, die wertvolle Anregungen und Orientierung lieferten. Wir hatten das Glück, Andreas Rüdinger als kundigen und freundlichen Betreuer vom Verlag zu haben und von dort weiterhin Bianca Alton und Stefanie Adam. Thomas Epp bereicherte das Buch durch Abbildungen, die Verschönerungen, und teils Verbesserungen, unserer Vorlagen sind (manchmal sind sie auch die Gestaltung dessen, was wir nur dachten); Paul Peters machte uns auf den einen oder anderen Schnitzer

aufmerksam. Am Ende haben wir den Studierenden des Kurses „Mathematik für Physikerinnen und Physiker“ an der TU Berlin zu danken, die wertvolle Anregungen in den Veranstaltungen und beim Lesen unserer Skripte gegeben hatten.

Matthias Plaue und Mike Scherfner

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Elementare Logik und Mengenlehre</b>	<b>3</b>
	Einblick . . . . .	3
	Aussagen, Junktoren und Wahrheitstafeln . . . . .	3
	Sätze der Aussagenlogik . . . . .	5
	Prädikate und Quantoren . . . . .	7
	Mengen . . . . .	10
	Zahlen und Intervalle . . . . .	12
	Eigenschaften und Verknüpfungen von Mengen . . . . .	14
	Neue Buchstaben . . . . .	17
	Ausblick . . . . .	17
	Selbsttest . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Definition, Satz, Beweis und mehr</b>	<b>21</b>
	Einblick . . . . .	21
	Grundlegendste Elemente bei der Formulierung von Mathematik . . . . .	21
	Formen des Beweisens . . . . .	23
	Direkte und indirekte Beweise . . . . .	23
	Konstruktive und nichtkonstruktive Beweise . . . . .	25
	Der Ringschluss . . . . .	26
	Das Gegenbeispiel . . . . .	28
	Vollständige Induktion . . . . .	28
	Ausblick . . . . .	30
	Selbsttest . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>33</b>
	Einblick . . . . .	33
	Grundlegendes zu Abbildungen . . . . .	33
	Injektivität, Surjektivität, Bijektivität . . . . .	35
	Die Komposition von Abbildungen . . . . .	37
	Ausblick . . . . .	39
	Selbsttest . . . . .	40

<b>4</b>	<b>Körper und komplexe Zahlen</b>	<b>41</b>
	Einblick . . . . .	41
	Körper . . . . .	41
	Die komplexen Zahlen . . . . .	44
	Ausblick . . . . .	49
	Selbsttest . . . . .	50
	<b>Aufgaben zu den mathematischen Grundlagen</b>	<b>51</b>
<b>II</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>55</b>
	Einblick . . . . .	55
	Grundlegendes zu Vektorräumen . . . . .	55
	Ausblick . . . . .	63
	Selbsttest . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Basen und Untervektorräume</b>	<b>65</b>
	Einblick . . . . .	65
	Spann und Erzeugendensystem . . . . .	65
	Lineare Unabhängigkeit, Basis . . . . .	67
	Eindeutigkeit der Basisdarstellung, Untervektorräume . . . . .	70
	Ausblick . . . . .	73
	Selbsttest . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Lineare Abbildungen und Dimensionssätze</b>	<b>75</b>
	Einblick . . . . .	75
	Definition und Beispiele linearer Abbildungen . . . . .	75
	Kern und Bild linearer Abbildungen . . . . .	77
	Dimensionssätze . . . . .	79
	Ausblick . . . . .	80
	Selbsttest . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Matrizen</b>	<b>83</b>
	Einblick . . . . .	83
	Grundlegendes zu Matrizen . . . . .	83
	Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung . . . . .	84
	Der Rang einer Matrix . . . . .	85
	Das Matrizenprodukt . . . . .	87
	Besondere Matrizen . . . . .	90
	Ausblick . . . . .	91
	Selbsttest . . . . .	92

---

<b>9</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>93</b>
	Einblick . . . . .	93
	Grundlegendes zu linearen Gleichungssystemen und Gauß-Algorithmus	93
	Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems . . . .	96
	Ausblick . . . . .	100
	Selbsttest . . . . .	102
<b>10</b>	<b>Die Determinante</b>	<b>103</b>
	Einblick . . . . .	103
	Der Laplace'sche Entwicklungssatz . . . . .	103
	Berechnung von Determinanten in einfachen Fällen . . . . .	106
	Eigenschaften der Determinanten . . . . .	108
	Ausblick . . . . .	110
	Selbsttest . . . . .	111
<b>11</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>113</b>
	Einblick . . . . .	113
	Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum . . . . .	113
	Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	116
	Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten . . . .	118
	Ausblick . . . . .	122
	Selbsttest . . . . .	123
<b>12</b>	<b>Koordinatenabbildung und Basiswechsel</b>	<b>125</b>
	Einblick . . . . .	125
	Die Koordinatenabbildung . . . . .	125
	Darstellende Matrizen und Basiswechsel . . . . .	126
	Ausblick . . . . .	131
	Selbsttest . . . . .	132
<b>13</b>	<b>Diagonalisierung</b>	<b>133</b>
	Einblick . . . . .	133
	Diagonalisierbare Matrizen . . . . .	133
	Weitere Kriterien für Diagonalisierbarkeit . . . . .	136
	Ausblick . . . . .	139
	Selbsttest . . . . .	140
<b>14</b>	<b>Normierte, euklidische und unitäre Vektorräume</b>	<b>141</b>
	Einblick . . . . .	141
	Normierte Vektorräume . . . . .	141
	Skalarprodukte . . . . .	144
	Das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren . . . . .	149
	Orthogonale Abbildungen . . . . .	153

Ausblick . . . . .	157
Selbsttest . . . . .	159
<b>Aufgaben zur linearen Algebra</b>	<b>161</b>
<b>III Analysis</b>	<b>165</b>
<b>15 Grundzüge der Analysis</b>	<b>167</b>
Einblick . . . . .	167
Folgen und Konvergenz . . . . .	168
Rechenregeln für konvergente Folgen . . . . .	171
Konvergenzkriterien für Folgen . . . . .	174
Das Monotoniekriterium . . . . .	174
Das Häufungspunktprinzip und das Cauchy-Kriterium . . . . .	177
Ausblick . . . . .	181
Selbsttest . . . . .	183
<b>16 Stetigkeit</b>	<b>185</b>
Einblick . . . . .	185
Grenzwerte von Funktionen . . . . .	185
Definition und Beispiele stetiger Funktionen . . . . .	190
Ausblick . . . . .	194
Selbsttest . . . . .	195
<b>17 Der Zwischenwertsatz und Extrema stetiger Funktionen</b>	<b>197</b>
Einblick . . . . .	197
Der Zwischenwertsatz . . . . .	197
Bestimmte Divergenz . . . . .	199
Maximum/Minimum und Supremum/Infimum . . . . .	200
Maximum und Minimum stetiger Funktionen . . . . .	201
Ausblick . . . . .	202
Selbsttest . . . . .	203
<b>18 Differenzierbarkeit</b>	<b>205</b>
Einblick . . . . .	205
Grundlegendes zum Differenzieren . . . . .	205
Differenzierbare und stetige Funktionen . . . . .	208
Rechenregeln für Ableitungen . . . . .	208
Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	211
Der Mittelwertsatz . . . . .	212
Monotone Funktionen . . . . .	214
Die Regel von L'Hospital . . . . .	216

Ausblick . . . . .	217
Selbsttest . . . . .	219
<b>19 Das Taylor-Polynom und lokale Extrema</b>	<b>221</b>
Einblick . . . . .	221
Höhere Ableitungen . . . . .	222
Das Taylor-Polynom . . . . .	224
Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen . . . . .	229
Ausblick . . . . .	230
Selbsttest . . . . .	232
<b>20 Unendliche Reihen</b>	<b>233</b>
Einblick . . . . .	233
Definition und Beispiele von Reihen . . . . .	233
Die geometrische Reihe . . . . .	235
Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	238
Ausblick . . . . .	244
Selbsttest . . . . .	245
<b>21 Potenzreihen</b>	<b>247</b>
Einblick . . . . .	247
Grundlegendes zu Potenzreihen . . . . .	247
Der Konvergenzradius einer Potenzreihe . . . . .	249
Die Taylor-Reihe . . . . .	253
Ausblick . . . . .	257
Selbsttest . . . . .	258
<b>22 Das Riemann'sche Integral</b>	<b>259</b>
Einblick . . . . .	259
Riemann'sche Summen . . . . .	260
Rechenregeln der Integration . . . . .	266
Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung . . . . .	267
Rechentechniken der Integration . . . . .	269
Die Substitutionsregel . . . . .	269
Partielle Integration . . . . .	271
Ausblick . . . . .	278
Selbsttest . . . . .	280
<b>23 Uneigentliche Integrale</b>	<b>281</b>
Einblick . . . . .	281
Kritische Stellen des Integrationsintervalls . . . . .	282
Unendliche Integrationsgrenzen . . . . .	284
Das Integralvergleichskriterium für Reihen . . . . .	285

Ausblick . . . . .	286
Selbsttest . . . . .	289
<b>Aufgaben zur Analysis</b>	<b>291</b>
<b>Lösungen der Selbsttests</b>	<b>295</b>
<b>Lösungen der Aufgaben</b>	<b>299</b>
<b>Literatur und Ausklang</b>	<b>319</b>
<b>Index</b>	<b>322</b>

Teil I

Grundlagen



# 1 Elementare Logik und Mengenlehre

## Einblick

Die Mathematik hat die wunderbare Eigenschaft, dass alles in ihr präzise und unmissverständlich formuliert wird. Grundlage hierfür bildet die Aussagenlogik, welche sich mit sogenannten Aussagen und deren Verknüpfungen (durch sogenannte Junktoren) befasst. Wesentlich ist dabei, dass Aussagen stets nur einen der Wahrheitswerte „wahr“ (auch mit 1 bezeichnet) oder „falsch“ (auch mit 0 bezeichnet) haben können. Ferner ist der Wahrheitswert jeder zusammengesetzten Aussage eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt; die Zusammensetzung erfolgt dabei gerade über die erwähnten Junktoren.

Es wird oftmals übersehen, wie wichtig die Aussagenlogik bei der Formulierung von Mathematik ist. Dabei hat nämlich z. B. ein „vielleicht“ keine Bedeutung. Die mathematische Logik ist unverzichtbar, wenn wir Mathematik betreiben wollen. Hier liegt der Wert nämlich in der Exaktheit und Klarheit von Aussagen. Im Alltag ist dies leider nicht durchweg der Fall, so wird selbst vor Gerichten die Frage „Sie sind nicht mit dem Angeklagten verwandt?“ in vielen Fällen mit „Nein!“ beantwortet und als „Der Zeuge ist nicht mit dem Angeklagten verwandt“ vermerkt, obwohl eigentlich eine doppelte Verneinung unter Aspekten der hier behandelten Logik klarmacht, dass eine Verwandtschaft mit dem Angeklagten besteht.

Die Mengenlehre ist ein weiteres grundlegendes Teilgebiet der Mathematik, auf dem wesentliche andere Segmente aufgebaut werden. So betrachten wir Teilmengen und Elemente von Mengen, die wir einer genaueren Untersuchung unterziehen werden oder mit denen wir dann arbeiten; so lassen sich aus bekannten Mengen wieder neue bilden.

## Aussagen, Junktoren und Wahrheitstafeln

### ► Definition

Eine Aussage ist eine Aneinanderreihung von Wörtern einer Sprache (der natürlichen oder derjenigen der Mathematik), welcher der Wahrheitswert „1“ (wahr) oder „0“ (falsch) zugeordnet werden kann. ◀

### Erläuterung

Es gibt auch mehrwertige Logiken, die von diesem Prinzip abweichen. Wir werden jedoch nur die zweiwertige Logik verwenden, also gerade jene mit „0“ und „1“ als einzigen Wahrheitswerten.

### Beispiel

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele von Aussagen aufgeführt.

Aussage	Wahrheitswert
5 ist eine Primzahl.	1
Der Delfin ist ein Fisch.	0
$2 + 3 = 5$	1
Jede stetige Funktion ist differenzierbar.	0
Jede differenzierbare Funktion ist stetig.	1
Jede gerade Zahl, die größer ist als 2, ist die Summe zweier Primzahlen.	unbekannt

### Erläuterung

Wie das letzte Beispiel (die sogenannte Goldbach'sche Vermutung) zeigt, muss der Wahrheitswert einer Aussage nicht bekannt sein; es genügt, wenn prinzipiell ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Daher spielt es auch keine Rolle, ob Sie der Aussage aktuell (z. B. ohne Kenntnis der Begriffe Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) einen Wahrheitswert zuordnen können. Es muss wirklich nur an sich möglich sein.

### ► Definition

Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Die Aussagen  $A \wedge B$  (sprich: „ $A$  und  $B$ “),  $A \vee B$  („ $A$  oder  $B$ “),  $A \rightarrow B$  („Wenn  $A$ , dann  $B$ “; „ $A$  impliziert  $B$ “; „ $A$  ist hinreichend für  $B$ “; „ $B$  ist notwendig für  $A$ “),  $A \leftrightarrow B$  („ $A$  genau dann, wenn  $B$ “; „ $A$  und  $B$  sind äquivalent“) und  $\neg A$  („nicht  $A$ “) sind bei gegebenen Wahrheitswerten von  $A$  und  $B$  vermöge der folgenden Wahrheitstafel erklärt:

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	0

### Erläuterung

Um zu neuen Aussagen zu gelangen, können bestehende Aussagen durch die hier definierten Junktoren verknüpft werden. Die Negation „ $\neg$ “ kehrt den Wahrheitswert einer einzelnen Aussage um, alle übrigen Junktoren nennen wir zweistellig. Dass der Implikation  $A \rightarrow B$  auch dann ein Wahrheitswert zugeordnet

wird, wenn  $A$  falsch ist und/oder nach Ermessen des gesunden Menschenverstands kein offensichtlicher logischer Zusammenhang zwischen  $A$  und  $B$  besteht, erscheint zunächst ungewöhnlich. So ist beispielsweise „Wenn der Delfin ein Fisch ist, dann ist 5 eine Primzahl“ nach den Regeln der Aussagenlogik eine wahre Aussage. Dieses „Paradoxon“ ist jedoch nur durch die Anlehnung an die Umgangssprache bedingt und sollte nach einer gewissen Eingewöhnung akzeptierbar sein.

Es ist zu beachten, dass Aussagen in Form von Formelsprache und Umgangssprache („Prosa“) nicht beliebig zu vermischen sind. So ist zum Beispiel „4 ist eine gerade Zahl  $\wedge$  5 eine Primzahl“ kein guter Stil. Es schadet jedoch nicht, wenn in mathematischen Texten auch gewöhnliche Wörter vorkommen. Es lässt sich zwar der mathematische Gehalt stets knapp und mit speziellen Symbolen formulieren, aber bei der Formulierung einer Aussage muss natürlich auch das Wort „Aussage“ erlaubt sein. Unsere Bemerkungen zum Stil betreffen daher nur die unzulässige Verwendung von Mathematik, z. B. durch das Verwenden mathematischer Symbole als reine Abkürzung.

Teils werden anstelle der in der Aussagenlogik üblichen Symbole  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  die Symbole  $\Rightarrow$  und  $\Leftrightarrow$  verwendet; dies hat sich inzwischen eingebürgert, insbesondere dann, wenn das Thema nicht reine Aussagenlogik ist.

## Sätze der Aussagenlogik

### ■ Satz

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen immer wahr, d. h. sie haben den Wahrheitswert „1“, und werden jeweils als Tautologie bezeichnet:

$A \vee \neg A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
$\neg(A \wedge \neg A)$	Satz vom Widerspruch
$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$	Satz von der doppelten Verneinung
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Kontrapositionssatz
$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$	„Modus ponens“
$(\neg A \wedge (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow B$	„Modus tollens“
$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	„Modus Barbara“
$\left. \begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \\ \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \end{array} \right\}$	Sätze von de Morgan
$\left. \begin{array}{l} A \wedge B = B \wedge A \\ A \vee B = B \vee A \end{array} \right\}$	Kommutativität

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C \\
 A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C
 \end{array} \right\} \text{Assoziativität} \\
 \left. \begin{array}{l}
 (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \\
 (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))
 \end{array} \right\} \text{Distributivsatze} \\
 \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \\
 (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\
 A \rightarrow (A \vee B) \\
 (A \wedge B) \rightarrow A \\
 (A \wedge A) \leftrightarrow (A \vee A) \leftrightarrow A
 \end{array}$$

**Beweis:** Die oben genannten Tautologien können alle durch die Verwendung von Wahrheitstafeln verifiziert werden. Wir machen dies am Beispiel des Kontrapositionssatzes klar:

$A$	$B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

### Erläuterung

Hier trat das erste Mal der Begriff „Beweis“ auf, welchen wir hier mit gutem Gewissen verwendet haben, spricht das Vorgehen doch für sich. Grundsätzlich muss allerdings noch gesagt werden, was allgemein unter einem Beweis zu verstehen ist. Dies liefern wir im kommenden Kapitel.

Wichtig in diesem Zusammenhang ist der Begriff der Schlussregel. Dieser bezeichnet in der mathematischen Logik eine Umformungsregel in einem Kalkül (System von Regeln), d. h. eine Regel, die es erlaubt, bestehende Ausdrücke einer formalen Sprache so umzuformen, dass daraus neue Ausdrücke entstehen. Die Gestalt solcher Schlussregeln ist allerdings davon abhängig, für welches logische System der Kalkül aufgestellt wird. So ist die von uns hier betrachtete zweiwertige Logik „Folgerung“ definiert als der Erhalt von Wahrheit, also: Aus etwas Wahrem folgt nur etwas Wahres. Schlussregeln sind dann so beschaffen, dass sie aus bestehenden Sätzen solche erzeugen, die (nicht notwendigerweise nur) dann wahr sind, wenn die Ausgangssatze wahr sind.

Schlussregeln sind rein syntaktisch definiert, d. h. basierend auf der Folge abstrakter Symbole, und können daher ohne die Kenntnis von Inhalt (Semantik) angewandt werden. Die Anwendung einer endlichen Folge von Schlussregeln wird als Ableitung oder auch Beweis bezeichnet.

Für manche Tautologien ist es sinnvoll, Beispiele in Form umgangssprachlicher Ausdrücke einzusetzen. So wird beispielsweise der Kontrapositionssatz klarer, wenn wir uns verdeutlichen, dass die folgende Aussage vernünftig erscheint: „Wenn es regnet, wird die Straße nass. Dies ist äquivalent zur Aussage, dass wenn die Straße nicht nass ist, es nicht geregnet haben kann.“

Der Wert der Tautologien besteht für uns z. B. darin, dass wir Aussagen auf verschiedene Arten darstellen können, nämlich in der Form rechts oder links vom Äquivalenzsymbol.

## Prädikate und Quantoren

### ► Definition

Ein Prädikat ist eine Aneinanderreihung von Wörtern einer Sprache (der natürlichen oder derjenigen der Mathematik), die mindestens null Leerstellen (Auslassungen) hat, welche zu einer – wahren oder falschen – Aussage wird, wenn in jede Leerstelle ein Eigenname (Objekt) eingesetzt wird. Ein Prädikat mit genau einer Leerstelle heißt einstelliges Prädikat, ansonsten zweistelliges Prädikat usw. ◀

### Erläuterung

Wir bemerken, dass ein nullstelliges Prädikat eine Aussage ist. Prädikate bieten uns aber noch mehr, da sie freie Stellen haben, die besetzbar sind.

Die Bedeutung der vorigen Definition lässt sich auch daran erkennen, dass beispielsweise „ $x$  ist eine Primzahl“ keine Aussage ist, da der Wahrheitswert davon abhängt, was  $x$  ist.

Gewöhnlich wird vereinbart, dass wir z. B. in ein Prädikat  $A(\cdot)$  nur bestimmte Objekte  $x$  einsetzen dürfen, damit die Aussage  $A(x)$  einen Sinn ergibt, da Aussagen der Form „Maserati ist eine Primzahl“ nicht in unserem Interesse sein können. Wir bemerken noch, dass die Schreibweise mit einem „Punkt“, also hier  $A(\cdot)$ , nur bedeutet, dass an dieser Stelle noch etwas einzusetzen ist. Es ist ein freier Platz, den der Punkt andeutet.

Wir sehen, dass einiges noch im Dunkeln bleibt, denn was eigentlich ist eine Sprache oder ein Eigenname genau? Für die erschöpfende Beantwortung all dieser Fragen ist hier nicht der rechte Platz und wir begnügen uns damit, die Definition mit gesundem Menschenverstand zu verstehen. Ihr Kerngedanke ist aber gerade, dass wir Leerstellen haben möchten, die besetzbar sind.

### Beispiel

„Ein Mensch ist ein Säugetier.“ Hierbei handelt es sich um ein nullstelliges Prädikat. Hingegen ist „... ist kleiner als ...“ ein zweistelliges Prädikat. Hier

kann natürlich auch nur für die erste Leerstelle etwas eingesetzt werden, sodass sich z. B., als einstelliges Prädikat „Riemann ist kleiner als ...“ ergibt. Wird in beide Leerstellen je ein Eigenname eingesetzt, entsteht ein Satz der deutschen Sprache, z. B. „Riemann ist kleiner als Einstein.“

### Beispiel

Wir setzen voraus, dass  $x$  und  $y$  natürliche Zahlen sind (also  $x, y = 0, 1, 2, \dots$ ), und führen als Beispiele die folgenden Prädikate ein:

- $A_1(x)$  : „ $x$  ist eine gerade Zahl.“  
 $A_2(x)$  : „ $x + 1$  ist eine gerade Zahl.“  
 $A_3(x)$  : „Wenn  $x$  eine gerade Zahl ist,  
dann ist  $x + 1$  eine ungerade Zahl.“  
 $A_4(x, y)$  : „ $x$  ist eine gerade Zahl,  
und  $y$  ist eine ungerade Zahl.“

### ► Definition

Für manche Prädikate  $A(\cdot)$  gilt, dass  $A(x)$  für alle Einsetzungen  $x$  immer wahr ist. Dies drücken wir durch die wahre Aussage

$$\forall x A(x)$$

aus, spricht: „Für alle  $x$  gilt  $A(x)$ .“ Das Symbol  $\forall$  heißt Allquantor. ◀

### Beispiel

Das Prädikat  $A_3(\cdot)$  ist für alle eingesetzten natürlichen Zahlen wahr.

### ► Definition

Ist  $A(x)$  wenigstens für ein  $x$  wahr, dann sagen wir „Es gibt/existiert ein  $x$  mit  $A(x)$ “ und schreiben:

$$\exists x A(x);$$

das Symbol  $\exists$  heißt Existenzquantor. ◀

### Beispiel

Hier wählen wir aus der obigen Liste von Beispielen  $A_1(x)$  und erhalten z. B. durch das Einsetzen von  $x = 42$  eine wahre Aussage. Dabei ist es unerheblich, wie viele verschiedene Einsetzungen letztlich zu einer wahren Aussage führen. Möchten wir ausdrücken, dass  $A(x)$  nur für ein  $x$ , jedoch nicht für eine andere – von  $x$  verschiedene – Einsetzung wahr ist, so sagen wir: „Es gibt genau ein  $x$  mit  $A(x)$ .“

Gleichungen wie z. B.

$$G(x): 2x + 3 = 5$$

stellen Prädikate dar. Die Frage „Gibt es eine Lösung?“ übersetzt sich zu: „Ist die Aussage  $\exists x G(x)$  wahr?“

### Erläuterung

Teils finden sich in der Literatur für Allaussagen bzw. Existenzaussagen auch die Schreibweisen

$$\bigwedge_x A(x) \text{ bzw. } \bigvee_x A(x).$$

Unter Verwendung von Quantoren lassen sich mathematische Aussagen in besonders kompakter Form darstellen, was jedoch teilweise als unnötige formale Härte angesehen wird. Aus der Erfahrung heraus scheint es uns, als haben sowohl die prosaische als auch die rein formale Darstellung ihre Vorteile, die es von Fall zu Fall abzuwägen gilt.

### ■ **Satz**

Sei  $A(\cdot)$  ein einstelliges und  $B(\cdot, \cdot)$  ein zweistelliges Prädikat. Dann sind die folgenden Aussagen stets wahr:

$$\begin{aligned} \neg \forall x A(x) &\leftrightarrow \exists x \neg A(x) \\ \neg \exists x A(x) &\leftrightarrow \forall x \neg A(x) \\ \neg \forall x \exists y B(x, y) &\leftrightarrow \exists x \forall y \neg B(x, y) \\ \forall x \forall y B(x, y) &\leftrightarrow \forall y \forall x B(x, y) \\ \exists x \exists y B(x, y) &\leftrightarrow \exists y \exists x B(x, y) \\ \exists x \forall y B(x, y) &\rightarrow \forall y \exists x B(x, y) \end{aligned}$$

■

### Erläuterung

Diese Regeln werden uns noch nützlich sein. Ein Eingehen auf Beweise ist allerdings für unsere Zwecke nicht erstrebenswert. Wir bemerken noch, dass auch die obigen Tautologien durch das Einsetzen umgangssprachlicher Prädikate oft klarer werden:

$$B(x, y): \text{„}x \text{ ist ein Mann, der zur Frau } y \text{ passt.“}$$

So ist die letzte der obigen Tautologien äquivalent zu: „Wenn es einen Mann gibt, der zu jeder Frau passt, dann gibt es für jede Frau einen Mann, der zu ihr passt.“

# Mengen

## ► Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Ist  $M$  eine Menge und  $x$  ein Element der Menge, schreiben wir  $x \in M$ , sprich: „ $M$  enthält  $x$ .“ Ist  $x$  kein Element von  $M$  schreiben wir  $x \notin M$ .

Mengen können definiert werden durch Aufzählen der Elemente, aber auch über eine Eigenschaft, die ihre Elemente besitzen. ◀

## Erläuterung

Die obige Definition entstammt den Überlegungen von Georg Cantor, der die Mengenlehre zum Ende des 19. Jahrhunderts begründete. Sie kann als „naive“ Beschreibung des Begriffs Menge angesehen werden, ist aber dennoch auch heute noch von großer Bedeutung und beinhaltet das Wesentliche für weitreichende Gedanken.

## Beispiel

Definition durch Aufzählung:  $M_1 = \{2, 10, 16\}$  oder  $M_2 = \{2, 10, 15, 16, 21\}$ .

## Beispiel

Ist klar, wie die Aufzählung fortgeführt wird, kann diese auch unendlich sein:  $M_3 = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ .

## Beispiel

Definition über die Eigenschaft der Elemente:  
 $M_3 = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und gerade}\}$ .

## Erläuterung

Für die Elemente einer Menge ist a priori keine Reihenfolge festgelegt, so ist z. B.  $M_1 = \{2, 10, 16\} = \{10, 16, 2\}$ . Auch mehrfach auftretende Elemente sind ohne Bedeutung:  $\{2, 3, 2\} = \{2, 3\}$ .

## ► Definition

Die leere Menge, mit  $\emptyset$  bezeichnet, ist die Menge, die keine Elemente enthält:  $M = \emptyset \Leftrightarrow \forall x (x \notin M)$ . ◀

## Erläuterung

Es ist keinesfalls so, dass die leere Menge bedeutungslos wäre, auch wenn durch sie scheinbar gerade das „Nichts“ definiert wird. So wird bei der üblichen Addition ja auch akzeptiert, dass sich beim Addieren der Zahl Null zu einer anderen nichts ändert und diese vermeintlich unnütz ist. Jedoch ist allseits bekannt, welche Bedeutung die Null hat. Die leere Menge werden wir spätestens dann schätzen, wenn wir Mengen verknüpfen und z. B. ausdrücken wollen, dass zwei Mengen keine gemeinsamen Elemente haben, die Menge der gemeinsamen Elemente also gerade gleich der leeren Menge ist. Anstatt der Bezeichnung  $\emptyset$  wird auch  $\{ \}$  verwendet (allerdings selten), was die „Leere“ visualisiert. Bitte merken Sie sich, dass  $\{0\}$  gerade nicht die leere Menge ist, sondern die Menge, welche die Null enthält – das Durcheinanderbringen (woher es auch immer kommen mag) in diesem Zusammenhang ist leider bei Studierenden nicht selten zu beobachten.

### ► Definition

Seien  $A$  und  $B$  Mengen.  $A$  heißt Teilmenge von  $B$ , wenn jedes Element von  $A$  auch in  $B$  enthalten ist:  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

$A$  und  $B$  heißen gleich, wenn jedes Element von  $A$  in  $B$  enthalten ist und umgekehrt:  $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ . (Oder auch:  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ .)

Ist  $A \subseteq B$ , aber  $A \neq B$ , dann sprechen wir von einer echten Teilmenge:  $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ . (Hierbei steht  $A \neq B$  natürlich für  $\neg(A = B)$ .) ◀

## Erläuterung

Die Notation ist in der Literatur nicht einheitlich. Manchmal steht z. B. „ $\subset$ “ einfach für Teilmenge (ohne „echt“ sein zu müssen), und das Symbol  $\subsetneq$  bezeichnet echte Teilmengen.

### Beispiel

Sei  $M_1 = \{2, 10, 16\}$ ,  $M_2 = \{2, 10, 15, 16, 21\}$  und  $M_3 = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ . Dann gilt  $M_1 \subset M_2$ ,  $M_1 \subset M_3$  und  $M_2 \not\subseteq M_3$ . Zur Verdeutlichung des Unterschieds von „Element“ und „Teilmenge“: Es gilt  $2 \in M_1$  und  $\{2\} \subset M_1$ .

### Beispiel

Für jede Menge  $M$  gilt  $\emptyset \subseteq M$ .

### ► Definition

Die Potenzmenge  $P(X)$  ist die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge  $X$ :  $P(X) = \{U \mid U \subseteq X\}$ . ◀

**Beispiel**

$$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ und } P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

**Erläuterung**

Ein nützlicher Begriff, denn es ist stets gut, sich zu überlegen, welche Teilmengen einer betrachteten Menge existieren. Die Potenzmenge spielt aber ferner in zahlreichen theoretischen Überlegungen eine prominente Rolle. So ist einfach zu beantworten, welche Anzahl von Elementen  $P(X)$  für eine Menge  $X$  mit endlich vielen Elementen hat, nämlich  $2^n$  Elemente, falls  $X$  selbst  $n$  Elemente hat. Sie können sich das durch die Überlegung klarmachen, wie viele Kombinationsmöglichkeiten es gibt, eine Teilmenge  $U \subseteq X$  beim Durchlaufen der Elemente von  $X$  zu konstruieren: Das erste Element von  $X$  wird in  $U$  enthalten sein oder eben nicht, das zweite Element wird in  $U$  enthalten sein oder nicht usw. Das ergibt  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots = 2^n$  Möglichkeiten, eine Teilmenge zu bilden.

**Zahlen und Intervalle****► Definition**

Wir definieren, zusammen mit den entsprechenden Symbolen:

die Menge der natürlichen Zahlen:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,

die Menge der ganzen Zahlen:  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ ,

die Menge der rationalen Zahlen:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ ,

die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , bestehend aus allen Zahlen, die sich als (unter Umständen nichtperiodischen, nichtabbrechenden) Dezimalbruch schreiben lassen,

die Menge der komplexen Zahlen:  $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ . ◀

**Erläuterung**

Diese Mengen sind es, die für zahlreiche Überlegungen benötigt werden, und wir sehen, dass diese in einer Art Hierarchie aufgelistet wurden. So sind z. B. die natürlichen Zahlen in den ganzen enthalten, diese wiederum in den rationalen. Setzen wir dann bei den komplexen Zahlen jeweils  $y = 0$ , erhalten wir stets eine reelle Zahl, die komplexen Zahlen erweitern also die reellen. Die vier zuerst genannten Mengen sind Schulstoff, komplexe Zahlen werden in der Schule jedoch nicht immer behandelt; wir werden uns später genauer mit ihnen befassen. Mit komplexen Zahlen  $z = x + iy$  rechnen wir allerdings bei den Grundrechenarten „normal“ und beachten einfach die Rechenregel  $i^2 = -1$ . Beim Vereinfachen fassen wir dann jeweils Terme mit bzw. ohne das „ $i$ “ zusammen.

**Beispiel**

Eine elementare Rechnung mit komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i)^2 - 2i + 5 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 - 2i + 5 \\
 &= 4 + 12i + 3^2 \cdot i^2 - 2i + 5 \\
 &= 4 + 12i + 9 \cdot (-1) - 2i + 5 \\
 &= 10i
 \end{aligned}$$

**Erläuterung**

So wie reelle Zahlen auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden, können wir uns komplexe Zahlen  $z = x + iy$  als Punkte in der Zahlenebene mit Koordinaten  $(x, y)$  vorstellen.

Weiteres ist einfach aus der Darstellung in der Zahlenebene erkennbar: Der Abstand vom Ursprung ist der Betrag  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (wir denken an Pythagoras) der komplexen Zahl  $z$ , und die an der  $x$ -Achse gespiegelte Zahl ist  $x - iy$ , die auch mit  $\bar{z}$  bezeichnet wird.

**► Definition**

Für alle endlichen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  ist:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (abgeschlossenes Intervall).

$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  (offenes Intervall).

$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  und  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  (halboffenes Intervall).

$[a, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ,  $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ ,

$]a, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$  und  $] -\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$  (uneigentliche Intervalle).

$\mathbb{R} = ] -\infty, \infty[$ , damit ist die Menge der reellen Zahlen auch als Intervall auffassbar. ◀

**Erläuterung**

Um Elemente aus Intervallen auszuschließen, werden manchmal auch runde Klammern verwendet, also wird z. B. statt  $]a, b[$  auch  $[a, b)$  geschrieben oder statt  $]a, b[$  auch  $(a, b)$ ; wir finden das allerdings wenig intuitiv.

Abgeschlossene, offene und halboffene Intervalle sind nach unserer Definition stets von „endlicher Länge“ (nämlich  $b - a$ ), weshalb auch von beschränkten Intervallen gesprochen wird.

## Eigenschaften und Verknüpfungen von Mengen

### ► Definition

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir definieren neue Mengen durch sogenannte Verknüpfungen dieser Mengen, welche die Namen Vereinigung usw. tragen:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad \text{Vereinigung von } A \text{ und } B,$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad \text{Schnitt von } A \text{ und } B,$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{Komplement von } B \text{ in } A.$$

Haben  $A$  und  $B$  leeren Schnitt, d. h.  $A \cap B = \emptyset$ , so wird gesagt, dass  $A$  und  $B$  disjunkt sind. ◀

### Beispiel

Für  $M_1 = \{2, 10, 16\}$ ,  $M_2 = \{2, 10, 15, 16, 21\}$  und  $M_3 = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  gilt  $M_1 \cap M_2 = M_1$ ,  $M_2 \setminus M_3 = \{15, 21\}$  und  $M_1 \cup M_2 = M_2$ .

### Beispiel

Für jede Menge  $M$  gilt  $M \cup \emptyset = M$ ,  $M \setminus \emptyset = M$  und  $M \cap \emptyset = \emptyset$ .

### Beispiel

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist die Menge der irrationalen Zahlen, nämlich derjenigen reellen Zahlen, die nicht als Bruch darstellbar sind.

### ■ Satz

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array} \right\} \text{Kommutativität}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{array} \right\} \text{Assoziativität}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right\} \text{Distributivität}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array} \right\} \text{Adjunktivität}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array} \right\} \text{Idempotenz}$$

$$\left. \begin{array}{l} C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \end{array} \right\} \text{de Morgan'sche Regeln}$$

**Beweis:** Wir beweisen beispielhaft die erste Gleichung der Adjunktivität, müssen also zeigen, dass  $x \in A \cap (A \cup B)$  genau dann gilt, wenn  $x \in A$  ist.

Zunächst zeigen wir die Richtung „ $x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ “:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \cup B) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

Dann zeigen wir die Richtung „ $x \in A \cap (A \cup B) \Leftarrow x \in A$ “:

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in A \cup B) \\ &\Rightarrow x \in A \cap (A \cup B) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Das obige Verfahren wird uns noch häufiger begegnen: Um die Äquivalenz zweier Aussagen zu beweisen, wird gezeigt, dass die eine Aussage aus der anderen folgt und umgekehrt. (Formal liegt der Methode die Tautologie  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$  zugrunde.)

Da stets  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  gilt, schreiben wir einfach  $A \cup B \cap C$ ; für den Schnitt von Mengen ist dies analog.

Es lassen sich auch Schnitt und Vereinigung von mehr als zwei oder drei Mengen bilden. Ist eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen  $I = \{i_0, i_1, \dots, i_n\}$  gegeben, durch die eine Anzahl von Mengen  $A_{i_0}, \dots, A_{i_n}$  nummeriert wird, so schreiben wir

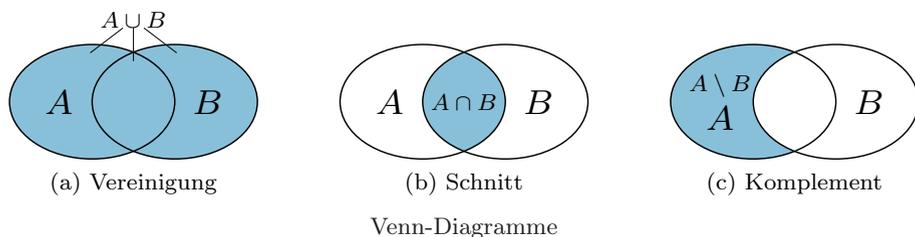
$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_{i_0} \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$$

und

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}.$$

Wir nennen  $I$  in diesem Zusammenhang die Indexmenge, und  $i \in I$  heißt Index. Hier kommen ferner die Doppelindizes  $i_k$  vor, die – wie hier – aus praktischen Gründen teils nützlich sind. Durch diese Art der Indizierung wird sofort klar, wie viele Mengen geschnitten bzw. vereinigt werden, nämlich  $n$  Stück.

Sprechweise für z. B.  $A_7$ : „ $A$  Sieben“ oder „ $A$  Index Sieben“.



### Erläuterung

Im Diagramm werden die Mengenoperationen mithilfe sogenannter Venn-Diagramme veranschaulicht. Über solche Diagramme lässt sich allerdings nichts beweisen, auch wenn sie intuitiv und erklärend sind, denn keinesfalls lassen sich alle Mengen als Bilder dieser Art zeichnen. Wer das nicht glaubt, der möge bitte bis zum Abschnitt über Matrizen warten und versuche dann, die Menge der Matrizen mit sieben Zeilen und vier Spalten in einem Bildchen darzustellen.

### ► Definition

Das kartesische Produkt einer Anzahl von  $n$  Mengen  $A_1, \dots, A_n$  ist die Menge aller geordneten Elemente von  $A_1, \dots, A_n$ , geschrieben:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Ein Element  $(a_1, \dots, a_n)$  von  $A_1 \times \dots \times A_n$  heißt  $n$ -Tupel; im Fall  $n = 2$  Paar, im Fall  $n = 3$  Tripel, usw. Für eine Menge  $M$  schreiben wir

$$M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-mal}} \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Ein  $n$ -Tupel besteht also aus  $n$  nummerierten, nicht notwendig voneinander verschiedenen mathematischen Objekten, deren Anordnung (im Gegensatz zu Mengen) von Bedeutung sein kann.

Analog zur leeren Menge gibt es auch das 0-Tupel bzw. leere Tupel „ $( )$ “, welches genauso wie die leere Menge auch mit  $\emptyset$  bezeichnet wird.

### Beispiel

Das 2-Tupel (auch Paar genannt)  $(1, 3)$  beschreibt den Punkt mit dem Wert 1 auf der  $x$ -Achse und dem Wert 3 auf der  $y$ -Achse in der aus der Schule bekannten Zahlenebene.

## Neue Buchstaben

### Erläuterung

Um nicht in „Symbolnot“ zu geraten, werden in der Mathematik und Physik häufig griechische Buchstaben verwendet – es gehört auch zu den Grundlagen, dass Sie diese kennen:

Alpha	$\alpha$	$A$	Iota	$\iota$	$I$	Rho	$\rho, \varrho$	$P$
Beta	$\beta$	$B$	Kappa	$\kappa$	$K$	Sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$
Gamma	$\gamma$	$\Gamma$	Lambda	$\lambda$	$\Lambda$	Tau	$\tau$	$T$
Delta	$\delta$	$\Delta$	My	$\mu$	$M$	Ypsilon	$\upsilon$	$\Upsilon$
Epsilon	$\epsilon, \varepsilon$	$E$	Ny	$\nu$	$N$	Phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$
Zeta	$\zeta$	$Z$	Xi	$\xi$	$\Xi$	Chi	$\chi$	$X$
Eta	$\eta$	$H$	Omikron	$o$	$O$	Psi	$\psi$	$\Psi$
Theta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	Pi	$\pi$	$\Pi$	Omega	$\omega$	$\Omega$

Tatsächlich reicht auch das manchmal nicht, und es werden Elemente weiterer Alphabete benutzt, aber auch Symbole neu erfunden.

## Ausblick

Die Logik und Mengenlehre sind besonders ehrenvolle Gebiete der Mathematik, da sie wesentlich ihr Fundament bilden. Beachtet werden muss dabei, dass wir hier nur einen zweckorientierten Überblick liefern konnten. Bereits in einer Erläuterung hatten wir erwähnt, dass über Begriffe wie z. B. „Sprache“ noch einiges zu sagen wäre. So sind auch die Grundlagen der Mengenlehre etwas, worüber die letzte Diskussion noch nicht geführt wurde, und es gab diverse Dispute darüber in der Geschichte der Mathematik. Es wurde dabei auch klar, dass jedes Rütteln an der Basis gewaltige Auswirkungen hat. Besonders interessierten Lesern sei eine Beschäftigung mit dem Werk (und Leben) Kurt Gödels empfohlen.

Die Logik ist nicht nur innermathematisch eine bedeutende Grundlage, sondern beispielsweise auch für die Informatik (ein Kunstwort aus Information und Mathematik), die sich u. a. mit dem Aufbau von Rechnern befasst und gleichfalls Themen wie das Maschinelle Lernen und die Künstliche Intelligenz als Teilgebiete hat. Im Innersten eines Rechners gibt es elektronische Schaltungen, die physikalisch die hier behandelten Verknüpfungen zwischen Aussagen realisieren – dabei finden sich dann die Einsen (Strom fließt) und Nullen (Strom fließt nicht) wieder. Mit den logischen Operationen – und ihren technischen Realisierungen – lassen sich dann z. B. sogenannte Halbaddierer und Volladdierer konstruieren, mit denen Prozessoren rechnen können. Schließlich bildet

die Logik damit eine Basis für die moderne Welt – vom Smartphone bis zum Großrechner für die Wettermodellierung.

Zahlreiche bedeutende Geister (Mathematiker) haben Großartiges geleistet. Der Mathematiker denkt beispielsweise an die (nach ihren „Erfindern“ benannten) Zermelo-Fraenkel-Axiome der Mengenlehre (zu Axiomen später mehr), damit wir Mathematik heute so betreiben können, wie es der Fall ist. Und auch die „Entdeckung“ der gewöhnlich verwendeten Zahlen (natürliche, reelle usw.) war ein kaum zu überschätzender Kraftakt. Tatsächlich gibt es von diesen noch mehr, als hier behandelt; man denke dabei z. B. an die sogenannten Quaternionen, durch welche die komplexen Zahlen erweitert werden.

Im weiteren Verlauf werden wir nicht nur Mengen betrachten, sondern auch Mengen mit einer Struktur, die dann meist Räume genannt werden. Je nach gegebener Menge und Struktur liegen dann z. B. sogenannte Vektorräume oder topologische Räume vor.

## Selbsttest

**I.** Seien die Prädikate  $A(n)$ : „ $n$  ist eine Primzahl“,  $B(n)$ : „ $n$  ist eine gerade Zahl“ und  $C(n)$ : „ $n > 2$ “ gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Hinweis: 2 ist die einzige gerade Primzahl.

- |   |  |
|---|--|
| (1) $A(2) \rightarrow C(1)$               | (6) $B(2) \wedge C(3)$                             |
| (2) $C(1) \rightarrow A(2)$               | (7) $B(3) \vee B(5)$                               |
| (3) $\exists n[A(n) \wedge B(n)]$         | (8) $(C(1) \vee B(42)) \wedge A(3)$                |
| (4) $\forall n[\neg A(n) \vee \neg B(n)]$ | (9) $\forall n[B(n) \vee \neg B(n)]$               |
| (5) $C(1) \rightarrow A(4)$               | (10) $\forall n[\neg B(n) \leftrightarrow B(n+1)]$ |
|   | (11) $\exists n[A(n) \wedge C(n) \wedge B(n)]$     |

**II.** Sei  $M = \{-1, 0, 1\}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| (1) $M \subseteq \mathbb{N}$   | (8) $\{0, 1\} \in M$  |
| (2) $M \subseteq \mathbb{Z}$   | (9) $M \cup \{0, 1\} = \{0, 1\}$                                  |
| (3) $M \subseteq M$            | (10) $\emptyset \cap M = M$                                       |
| (4) $M \subset M$              | (11) $\emptyset \subset M$  |
| (5) $M \cap \mathbb{Z} = M$    | (12) $M \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap M$                      |
| (6) $M \cup \mathbb{Z} = M$    | (13) $M \subset (\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0, 1\}$  |
| (7) $\{2\} \cap M = \emptyset$ | (14) $M \subset (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{0, 1\}$  |
|                                | (15) $M \subset (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{-1, 0\}$ |



## 2 Definition, Satz, Beweis und mehr

### Einblick

Die Logik und Mengenlehre lernten wir als wesentliche Basis der Mathematik kennen, allerdings gibt es auch in diesen Teildisziplinen Definitionen, Sätze und Beweise, wie sie zuvor bereits vorgekommen sind. Wir haben dabei von einem natürlichen (naiven) Verständnis Gebrauch gemacht. Auf dem Weg von der Basis zu den uns wesentlich in diesem Band interessierenden Themen der linearen Algebra und Analysis wollen wir nun noch etwas genauer auf diese Dinge – die grundlegende Elemente darstellen – eingehen; so gibt es z. B. bei Beweisen verschiedene Grundtypen. Auch sind in der Mathematik weitere Begriffe, wie der des Gegenbeispiels, von Bedeutung, die wir ebenfalls kurz beleuchten wollen.

Bei jeder Definition, bei jedem Satz und Beweis usw. bleibt jedoch stets von größter Bedeutung, was an gerichteter Kreativität, Exaktheit und Bedeutung, ja teils Genialität von den „Schöpfern“ in diese einfließt. So nützt keine Definition der Mathematik (oder uns), in der ohne Sinn etwas zum ersten Mal benannt wird. Eventuell gehören Sie bald zu denen, welche die Mathematik bereichern, dann sollten Erweiterungen und Ergänzungen sorgsam durchdacht werden, bevor diese dem Mosaik dauerhaft hinzugefügt werden.

### Grundlegendste Elemente bei der Formulierung von Mathematik

#### ► Definition

Ein Beweis in der Mathematik ist die Herleitung der Wahrheit (oder Falschheit) einer Aussage aus einer Menge von Axiomen (nicht weiter beweisbare Grundtatsachen) und/oder bereits bewiesener Aussagen mithilfe von Schlussregeln. Bewiesene Aussagen werden Sätze genannt. Wird ein Satz nur formuliert und bewiesen, um auf seiner Grundlage einen wichtigeren zu beweisen, so wird dieser Hilfssatz oder Lemma genannt. Einfache Folgerungen aus Sätzen, z. B. Spezialfälle, nennen wir Korollare. ◀

#### Erläuterung

Wichtig ist, dass nur Schlussregeln zum Beweisen zulässig sind. Bei einfachen Aussagen mag dies übertrieben erscheinen (sagt doch ein Bild oft mehr als tau-

send Schlussregeln), jedoch lässt sich Mathematik so nicht ernsthaft betreiben. Bilder und blumige Erklärungen können helfen, sind jedoch kein Beweis.

Die Begriffe Korollar und Lemma werden wir nicht verwenden. Wir halten die dadurch gemachten Unterteilungen für unsere Zwecke für nicht geeignet, erachten diese jedoch grundsätzlich und bei „sachgemäßem Gebrauch“ nicht für überflüssig.

Noch einige Worte zu Axiomen: In unserem Rahmen versteht man darunter grob einen einleuchtenden Grundsatz; exakter lässt sich sagen, dass ein Axiom ein Ausgangssatz (einer formalen Sprache) ist, der als gültig vorausgesetzt wird.

### ► Definition

Eine Definition ist eine eindeutige Bestimmung bzw. Benennung eines Begriffs, oder eines Symbols. Dazu wird für einen Begriff, oder auch ein Symbol, eine bestimmte Bedeutung festgelegt. ◀

### Erläuterung

Sie haben sicher bereits bemerkt, dass hier definiert wurde, was eine Definition ist. Das erscheint widersinnig, jedoch wurde, von der Bedeutung im gewöhnlichen Verständnis ausgehend, fixiert, was unter einer Definition im mathematischen Sinne zu verstehen ist.

Definitionen sorgen in gewisser Weise dafür, dass es in der Mathematik überhaupt Entitäten gibt, über die es dann Aussagen zu treffen gilt. Durch Definitionen verfügen wir über eine Art Vokabelliste, mit der dann gearbeitet wird.

Wir können im Rahmen der Mathematik ein Objekt nicht nur durch eine definierende Gleichung explizit definieren, sondern durch eine charakterisierende Eigenschaft auch implizit. Eine explizite Definition ist immer zulässig, eine implizite jedoch nur unter der Bedingung, dass es wirklich genau ein Objekt mit der angegebenen Eigenschaft gibt. Wir sprechen von der Wohldefiniertheit (der impliziten Definition).

### Beispiel

Wir können die Gleichheit zweier Objekte definieren; dies wird manchmal durch einen Doppelpunkt angedeutet, z. B.  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Oder wir definieren Eigenschaften über die Äquivalenz, z. B.: „Eine natürliche Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.“ Dies wird gewöhnlich in der folgenden Form geschrieben: „ $n$  ist gerade  $:\Leftrightarrow n$  ist durch 2 teilbar.“

# Formen des Beweisens

## Direkte und indirekte Beweise

### ► Definition

Beim Führen eines direkten Beweises wird eine Kette richtiger Schlüsse aufgestellt, deren letztes Glied die Behauptung ist. Zum Beweis darf nur verwendet werden, was ausdrücklich als wahr angenommen wurde oder sich bereits als wahr herausgestellt hat. ◀

### Beispiel

Wir möchten die folgende Behauptung zeigen: Wenn  $n \in \mathbb{N}$  eine ungerade Zahl ist, dann ist auch  $n^2$  eine ungerade Zahl. Sei also  $n$  ungerade, d. h. nur mit Rest durch 2 teilbar. Das ist genau dann der Fall, wenn es eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $n = 2k + 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1\end{aligned}$$

Folglich ist auch  $n^2$  ungerade, denn  $n^2$  ist von der Form  $2N + 1$  mit einer natürlichen Zahl  $N$ .

### Erläuterung

Bei dieser Beweisform wird also mithilfe der als wahr angenommenen Voraussetzung („ $n$  ist ungerade“) die Behauptung („ $n^2$  ist ungerade“) auf direktem Wege abgeleitet; wir sprechen von einem direkten (deduktiven) Beweis. Wir werden in der Folge viele direkte Beweise führen, sodass es an weiteren Beispielen keinen Mangel geben wird.

### ► Definition

Beim Führen eines indirekten Beweises wird aus der Annahme, dass die Behauptung falsch ist, durch richtige Schlüsse ein Widerspruch hergeleitet. ◀

### Erläuterung

Diese Beweistechnik wird auch „reductio ad absurdum“, die „Zurückführung auf eine Absurdität“, genannt.

### Beispiel

Eine natürliche Zahl  $p$  heißt Primzahl, falls Folgendes gilt:

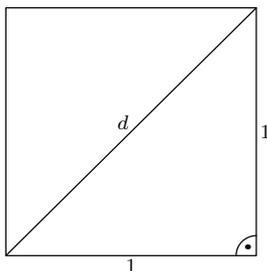
1.  $p > 1$  und
2.  $p$  ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

Mithilfe eines indirekten Beweises können wir zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt:

Angenommen, das Gegenteil ist der Fall, und es gibt endlich viele Primzahlen. Dann gibt es auch eine größte Primzahl  $p_{\max}$ , und die Menge aller Primzahlen ist von der Form  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, p_{\max}\}$ . Sei  $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_{\max} + 1$  das Produkt aller Primzahlen plus eins. Dann teilen alle  $p \in P$  diese Zahl mit einem Rest von eins. Also ist  $q$  entweder eine Primzahl oder es gibt eine Primzahl  $p' \notin P$ , die  $q$  teilt. Die erste Möglichkeit führt zu einem Widerspruch, da dann  $q$  eine Primzahl wäre, die größer ist als  $p_{\max}$ . Die zweite jedoch gleichfalls, da dann  $P$  nicht aus allen Primzahlen bestehen kann. Also war die ursprüngliche Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, falsch.

### Beispiel

Für ein weiteres Beispiel eines indirekten Beweises betrachten wir zunächst eine elementargeometrische Konstruktion, nämlich die Länge der Diagonalen eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 – nennen wir diese Länge  $d$ . Dann gilt nach dem bekannten Satz des Pythagoras:  $1^2 + 1^2 = d^2$  bzw.  $d^2 = 2$ .



Nach dem Satz des Pythagoras gilt  $1^2 + 1^2 = d^2$ .

Für die (eindeutig bestimmte) positive reelle Zahl, die diese Eigenschaft hat, wird bekanntlich  $d = \sqrt{2}$  geschrieben. Wir können  $d$  zwar mit beliebiger Genauigkeit als Dezimalbruch schreiben:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769 \dots,$$

jedoch wird dieser niemals abbrechen. Und überhaupt gibt es keine Möglichkeit, die Quadratwurzel aus 2 als Bruch darzustellen. Dies können wir durch einen Widerspruchsbeweis zeigen:

Angenommen, es gäbe  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ . Da wir entsprechend kürzen können, dürfen wir annehmen, dass  $p$  und  $q$  teilerfremd sind. Durch Quadrieren

erhalten wir  $\frac{p^2}{q^2} = 2$  und damit  $p^2 = 2q^2$ . Das bedeutet,  $p^2$  ist eine gerade Zahl. Damit muss aber auch  $p$  eine gerade Zahl sein, und es gibt eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit  $p = 2k$ . Daraus folgt jedoch, dass  $q$  ebenfalls eine gerade Zahl ist:

$$q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2k)^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$$

Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Annahme, dass  $p$  und  $q$  teilerfremd sind.

## Konstruktive und nichtkonstruktive Beweise

### ► Definition

Bei einem konstruktiven Beweis wird entweder die Lösung selbst angegeben oder ein Verfahren, welches zu ihr führt, d. h., eine Lösung wird konstruiert. Bei einem nichtkonstruktiven Beweis wird anhand von Eigenschaften auf die Existenz einer Lösung geschlossen. ◀

### Erläuterung

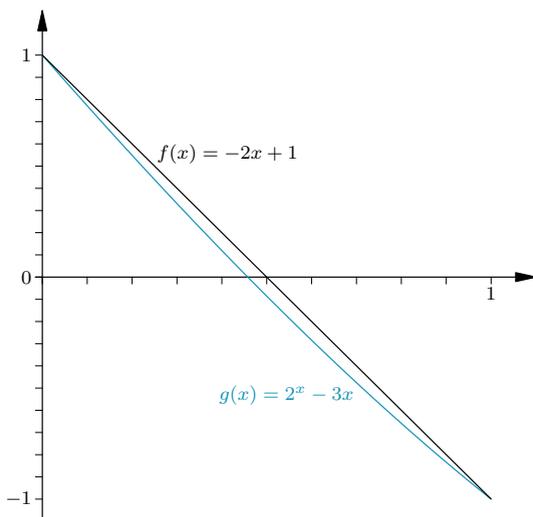
Teils wird beim indirekten Beweis indirekt die Annahme, es gäbe keine Lösung, zum Widerspruch geführt. Daraus folgt dann, dass eine Lösung existiert.

### Beispiel

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -2x + 1$  hat zwischen  $x = 0$  und  $x = 1$  eine Nullstelle. Sei zum Beweis  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Dann gilt  $f(x_0) = 0$ , und  $x_0$  liegt offensichtlich zwischen 0 und 1.

### Erläuterung

Nicht immer ist ein solcher Beweis jedoch möglich, so gilt beispielsweise: Die durch  $g(x) = 2^x - 3x$  gegebene Funktion hat zwischen  $x = 0$  und  $x = 1$  eine Nullstelle. Mit dem später behandelten Zwischenwertsatz werden wir zeigen, dass wir nicht nur für diese explizite Funktion Nullstellen garantieren können, sondern grundsätzlich für Funktionen mit speziellen Eigenschaften. Allerdings wissen wir dann nicht unbedingt, wie diese Nullstellen aussehen, sondern nur, dass es sie gibt; es werden also keine Nullstellen explizit konstruiert.

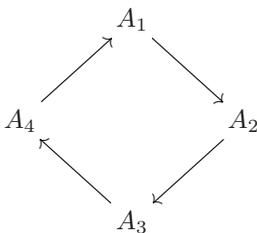


Nullstellen zweier Funktionen

## Der Ringschluss

### Beispiel

Wir betrachten das folgende Diagramm von vier Aussagen  $A_1$  bis  $A_4$  mit den eingefügten Implikationen:



Wir können das Diagramm entlanglaufen, um jede beliebige Implikation zwischen den Aussagen – und damit deren Äquivalenz – zu zeigen. Wenn wir es nur mit einer Äquivalenz  $A_1 \leftrightarrow A_2$  zu tun haben, haben wir zwei Richtungen zu beweisen:  $A_1 \rightarrow A_2$  und  $A_2 \rightarrow A_1$ .

### Erläuterung

Wollen wir die Äquivalenz einer Anzahl von Aussagen beweisen,

$$(A_1 \leftrightarrow A_2) \wedge (A_2 \leftrightarrow A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \leftrightarrow A_n),$$

so genügt es offenbar, die folgenden Implikationen zu zeigen:

$$(A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \rightarrow A_n) \wedge (A_n \rightarrow A_1)$$

### Beispiel

Durch das Aufzeichnen (bitte beachten Sie den entsprechenden Abschnitt) eines Venn-Diagramms könnten wir erahnen, dass der folgende Beispielsatz wahr ist. Wir möchten jedoch versuchen, ausschließlich die bislang bekannten Schlussregeln, Sätze und Definitionen zu benutzen, um den Beweis zu führen.

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $B \subseteq A$
2.  $A \cup B = A$
3.  $A \cap B = B$

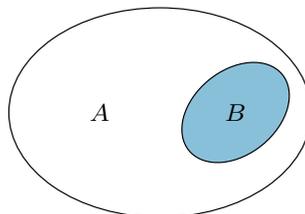
Wir verwenden zum Beweis einen Ringschluss und zeigen  $(1) \Rightarrow (2)$ ,  $(2) \Rightarrow (3)$  und  $(3) \Rightarrow (1)$ . Beachten Sie: Zeigen wir z. B.  $(2) \Rightarrow (3)$ , so darf die Voraussetzung  $(1)$  nicht mehr zum Beweis benutzt werden!

1. Sei  $B \subseteq A$ . Wir möchten zeigen, dass dann  $A \cup B = A$  ist. Zunächst einmal gilt immer, dass  $A \subseteq A \cup B$ , denn für alle  $x$  gilt:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $A \cup B \subseteq A$ , also dass jedes  $x$ , das in  $A \cup B$  enthalten ist, auch in  $A$  liegt. Für ein solches  $x$  gibt es dabei zwei Möglichkeiten:  $x \in A$  (dann sind wir fertig) oder  $x \in B$  – dann ist aufgrund der Voraussetzung  $B \subseteq A$ , aber gleichfalls  $x \in A$ .

2. Sei  $A \cup B = A$ , dann ist wegen der Adjunktivität der Mengenverknüpfungen  $A \cap B = (A \cup B) \cap B = B$ .
3. Sei  $A \cap B = B$ . Unter dieser Voraussetzung gilt: Ist  $x \in B$ , so ist  $x \in A \cap B$ , d. h.,  $x$  ist sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten. Damit gilt aber insbesondere auch  $x \in A$ . Da  $x \in B$  beliebig gewählt war, gilt dies für ein jedes solches  $x$  und wir haben  $B \subseteq A$ .



$B$  ist eine Teilmenge von  $A$ .

## Das Gegenbeispiel

### ► Definition

Ein Gegenbeispiel in der Mathematik ist ein Sachverhalt, der eine Aussage widerlegt, und ein Beispiel ein solcher, der eine Aussage bestätigt. ◀

### Erläuterung

Wir haben gewagt, „Beispiel“ zu definieren, was sicher nicht üblich ist. Wir hatten aber das Bestreben nach Vollständigkeit und es sollte wenigstens an einer Stelle bedacht werden, was eigentlich damit gemeint ist. Das Wort „bestätigt“ oben meint nicht, dass mit einem Beispiel ein Beweis geführt wird. Vielmehr wird in einem Beispiel gezeigt, dass ein Sachverhalt für eine gewissen Belegung (z. B. der Variablen  $x$  im Sachverhalt  $x^2 + 100 \geq x$ ) gültig ist.

Gegenbeispiele haben eine besondere Bedeutung. Ist nämlich ein solches für eine Aussage gefunden, brauchen wir uns um den Beweis nicht mehr zu kümmern.

Möchten wir eine Aussage der Form „Für alle  $x$  gilt, dass  $A(x)$ “ widerlegen, so können wir versuchen, ein  $x$  finden, für das Aussage  $A(x)$  falsch ist. Dies ist dann gerade ein Gegenbeispiel. Umgekehrt lässt sich eine Aussage dieser Form aber auch beweisen, indem gezeigt wird, dass kein Gegenbeispiel existieren kann.

### Beispiel

Wir möchten folgende Aussage widerlegen: „Jede Primzahl ist ungerade.“ Die Zahl 2 ist eine gerade Primzahl und damit ein Gegenbeispiel.

### Beispiel

Wir möchten folgende Aussage beweisen: „Jede Primzahl, die größer ist als 2, ist ungerade.“ Hierfür kann kein Gegenbeispiel gefunden werden, da jede gerade Zahl, die größer ist als 2, außer sich selbst auch 2 als Teiler haben muss, sodass diese nicht Primzahl sein kann.

## Vollständige Induktion

### ► Definition

Die vollständige Induktion ist durch folgende Schlussregel erklärt, die für ein beliebiges Prädikat  $A(\cdot)$  gilt, in das wir natürliche Zahlen einsetzen dürfen:

$$(A(0) \wedge \forall n(A(n) \rightarrow A(n+1))) \rightarrow \forall n A(n),$$

und ermöglicht den Beweis der Gültigkeit einer Aussage für die natürlichen Zahlen. ◀

### Erläuterung

Grundlegende Idee: Wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $A(n+1)$  aus  $A(n)$  folgt, dann gilt insbesondere  $A(1)$ , falls  $A(0)$  wahr ist. Damit gilt aber auch  $A(2)$ , da  $A(1)$  gilt usf. Die Beweismethode besteht damit aus zwei Teilen: dem Beweis von  $A(0)$  (Induktionsanfang) sowie  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  (Induktionsschritt). Der Induktionsanfang muss jedoch nicht unbedingt bei  $n = 0$  liegen. Gilt eine Aussage nur für alle  $n \geq k$  mit einem festen  $k > 0$ , so kann auch mit  $A(k)$  begonnen und  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  für alle  $n \geq k$  gezeigt werden.

### Beispiel

Für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $n \geq 1$  gilt  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Dazu nennen wir die Behauptung  $A(n)$ . Der Induktionsanfang ist offensichtlich die Behauptung für  $n = 1$ . Die linke Seite von  $A(1)$  besteht nur aus einem Summanden, nämlich 1. Die rechte Seite ergibt ebenfalls

$$\frac{1 \cdot (1 + 1)}{2} = 1.$$

Führen wir nun den Induktionsschritt durch, nehmen also an,  $A(n) \Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  sei wahr für eine beliebige, aber feste Zahl  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt durch Addition von  $n + 1$  auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Das ist aber gerade  $A(n+1)$ .

### Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n > 1$  gilt  $n^2 > n$ . Wir sehen wohl sofort, dass aus  $n > 1$  durch das Multiplizieren mit  $n$  auf beiden Seiten die Ungleichung  $n^2 > n$  folgt; wir verwenden dennoch vollständige Induktion zur Illustration dieses Beweisverfahrens in einem Beispiel, das für Studierende oft eine Hürde darstellt. Wir nennen die Behauptung  $A(n)$ . Der Induktionsanfang ist  $n = 2$ . Mit  $A(2)$  wird  $4 > 2$  behauptet, was wahr ist. Für den Induktionsschritt nehmen wir wieder an, dass  $A(n)$  wahr ist, dass also  $n^2 > n$  gilt. Schätzen wir nun

$(n + 1)^2$  mithilfe dieser Voraussetzung (nach unten) ab:

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &> n + 2n + 1 \\ &= (n + 1) + 2n \\ &> n + 1\end{aligned}$$

## Ausblick

Wir lernten kennen, was die wesentlichen Zutaten für das Aufschreiben und Betreiben von Mathematik sind. Dabei sahen wir an zahlreichen Beispielen, wie diese verwendet werden. Es wurde allerdings vergessen, was eventuell am wichtigsten ist. Denn was wäre ein Satz, wenn es keine Gedanken gäbe, die ihn bedeutend machen? Was ein Beweis, der mangels Kreativität (und teils dem Durchhaltewillen, um ihn zu finden) nie geführt wird? Und was eine Definition, die nichts von Bedeutung definiert? Bedenken Sie daher bitte, dass das Betreiben von Mathematik ein ernsthaftes (und oft kein leichtes) Gewerbe ist, aber dennoch ein freudvolles. Noch einen Hinweis zum sinnvollen Umgang mit Mathematik möchten wir Ihnen mitgeben. Sofern Ihnen etwa Neues begegnet, fragen Sie sich: *Was* bedeutet es, *warum* ist es so und *wie* geht es *weiter*? So werden Sie ergründen, *was* z. B. die Bedeutung hinter einem Satz ist, das *Warum* fordert Sie zum Verstehen oder Finden des Beweises auf und ein „*Wie* geht es *weiter*?“ bringt Sie zum Nachdenken darüber, ob der Satz eventuell verallgemeinerbar ist oder ob sich daraus weitere interessante Konsequenzen ergeben.

## Selbsttest

### I. Welche der folgenden Punkte stellen eine Definition dar?

- (1) Eine ungerade Primzahl ist von der Form  $4k \pm 1$  mit einer natürlichen Zahl  $k$ .
- (2) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite.
- (3) Der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate.
- (4) Eine natürliche Zahl ist genau dann prim, wenn sie größer ist als eins und allein durch sich selbst und durch eins teilbar ist.
- (5) Ein Parallelogramm ist ein konvexes Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.
- (6) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
- (7) Der Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r > 0$  beträgt  $2\pi r$ .
- (8) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch drei teilbar, wenn ihre Quersumme durch drei teilbar ist.
- (9) Eine Differenzialform der Stufe 2 heißt symplektisch, wenn sie geschlossen und nicht ausgeartet ist.

### II. Angenommen, Sie möchten die Aussage „Jeder blaue Zwerg mag Schokolade“ widerlegen. Welche der folgenden Behauptungen können Sie zu diesem Zweck zu beweisen versuchen?

- (1) Kein Zwerg mag Schokolade.
- (2) Kein Zwerg mag Schokolade, und es gibt einen Zwerg, der blau ist.
- (3) Kein Zwerg ist blau.
- (4) Kein Zwerg ist blau oder mag Schokolade.
- (5) Es gibt einen Zwerg, der nicht blau ist.
- (6) Es gibt einen Zwerg, der blau ist und keine Schokolade mag.
- (7) Es gibt einen Zwerg, der nicht blau ist und Schokolade mag.
- (8) Es gibt einen Zwerg, der nicht blau ist oder keine Schokolade mag.



# 3 Abbildungen

## Einblick

Bereits im Rahmen der Schulmathematik haben Sie Funktionsgraphen gezeichnet. Dabei wurde jedem Wert auf der  $y$ -Achse durch eine Funktion  $f$  ein Funktionswert  $y = f(x)$  zugeordnet. Es musste beachtet werden, dass nicht für jede Funktion jeglicher Wert  $x$  aus den reellen Zahlen einsetzbar ist, was z. B. anhand der Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ersichtlich ist, denn das Einsetzen der Null für  $x$  ist hier nicht gestattet. Wir müssen also beachten, wie der Bereich aussieht, für den eine Funktion überhaupt definiert ist.

Funktionen, aus der Schule bekannt, sind nur Spezialfälle sogenannter Abbildungen. Solche können besondere Eigenschaften haben, die z. B. auch vom Definitionsbereich abhängen; auch darüber werden wir etwas erfahren.

Ordnen wir jeder Zeit  $t$  die Position  $x(t)$  des Schwerpunktes eines geworfenen Balls zu, so haben wir es gleichfalls mit einer Abbildung zu tun. Wir sehen bereits an diesem einfachen Beispiel, dass Zuordnungen nicht nur im Rahmen der Mathematik selbst bedeutsam sind, sondern dass sich damit auch Abläufe in der Natur beschreiben lassen. Abbildungen in der Mathematik, die also Elemente einer Menge solche einer (nicht unbedingt) anderen Menge zuordnen, sind folglich teils nur die Abstraktion einer recht natürlichen Sache. In der Mathematik befassen wir uns aber nicht nur mit den Anwendungen, sondern auch damit, wie aus bekannten Abbildungen neue gemacht werden können. Dieser Abschnitt bietet wesentliche Grundlagen für folgende Kapitel, denn an vielen Stellen wird über Abbildungen und deren Eigenschaften zu sprechen sein.

## Grundlegendes zu Abbildungen

### ► Definition

Eine Abbildung  $f$  von einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  – wir schreiben  $f: A \rightarrow B$  – ordnet jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y \in B$  zu. Wir schreiben hierfür  $f(x) = y$  oder  $f: x \mapsto y$ .  $A$  heißt Definitionsbereich und  $B$  Wertebereich der Abbildung. Ist der Wertebereich (auch Zielmenge genannt) gleich  $B \subseteq \mathbb{R}$  oder  $B \subseteq \mathbb{C}$ , so sprechen wir von einer Funktion (auf  $A$ ). ◀

### Erläuterung

Der Begriff der Abbildung erscheint auf den ersten Blick abstrakt, es lässt sich jedoch leicht eine naturwissenschaftliche Bedeutung erkennen. Wir denken z. B. an eine Abbildung  $h$ , die einem Punktteilchen zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus einem Zeitintervall  $T$  (Definitionsbereich) die Höhe  $h(t)$  (im Wertebereich) zuordnet.

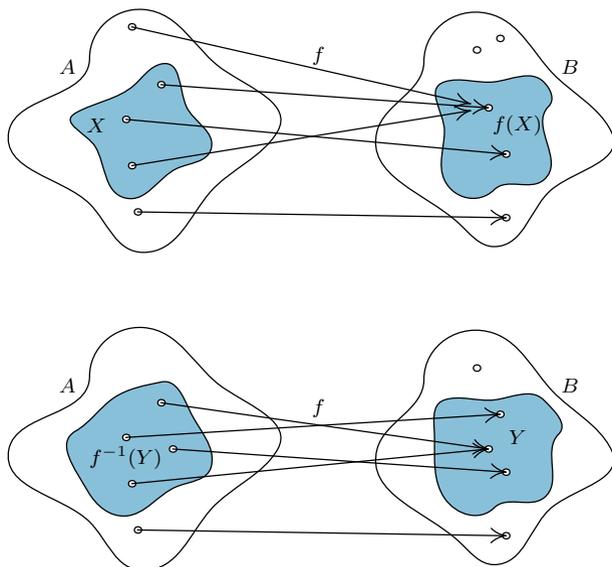
Es muss zwischen Funktion  $f$  und Funktionswert  $f(x)$  unterschieden werden, denn  $f(x)$  ist lediglich ein Wert, der erhalten wird, wenn die Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  ausgewertet wird. Wird  $f(x) = \dots$  geschrieben, so wird von der Funktionsvorschrift gesprochen. Analoges gilt bei allgemeineren Abbildungen.

### ► Definition

Seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung. Für Teilmengen  $X \subseteq A$  und  $Y \subseteq B$  definieren wir:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B, \\ f^{-1}(Y) &= \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A. \end{aligned}$$

$f(X)$  heißt Bildmenge von  $X$ ,  $f^{-1}(Y)$  Urbildmenge von  $Y$  (bezüglich  $f$ ). Für ein gegebenes  $y \in B$  heißt  $x \in A$  mit  $x \in f^{-1}(\{y\})$  Urbild von  $y$ . Besteht die gesamte Bildmenge von  $f: A \rightarrow B$  nur aus einem Element, d. h.  $f(A) = \{y\}$  für ein  $y \in B$ , heißt  $f$  konstant. ◀



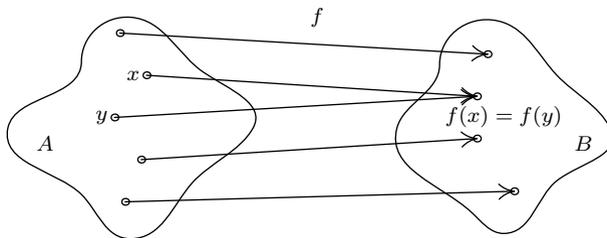
Bildmenge  $f(X)$  (oben) und Urbildmenge  $f^{-1}(Y)$  (unten)

# Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

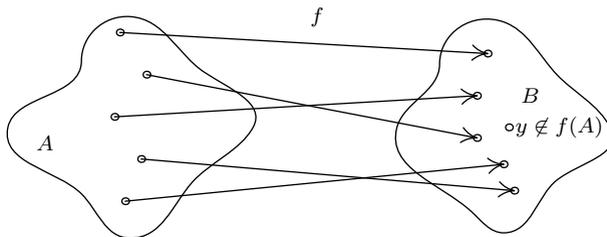
► **Definition**

Seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung;  $f$  heißt

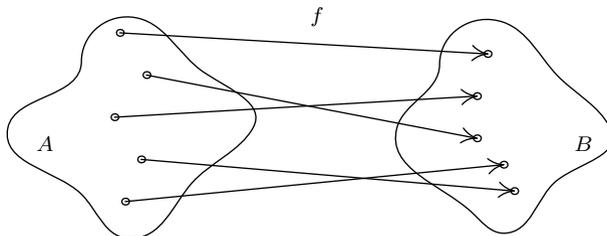
- surjektiv, wenn  $f(A) = B$ ,
- injektiv, wenn für alle  $x, y \in A$  mit  $x \neq y$  gilt:  $f(x) \neq f(y)$  (oder äquivalent dazu: Für alle  $x, y \in A$  mit  $f(x) = f(y)$  muss  $x = y$  gelten),
- bijektiv, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist. ◀



(a) Eine surjektive Abbildung, die nicht injektiv ist



(b) Eine injektive Abbildung, die nicht surjektiv ist



(c) Eine bijektive Abbildung

**Erläuterung**

Die definierten Begriffe charakterisieren Abbildungen wesentlich. So erreichen surjektive Abbildungen wirklich jedes Element des Wertebereichs und injektive Abbildungen bilden „im Definitionsbereich getrennte Elemente“ wieder auf „im

Wertebereich getrennte Elemente“ ab. Bei vorliegender Surjektivität kann es durchaus sein, dass ein Element durch das Abbilden mehrerer Elemente erreicht wird.

### Beispiel

Betrachten wir als Abbildung die Zuordnung aller Studierenden Ihrer Universität zu ihrer (a priori) beliebigen Matrikelnummer, so ist diese nicht surjektiv, da es sicher Nummern gibt, die noch nicht vergeben wurden. Die Umkehrabbildung (s. u.), die jeder vergebenen Matrikelnummer eine(n) Studierende(n) zuordnet, ist jedoch surjektiv, da jede(r) eine solche Nummer hat. Die Zuordnung aller Studierenden zu ihren Matrikelnummern ist injektiv, da keine zwei Studierenden dieselbe Matrikelnummer haben.

### Erläuterung

Für die Eigenschaft einer Abbildung, injektiv oder surjektiv zu sein, ist nicht nur die formale Zuordnungsvorschrift  $x \mapsto f(x)$  wichtig – Definitions- und Wertebereich sind gleichfalls von entscheidender Bedeutung.

### ► Definition

Seien  $A, B$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung, ferner  $X$  eine Teilmenge von  $A$ . Dann ist  $f|_X: X \rightarrow B$  die Abbildung mit

$$f|_X(x) = f(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Wir nennen  $f|_X$  die Einschränkung von  $f$  auf  $X$ . ◀

### Beispiel

Die Funktion

$$f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$$

ist injektiv, denn für alle  $x, y \in [0, 1]$  mit  $x \neq y$  gilt hier offensichtlich

$$f_1(x) = x \neq y = f_1(y).$$

Es ist allerdings  $f_1([0, 1]) = [0, 1] \neq \mathbb{R}$ , also ist  $f_1$  nicht surjektiv, damit auch nicht bijektiv.

### Beispiel

Die Funktion  $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  ist nicht injektiv, da beispielsweise

$$g_1(2) = 4 = g_1(-2).$$

Sie ist auch nicht surjektiv, da z. B.  $-1$  kein Urbild hat. Die Abbildung

$$g_2: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto x^2$$

ist jedoch bijektiv.

► **Definition**

Seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  eine injektive Abbildung. Die Abbildung

$$f^{-1}: B \supseteq f(A) \rightarrow A$$

mit

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

für alle  $y \in f(A)$  und  $x \in A$  heißt Umkehrabbildung oder Inverse von  $f$ . ◀

**Erläuterung**

Die Umkehrabbildung ist nicht zu verwechseln mit der Urbildmenge, obwohl dasselbe Symbol verwendet wird. Allerdings gilt natürlich für bijektive Abbildungen, dass  $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$ .

**Beispiel**

Die Umkehrfunktion von  $f_4: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $x \mapsto x^2$  ist die Quadratwurzel:

$$f_4^{-1}: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$$
,  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

## Die Komposition von Abbildungen

► **Definition**

Seien  $A$ ,  $B$ ,  $X$  und  $Y$  Mengen,  $f: A \rightarrow X$  und  $g: Y \rightarrow B$  Abbildungen mit  $f(A) \subseteq Y$ . Wir definieren die Komposition (Hintereinanderausführung, Verkettung) von  $f$  und  $g$  als die Abbildung

$$g \circ f: A \rightarrow B$$

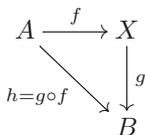
(lies: „ $g$  Kringel  $f$ “ oder „ $g$  nach  $f$ “) mit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

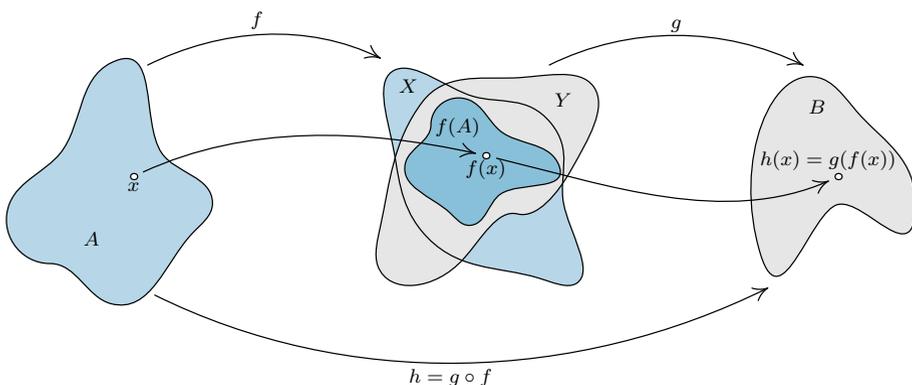
für alle  $x \in A$ . ◀

**Erläuterung**

Häufig wird es nötig sein, verschiedene Abbildungen zu verknüpfen, z. B. dann, wenn bereits verschiedene Abbildungen bekannt sind, wir jedoch auf „direktem Wege“ von einer Menge in eine andere abbilden möchten, wie im folgenden Diagramm zu sehen:



Die gesamte Definition lässt sich gut mit dem nächsten Bild erläutern:



Die Komposition von Abbildungen

### Beispiel

Seien die Abbildungen

$$f_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x^2$$

und

$$g_1: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

gegeben. Es gilt  $f_1([-1, 1]) = [0, 1] \subseteq [0, \infty[$ , sodass die Komposition von  $g_1$  nach  $f_1$  erklärt ist:

$$g_1 \circ f_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

### Beispiel

Für die Abbildungen

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2^x$$

und

$$g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 1$$

ist die Hintereinanderausführung in beide Richtungen möglich; das Ergebnis ist jedoch verschieden:

$$g_2 \circ f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 \cdot 2^x - 1$$

bzw.

$$f_2 \circ g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2^{3x-1} = \frac{1}{2} \cdot 8^x.$$

### Erläuterung

Wie wir am letzten Beispiel sahen, ist die Komposition von Abbildungen nicht kommutativ, d. h., im Allgemeinen gilt

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Sie ist jedoch assoziativ, d. h.  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ , sodass wir einfach  $h \circ g \circ f$  schreiben können. Gehen wir den Weg über mehrere Mengen

$$A \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} B,$$

so schreiben wir für die Komposition

$$f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1.$$

## Ausblick

Wir lernten Abbildungen und einige ihrer Eigenschaften kennen. Viele der Begriffe, wie z. B. Injektivität, klingen für Studierende zuerst oft sehr konstruiert. Dies vergeht mit der Übung und dem Gebrauch. Sie werden feststellen, dass die hier erlernten Begriffe immer wieder vorkommen, und sei es nur implizit. Abbildungen und ihre Eigenschaften – und dabei denken wir nicht nur an die hier behandelten – werden uns begleiten; wir können damit vieles erreichen, was auch in direktem Zusammenhang zur Beschreibung der Natur steht. So lernten Sie bereits in der Schule das Ableiten von Funktionen kennen, welches dann die Steigung der Tangente an einem bestimmten Punkt liefert. Und über diese Tangente können wir erkennen, wie sich die Funktion ändert, beispielsweise die Funktion, die einen physikalischen Vorgang beschreibt – z. B. die Bahn eines geworfenen Balles. Um die Ableitung einer Funktion aufschreiben zu können, muss diese differenzierbar sein. Dies ist dann eine der vielen weiteren Eigenschaften, die spezielle Abbildungen – hier Funktionen – haben können.

## Selbsttest

**I.** Seien  $A, B$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung. Für jede Menge  $M$  bezeichne  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , falls  $M$  endlich viele Elemente hat. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1)  $f$  ist genau dann injektiv, wenn für alle  $x, y \in A$  gilt:  $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ .
- (2)  $f$  ist genau dann injektiv, wenn für alle  $x, y \in A$  gilt:  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ .
- (3)  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn für alle  $y \in B$  gilt: Es gibt ein  $x \in A$ , sodass  $f(x) = y$ .
- (4)  $f$  ist genau dann injektiv, wenn es keine  $x, y \in A$  gibt, sodass  $f(x) = f(y)$  und  $x \neq y$ .
- (5)  $f$  ist surjektiv, wenn  $f$  nicht injektiv ist.
- (6)  $f$  ist injektiv, oder  $f$  ist surjektiv.
- (7)  $f$  ist nicht injektiv, wenn  $f$  nicht bijektiv ist.
- (8)  $f$  ist injektiv, wenn für alle  $x \in B$  gilt:  $|f^{-1}(\{x\})| \leq 1$ .
- (9)  $f$  ist surjektiv, wenn für alle  $x \in B$  gilt:  $|f^{-1}(\{x\})| \leq 1$ .
- (10)  $f$  ist genau dann bijektiv, wenn für alle  $x \in B$  gilt:  $|f^{-1}(\{x\})| = 1$ .
- (11)  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn für kein  $x \in B$  gilt:  $f^{-1}(\{x\}) = \emptyset$ .

**II.** Welche der folgenden Abbildungen sind bijektiv?

- (1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
- (2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$
- (3)  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = x^4$
- (4)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n$
- (5)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n^2$
- (6)  $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, f(n) = 1 - n$
- (7)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}, f(n) = n + 1$
- (8)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = -n$



# 4 Körper und komplexe Zahlen

## Einblick

Mit den reellen Zahlen haben Sie bereits intensive Erfahrungen in der Schule gemacht, und bereits im Buch fanden sich Beispiele für Zahlen, die gerade keine rationalen Zahlen sind, sodass es nötig war, diese zu den reellen Zahlen zu erweitern. Innerhalb der reellen Zahlen gibt es eine Struktur, denn so ist uns vertraut, nach welchen Regeln diese Zahlen z. B. addiert und multipliziert werden. In diesem Kapitel werden wir diese Struktur genauer betrachten und sehen, dass es sich um eine solche handelt, die auch auf andere Mengen sinnvoll anwendbar ist. Wir sprechen dann von Körpern. Dabei werden wir auch die reellen Zahlen auf eine besondere Weise erweitern, sodass wir die komplexen Zahlen erhalten.

Interessant ist, dass  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  durchaus nicht die einzigen Körper sind. Allerdings sind diese, durch ihre Erfolge in verschiedensten Anwendungen begründet, besonders wichtige Vertreter.

## Körper

### ► Definition

Eine Menge  $\mathbb{K}$  zusammen mit den Rechenoperationen

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (a, b) \mapsto a + b$$

und

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (a, b) \mapsto a \cdot b$$

heißt Körper, wenn die folgenden Punkte (Körperaxiome) erfüllt sind:

1. Assoziativität der Addition:

Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Kommutativität der Addition:

Für alle  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt

$$a + b = b + a.$$

3. Existenz des neutralen Elements der Addition:

Es gibt ein  $0 \in \mathbb{K}$ , sodass für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt:

$$a + 0 = a.$$

4. Existenz inverser Elemente der Addition:

Für alle  $a \in \mathbb{K}$  gibt es ein  $-a \in \mathbb{K}$ , sodass

$$a + (-a) = 0.$$

5. Assoziativität der Multiplikation:

Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

6. Kommutativität der Multiplikation:

Für alle  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7. Distributivität:

Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

8. Existenz des neutralen Elements der Multiplikation:

Es gibt ein  $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , sodass für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt:

$$a \cdot 1 = a.$$

9. Existenz inverser Elemente der Multiplikation:

Für alle  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  gibt es ein  $a^{-1} \in \mathbb{K}$ , sodass

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$



### Erläuterung

Ein Körper ist also gegeben als ein Tripel  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ; nur wenn keine Fehlinterpretationen möglich sind, schreibt man auch kurz  $\mathbb{K}$ . Wir definierten genau, wohin die Rechenoperationen abbilden, nämlich stets wieder nach  $\mathbb{K}$ ; wir kommen daher durch die Rechenoperationen nie aus  $\mathbb{K}$  heraus und sprechen von der Abgeschlossenheit des Körpers. Die Menge  $\mathbb{K}$  zusammen mit der Addition, also  $(\mathbb{K}, +)$ , bildet bei Erfüllung der Punkte 1. bis 4. eine sogenannte Abel'sche

Gruppe. Für „Abel’sch“ sagen wir auch „kommutativ“, wobei die Kommutativität gerade in 2. enthalten ist. Verzichten wir auf 2., so liegt lediglich eine sogenannte Gruppe vor.

Bitte beachten Sie, dass unsere Operationen  $+$  und  $\cdot$  keinesfalls die bereits aus frühen Bildungsphasen bekannten sein müssen; es handelt sich lediglich um Platzhalter für etwas, was wir uns ausdenken (oder in einer Klausur vorgesetzt bekommen). Die Übereinstimmung mit den uns so bekannten Symbolen kommt lediglich daher, dass diese sehr geläufige Bezeichnungen darstellen und es mit dem gewöhnlichen *Plus* und *Mal* als Struktur auf der Menge  $\mathbb{R}$  gerade klappt, mit der Eigenschaft einen Körper zu bilden.

### Beispiel

Die Mengen der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit den üblichen Rechenoperationen (Addition und Multiplikation) sind Körper; die Mengen der natürlichen und der ganzen Zahlen  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{Z}$  sind es hingegen nicht, denn es gibt in  $\mathbb{N}$  z.B. kein inverses Element der Addition für die 3 und in  $\mathbb{Z}$  kein inverses Element der Multiplikation für 15.

### Beispiel

Die aus der Schule bekannten Rechenregeln für reelle oder rationale Zahlen können alleine aus den Körperaxiomen erhalten werden. Beispielsweise haben wir für alle  $a, b \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} (ab)(a^{-1}b^{-1}) &= aba^{-1}b^{-1} \\ &= abb^{-1}a^{-1} \\ &= a \cdot 1 \cdot a^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich schließen:  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

### Beispiel

Die Menge  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + \sqrt{2}b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Q}\}$  ist zusammen mit den üblichen Rechenoperationen ein Körper: Zum einen ist die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation zu prüfen. Seien also  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Dann gilt

$$(a + \sqrt{2}b)(c + \sqrt{2}d) = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(bc + ad) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Wir zeigen außerdem die Existenz der multiplikativen Inversen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Zunächst einmal verschwindet  $a + \sqrt{2}b$  nur für  $a, b = 0$ , da sonst  $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$  eine rationale Zahl wäre. Insbesondere können wir die Inverse mit  $a - \sqrt{2}b$  erweitern,

um den Nenner rational zu machen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + \sqrt{2b}} &= \frac{a - \sqrt{2b}}{(a + \sqrt{2b}) \cdot (a - \sqrt{2b})} \\ &= \frac{a - \sqrt{2b}}{a^2 - 2b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \sqrt{2} \frac{(-b)}{a^2 - 2b^2} \end{aligned}$$

Das heißt,  $(a + \sqrt{2b})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Die übrigen Körperaxiome sind leicht zu überprüfen und folgen fast alle aus den Eigenschaften der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

### Erläuterung

Das letzte Beispiel zeigte einen recht „exotischen Körper“, wie er für theoretische Überlegungen durchaus interessant sein kann. Dadurch wird auch verdeutlicht, was alles in die Struktur des Körpers passen kann. Jedoch sind nun wirklich nicht alle Körper zur weit reichenden Verwendung geeignet. Aufgrund der Nützlichkeit der reellen Zahlen drängt sich jedoch die Frage auf, ob es Körper gibt, die im geeigneten Sinn eine Erweiterung der reellen Zahlen und damit eventuell noch nützlicher sind. Tatsächlich gibt es einen solchen Körper, und wir haben diesen bereits intuitiv gebraucht: den Körper der komplexen Zahlen. Wir werden diesen genauer betrachten und darlegen, wieso „ $i^2 = -1$ “ mit der richtigen Definition durchaus einen greifbaren Sinn ergibt.

## Die komplexen Zahlen

### ► Definition

Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind alle Paare  $(x, y)$  reeller Zahlen zusammen mit den Rechenoperationen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad \blacktriangleleft$$

### ■ Satz

$\mathbb{C}$  ist ein Körper.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen der Körperaxiome. Beispielsweise ist das neutrale Element der Multiplikation gegeben durch  $(1, 0)$ :

$$(x_1, y_1) \cdot (1, 0) = (x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 1) = (x_1, y_1) \quad \blacksquare$$

**Erläuterung**

Ferner gilt

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$$

und

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0).$$

Das heißt: Die komplexen Zahlen der Form  $(x, 0)$  verhalten sich mit der von uns definierten Multiplikation und Addition wie reelle Zahlen; wir müssen uns nur die „zweite Komponente wegdenken“. Darüber hinaus gilt

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0).$$

Insgesamt ist es gerechtfertigt, vermöge der Definition

$$i = (0, 1)$$

zu schreiben

$$(x, y) = x + iy,$$

sodass wir bei der üblichen Darstellung der komplexen Zahlen angelangt sind.

Der große Vorteil am Rechnen mit komplexen Zahlen ist natürlich, dass wir die Wurzel aus negativen Zahlen ziehen können, sodass auch Gleichungen wie z. B.

$$x^2 + 1 = 0$$

lösbar sind. In diesem Fall haben wir beispielsweise die Lösungen  $x_1 = i$  und  $x_2 = -i$ .

Da  $\mathbb{C}$  ebenso wie  $\mathbb{R}$  ein Körper ist, gelten für komplexe Zahlen dieselben Regeln für den Umgang mit den Grundrechenarten Multiplikation, Division, Addition und Subtraktion. Bei der unbekümmerten Verallgemeinerung weiterer für die reellen Zahlen bekannter Rechenoperationen ist jedoch Vorsicht geboten:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1 \neq 1 = \sqrt{(-1) \cdot (-1)}$$

**► Definition**

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  eine komplexe Zahl. Wir definieren:

1. Die konjugiert komplexe Zahl von  $z$  ist gegeben durch:  $\bar{z} = x - iy$ .
2. Der Betrag von  $z$  ist gegeben durch:  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
3. Real- und Imaginärteil von  $z$  sind gegeben durch  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x$  bzw.  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = y$ . ◀

**Erläuterung**

Wir merken uns, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sowohl Real- als auch Imaginärteil gleich sind.

**■ Satz**

Seien  $u, v \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $ u \cdot v  =  u  \cdot  v $                    | 4. $\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = 1/\bar{v}$ |
| 2. $\overline{(u \cdot v)} = \bar{u} \cdot \bar{v}$ | 5. $\overline{(-v)} = -\bar{v}$                      |
| 3. $\overline{(u + v)} = \bar{u} + \bar{v}$         | 6. $\overline{(\bar{v})} = v$                        |

**Beweis:** Wir zeigen beispielhaft die ersten beiden Eigenschaften. Eigenschaft (1) folgt direkt aus (2), da

$$|uv| = \sqrt{uv\bar{v}\bar{u}} = \sqrt{u\bar{u}v\bar{v}} = \sqrt{u\bar{u}}\sqrt{v\bar{v}} = |u||v|.$$

Wir haben also noch (2) zu beweisen. Seien  $u = x + iy$  und  $v = s + it$  mit  $x, y, s, t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= \overline{(x + iy)(s + it)} \\ &= \overline{xs - yt + i(ys + xt)} \\ &= xs - yt - i(ys + xt) \\ &= (x - iy)(s - it) \\ &= \bar{u}\bar{v} \end{aligned}$$

**Beispiel**

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen können Sie also die komplexe Konjugation mit anderen grundlegenden Rechenoperationen vertauschen, z. B. gilt mit beliebigem  $w \in \mathbb{C}$ :

$$\overline{\left(\frac{w - i}{\bar{w} + i}\right)} = \frac{\bar{w} - \bar{i}}{(\bar{w}) + \bar{i}} = \frac{\bar{w} + i}{w - i}$$

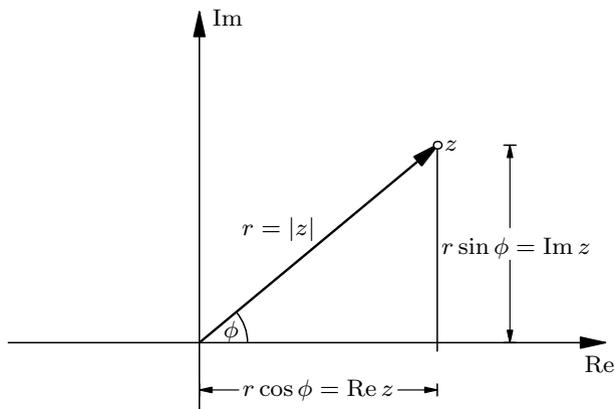
**Erläuterung**

Davon abgesehen, dass wir komplexe Zahlen auch multiplizieren können, sind diese zunächst einmal Elemente von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und können daher als Punkte in der Ebene veranschaulicht werden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von der Gauß'schen Zahlenebene. Die reellen Zahlen liegen in diesem Bild auf der  $x$ -Achse.

Für komplexe Zahlen gibt es neben der kartesischen Darstellung  $z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$  auch die sogenannte trigonometrische Darstellung (welche auch Polarkoordinatendarstellung genannt wird): Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$  existieren eindeutig bestimmte  $r \in ]0, \infty[$  und  $\phi \in [0, 2\pi[$  mit

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi),$$

siehe folgende Abbildung:



Trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl

Bei gegebener kartesischer Darstellung können wir die trigonometrische Darstellung konkret berechnen:

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ \tan \phi &= \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \end{aligned}$$

Die obige Bedingung für den Winkel  $\phi$  legt diesen noch nicht eindeutig fest. Es muss weiterhin überlegt werden, in welchem Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene die komplexe Zahl liegt.

### Beispiel

Für die komplexe Zahl  $z = -\sqrt{3} - i$  gilt

$$r = |z| = 2$$

und

$$\tan \phi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da  $\operatorname{Re}(z) < 0$  und  $\operatorname{Im}(z) < 0$ , liegt  $z$  im dritten Quadranten, sodass wir  $\phi = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$  haben. Die trigonometrische Darstellung lautet also

$$z = 2 \left( \cos \left( \frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{6} \right) \right).$$

**Beispiel**

Den Quotienten zweier komplexer Zahlen können wir durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners immer in kartesische Form bringen:

$$\begin{aligned} \frac{2-3i}{3+i} &= \frac{(2-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{6-2i-9i-3}{9+1} \\ &= \frac{3-11i}{10} \\ &= \frac{3}{10} - \frac{11}{10}i \end{aligned}$$

**Erläuterung**

Wenn wir zu einer komplexen Zahl  $z$  eine komplexe Zahl  $a$  addieren, so kann dies in der Gauß'schen Zahlenebene als eine Verschiebung  $z \mapsto z + a$  gedeutet werden.

Es gilt die sogenannte Euler-Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

deren Nachweis wir an einer späteren Stelle liefern, die wir hier allerdings bereits in gutem Glauben verwenden wollen. Mit ihr ist für komplexe Zahlen eine nützliche Schreibweise verbunden, nämlich

$$z = re^{i\varphi}.$$

Jede der Darstellungen über komplexe Zahlen hat Vor- und Nachteile, und abhängig davon, was gerade betrachtet wird, ist die eine oder die andere Notation sinnvoll. Die Multiplikation komplexer Zahlen ist beispielsweise in Polarkoordinaten recht einfach und ermöglicht eine anschauliche Interpretation:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

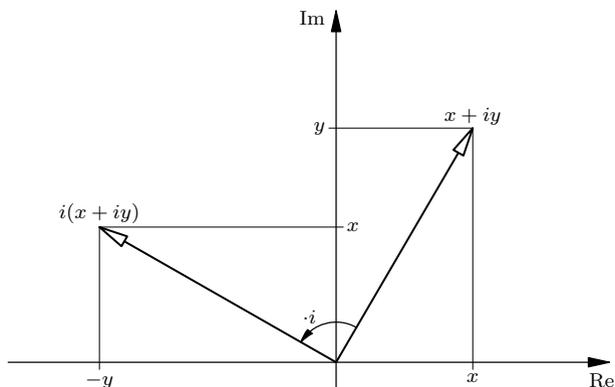
Wir sehen, dass sich die Beträge multiplizieren und die Winkel addieren. Ferner sehen wir sogleich:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

**Beispiel**

Die Multiplikation mit der Zahl  $i$  entspricht einer Drehung um  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  in der Gauß'schen Zahlenebene:

$$i(x + iy) = ix - y$$



Wir dürfen uns also z. B. die Gleichung  $i^2 = -1$  so vorstellen, dass die Zahl  $i$  (auf der imaginären Achse) durch Multiplikation mit sich selbst in den Punkt  $-1$  auf der reellen Achse gedreht wird.

## Ausblick

Schon zum Start der linearen Algebra werden wir Körper verwenden. Gewöhnlich werden tatsächlich nur  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  benötigt, jedoch befasst sich unter anderem die Algebra oder auch die sogenannte Kodierungstheorie durchaus mit anderen Körpern.

Es kann gezeigt werden, dass  $\mathbb{C}$  der einzige Körper ist, der eine echte Körpererweiterung von  $\mathbb{R}$  darstellt. Es gibt jedoch auch noch die sogenannten Quaternionen  $\mathbb{H}$ , welche im Wesentlichen der  $\mathbb{R}^4$  mit geeigneter Multiplikation sind. Diese sind jedoch nicht mehr kommutativ bezüglich der Multiplikation und bilden keinen Körper mehr, sondern einen sogenannten Schiefkörper. In der Physik lassen sich dann Quaternionen bei der quantenmechanischen Beschreibung von Elementarteilchen mit einem besonderen Drehimpuls verwenden (z. B. Elektronen). Es hat sich jedoch gezeigt, dass hier eine Darstellung mit Matrizen meist weniger aufwendig ist, die im weiteren Verlauf des Buches noch Thema sein werden.

## Selbsttest

**I.** Sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper mit neutralem Element der Multiplikation 1 und neutralem Element der Addition 0. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Für alle  $a \in \mathbb{K}$  gibt es ein  $b \in \mathbb{K}$ , sodass  $a + b = 0$ .
- (2) Es gibt ein  $b \in \mathbb{K}$ , sodass für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt:  $a + b = 0$ .
- (3) Für alle  $a \in \mathbb{K}$  gibt es ein  $b \in \mathbb{K}$ , sodass  $a \cdot b = 1$ .
- (4) Es gibt ein  $b \in \mathbb{K}$ , sodass für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt:  $a \cdot b = 1$ .
- (5) Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt  $(a + c) \cdot b = a \cdot c + b \cdot c$ .
- (6) Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt  $(a + c) \cdot b = a \cdot b + b \cdot c$ .
- (7) Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt  $(a \cdot c) + b = a \cdot b + c \cdot b$ .

**II.** Welche der folgenden Aussagen sind für alle  $z \in \mathbb{C}$  wahr?

- |  |   |
|--|---|
| (1) $ z  = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ | (10) $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$     |
| (2) $z^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$        | (11) $z = 0 \Leftrightarrow  z  = 0$                      |
| (3) $ z  = \sqrt{z\bar{z}}$  | (12) $ z^2  =  z ^2$                                      |
| (4) $ z  = \operatorname{Re}(z)$                                   | (13) $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Im}(z)$       |
| (5) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$                 | (14) $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = \operatorname{Im}(z)$ |
| (6) $\operatorname{Im}(iz) = -\operatorname{Re}(z)$                | (15) $ z  =  \bar{z} $                                    |
| (7) $z^2 = (\bar{z})^2$  | (16) $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$                |
| (8) $\operatorname{Re}(7 + 13i) = 7$                               | (17) $2\operatorname{Im}(z) = z - \bar{z}$                |
| (9) $\operatorname{Im}(7 + 13i) = 13i$                             |   |

# Aufgaben zu den mathematischen Grundlagen

**I.** Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Aussagen. Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden Tautologien gelten:

$$(1) A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(2) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

**II.** Widerlegen Sie durch Auffinden eines Gegenbeispiels die folgende Aussage: „Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist das Resultat der Rechnung  $n^2 - n + 41$  eine Primzahl.“

**III.** Beweisen Sie durch eine direkte Herleitung die folgende Aussage: „Ist eine natürliche Zahl  $n$  durch die natürliche Zahl  $p$  mit  $p \geq 1$  teilbar, so ist auch das Quadrat von  $n$  durch  $p$  teilbar.“

**IV.** Beweisen Sie indirekt, also durch Herleiten eines Widerspruchs, dass es unter allen positiven rationalen Zahlen keine kleinste geben kann.

**V.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**VI.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$  die sogenannte Bernoulli'sche Ungleichung gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**VII.** Seien  $A, B, C$  Mengen, und seien  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn  $f$  und  $g$  injektiv sind, dann ist  $g \circ f$  injektiv.

(2) Wenn  $f$  und  $g$  surjektiv sind, dann ist  $g \circ f$  surjektiv.

(3) Wenn  $g \circ f$  injektiv ist, dann ist  $f$  injektiv.

(4) Wenn  $g \circ f$  surjektiv ist, dann ist  $g$  surjektiv.

**VIII.** Sei  $M$  eine Menge. Eine Paarung bzw. Relation  $x \sim y$  von Elementen  $x, y \in M$  wird eine Äquivalenzrelation genannt, wenn für alle  $x, y, z \in M$  die folgenden Regeln gelten:

- (a)  $x \sim x$  (Reflexivität),
- (b)  $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$  (Symmetrie),
- (c)  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$  (Transitivität).

Ein Beispiel aus der Alltagssprache:  $x \sim y :\Leftrightarrow x$  hat denselben Geburtstag wie  $y$ , wobei  $x, y$  Studierende sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Paarungen Äquivalenzrelationen sind:

- (1)  $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ , wobei  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $x \sim y :\Leftrightarrow x - y$  ist ohne Rest durch 3 teilbar, wobei  $x, y \in \mathbb{Z}$ . (Hinweis:  $z \in \mathbb{Z}$  ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $z = 3k$  gibt.)

**IX.** Sei  $M$  eine Menge. Die Menge  $P(M) := \{U \mid U \subseteq M\}$  heißt die Potenzmenge von  $M$ . Beweisen Sie: Es kann keine surjektive Abbildung  $f: M \rightarrow P(M)$  geben.

Dies zeigt in gewissem Sinne, dass die Potenzmenge immer mehr Elemente enthält als die Menge selbst, auch bei Mengen mit unendlich vielen Elementen. (Hinweis: Untersuchen Sie die Menge  $U := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$  und leiten Sie einen Widerspruch her.)

**X.** Sei  $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ . Finden Sie Rechenoperationen  $+$  und  $\cdot$ , sodass  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper mit neutralem Element der Addition 0 und neutralem Element der Multiplikation 1 ist.

**XI.** Verwenden Sie die für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  gültige Euler-Formel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , um die sogenannten Additionstheoreme zu beweisen:

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**XII.** Sei  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  die obere komplexe Halbebene, und sei die Abbildung

$$f: H \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass  $f(H) = D$  gilt, wobei  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe ist. (Hinweis: Sie können für die Umkehrfunktion von  $f$  eine explizite Bildungsvorschrift berechnen.)

Teil II

Lineare Algebra



# 5 Vektorräume

## Einblick

Die lineare Algebra wird benötigt, um eine Vielzahl von Problemen und interessanten Objekten in der Mathematik zu behandeln. Hierzu gehören u. a.

- lineare Gleichungssysteme und lineare Abbildungen,
- Determinanten,
- Eigenwerte und Eigenvektoren,
- Skalarprodukte und Normen,
- und vieles mehr.

Diese Begriffe wirken abstrakt, hinter ihnen verbergen sich aber viele praktische Dinge, wie das Messen von Längen und Winkeln – über Norm und Skalarprodukt – oder die Berechnung von Volumina – dies über die Determinante. Für all diese Dinge benötigen wir erneut Mengen mit einer bestimmten Struktur – in der linearen Algebra sind dies die sogenannten Vektorräume, mit denen wir uns in diesem Abschnitt befassen.

Sehr konkret und anwendungsbezogen wird es, wenn wir uns den Begriff des Vektors in der Physik in Erinnerung rufen. Hier geht es nämlich um eine gerichtete Größe: So hat eine angestoßene Kugel beim Billard eine Richtung, in die sie sich mit einer Geschwindigkeit bewegt. Leider bleibt es nicht immer so anschaulich, dafür jedoch immer exakt.

## Grundlegendes zu Vektorräumen

### ► Definition

Im Folgenden steht  $\mathbb{K}$  entweder für die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation. Die Elemente aus  $\mathbb{K}$  heißen Skalare.

### Erläuterung

Wenn wir „ $\mathbb{K}$ “ schreiben, legen wir uns also nicht fest, ob wir reelle oder komplexe Skalare betrachten. Für viele theoretische Überlegungen ist dies auch nicht

von Bedeutung, da es dann wirklich keine Rolle spielt. In der Praxis allerdings ist die Entscheidung darüber, was wir für  $\mathbb{K}$  wählen, teilweise sehr bedeutend, denn was sollte „Der Brunnen hat eine Tiefe von  $2 + 7i$  Metern“ heißen?

Grundsätzlich lässt sich sagen, dass die lineare Algebra für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  gleichermaßen „funktioniert“. Dies ist darin begründet, dass sowohl  $\mathbb{C}$  als auch  $\mathbb{R}$  Körper sind.

### ► Definition

Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist eine Menge  $V$  zusammen mit den Rechenoperationen

$$+ : V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto x + y$$

und

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x,$$

wenn die folgenden Punkte (Vektorraumaxiome) erfüllt sind:

1. Assoziativität der Vektoraddition:

Für alle  $x, y, z \in V$  gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

2. Existenz des Nullvektors und inverser Elemente:

Es gibt ein  $0 \in V$ , sodass für alle  $x \in V$  gilt:

$$x + 0 = x.$$

Für alle  $x \in V$  gibt es ein  $(-x) \in V$ , sodass

$$x + (-x) = 0.$$

3. Kommutativität der Addition:

Für alle  $x, y \in V$  gilt

$$x + y = y + x.$$

4. Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren:

Für alle  $x \in V$  und Skalare  $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$  gilt

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x.$$

5. Distributivität:

Für alle  $x, y \in V$  und Skalare  $\mu, \lambda$  gilt

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

und

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$$

6. Für alle  $x \in V$  gilt

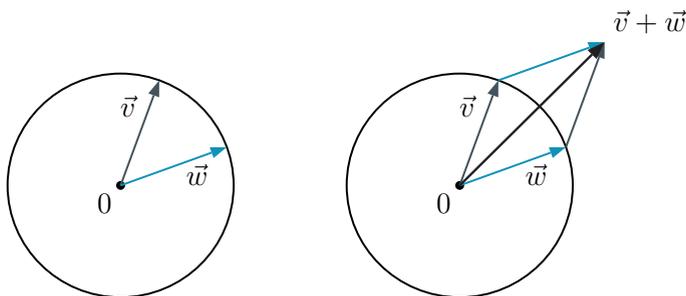
$$1 \cdot x = x.$$



**Erläuterung**

Ein Vektorraum kann als Quadrupel kompakt benannt werden:  $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ ; einige Autoren verwenden auch  $(V, +, \cdot)$  und behalten  $\mathbb{K}$  einfach im Hinterkopf. Bei nicht bestehender Fehldeutungsgefahr wird auch einfach nur  $V$  geschrieben; dies ist nicht exakt, hat sich allerdings aus Gründen der Kürze eingeschlichen.

Wesentlich bei obiger Definition ist, dass die Operationen nicht aus der Menge führen, also wirklich die Abgeschlossenheit gilt, was dadurch garantiert ist, dass wir aus der Definition wissen, wohin genau die Rechenoperationen „+“ und „ $\cdot$ “ abbilden, nämlich nach  $V$ . Etwas wie im folgenden Bild wollen wir gerade nicht:



Unter dem „Plus“ bzw. „Mal“ verstehen wir hier, wie zuvor auch beim Körper, allgemein nicht mehr die Rechenoperationen, welche für reelle Zahlen bekannt sind. Ähnlichkeiten sind kein Zufall, jedoch müssen die Rechenoperationen nachfolgend stets erst definiert werden. Bis dahin sind die verwendeten Symbole einfach Platzhalter, die konkretisiert werden müssen.

Die Elemente eines Vektorraums werden auch Vektoren genannt. Bitte denken Sie dabei jedoch nicht ausschließlich an „Pfeile“, wie es in der Schule gemacht wurde – so können Vektoren nämlich auch Funktionen sein, wie noch gezeigt wird.

Wir können die Definition auch anders angehen, denn ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist eine Abel'sche Gruppe  $(V, +)$ , auf der zusätzlich eine Multiplikation mit Skalaren definiert ist. Beschränken wir uns nämlich oben ausschließlich auf die Eigenschaften bezüglich der Addition, dann haben wir eine Menge  $V$  zusammen mit der Operation „+“ und den geforderten Eigenschaften, wobei die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition auch erfüllt sein muss.

Statt  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bzw.  $\mathbb{C}$ -Vektorraum sagen wir auch reeller bzw. komplexer Vektorraum. Wenn es offensichtlich oder unerheblich ist, ob  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , sprechen wir meist einfach von einem Vektorraum.

Obwohl die Vektoraddition und die Multiplikation mit Skalaren im Allgemeinen ganz andere Rechenoperationen darstellen als die Addition und Multiplikation von Skalaren untereinander, werden in den meisten Fällen dieselben Formelzeichen „+“ und „ $\cdot$ “ verwendet. Gleiches gilt auch für den Nullvektor, der wie die gewöhnliche Zahl 0 bezeichnet wird. Wenn keine Missverständnisse möglich sind, wird der „Mal-Punkt“ auch weggelassen:  $\lambda x = \lambda \cdot x$ . Wir schreiben ferner statt  $x + (-y)$  auch wie gewohnt  $x - y$ .

### Beispiel

Bereits mit den Kenntnissen aus der Schule sehen wir sofort, dass die reellen Zahlen, zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation, einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bilden. Bitte gehen Sie die Kriterien dafür im Kopf durch.

Bedenken Sie ferner, dass z. B. die Menge der positiven reellen Zahlen  $\mathbb{R}^+ = ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}$  zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation aufgrund fehlender Abgeschlossenheit kein Vektorraum ist. Tatsächlich landen wir nämlich durch bestimmte Operationen (z. B. durch  $(-5) \cdot 3 = -15$ ) im Bereich der negativen reellen Zahlen, gelangen also aus  $\mathbb{R}^+$  heraus.

### Erläuterung

Im letzten Beispiel sind die Vektoren und Skalare nicht zu unterscheiden, denn aus  $\mathbb{R}$  wird gerade ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum gemacht. Dies ist aber wirklich ein Sonderfall. Allgemein sind natürlich die Skalare und die Elemente eines Vektorraums verschieden.

Es ist bei der Beantwortung der Frage „Liegt ein Vektorraum vor oder nicht?“ stets das gleiche Verfahren: Eine Menge wird zusammen mit den darauf definierten Operationen gegeben und die Anforderungen der obigen Definition werden überprüft. Ist auch nur einer der Punkte nicht erfüllt, dann liegt kein Vektorraum vor; es gibt also keine Art von „Fast-Vektorräumen“.

### ■ Satz

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Vektoraddition  $+$  und Multiplikation mit Skalaren  $\cdot$ . Dann gilt:

1. Es gibt nur einen Nullvektor.
2. Für alle Vektoren  $x$  gibt es nur ein inverses Element  $-x$ .
3. Für alle Vektoren  $x$  gilt  $0 \cdot x = 0$  und  $(-1) \cdot x = -x$ .
4. Für alle Skalare  $\lambda$  und Vektoren  $x$  gilt  $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$ .
5. Sei  $x$  ein Vektor und  $\lambda$  ein Skalar. Es gilt  $\lambda \cdot x = 0$  genau dann, wenn  $\lambda = 0$  oder  $x = 0$ .

**Beweis:** 1. Sei neben dem Nullvektor  $0$  ein weiterer Vektor  $0'$  gegeben, sodass für alle Vektoren  $x$  gilt:  $x = x + 0'$ . Dann muss aber gelten:

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

(Hier sehen wir insbesondere, dass  $-0 = 0$ .)

2. Sei  $x$  ein Vektor. Angenommen, es gibt neben  $(-x)$  einen weiteren Vektor  $x' \in V$ , sodass  $x + x' = 0$ . Dann gilt

$$-x + x + x' = -x + (x + x') = -x + 0 = -x$$

und andererseits aber auch

$$-x + x + x' = (-x + x) + x' = 0 + x' = x' + 0 = x',$$

also  $-x = x'$ .

3. Zunächst gilt für alle  $x \in V$ :

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

Das kann aber nur sein, wenn  $0 \cdot x$  der Nullvektor ist. Weiterhin ist

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Das kann aber nur sein, wenn  $(-1) \cdot x$  der zu  $x$  inverse Vektor ist.

4. Es gilt

$$(-\lambda) \cdot x = (\lambda \cdot (-1)) \cdot x = \lambda \cdot ((-1) \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$$

und

$$(-\lambda) \cdot x = ((-1) \cdot \lambda) \cdot x = (-1) \cdot (\lambda \cdot x) = -(\lambda \cdot x).$$

5. Wir haben bereits gezeigt, dass  $0 \cdot x = 0$ . Nun beweisen wir  $\lambda \cdot 0 = 0$ :

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + (-0)) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot (-0) = \lambda \cdot 0 + (-\lambda) \cdot 0 = (\lambda + (-\lambda)) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

Seien nun  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $x \in V$  mit  $\lambda \neq 0$  und  $x \neq 0$ . Dann gilt  $x + x \neq 0$  (wegen der Eindeutigkeit des Nullvektors), und da  $\lambda \neq 0$ , dürfen wir schreiben:

$$\lambda^{-1} \lambda \cdot x + \lambda^{-1} \lambda \cdot x = 2\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) \neq 0$$

Wäre  $\lambda \cdot x = 0$ , dann würde dies zu einem Widerspruch führen, da  $2\lambda^{-1} \neq 0$  gilt. ■

**Erläuterung**

Viele der gerade gezeigten Punkte gelten als selbstverständlich. Dennoch muss uns klar sein, dass in der Mathematik stets die Frage nach dem „Warum“ bedeutend ist, wenn auch tatsächlich ab einer gewissen Stufe viele Dinge Folklore sind (also als bekannt vorausgesetzt werden können).

**Beispiel**

Sei  $V = \mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$  die Menge aller positiven reellen Zahlen. Dann ist  $V$  zusammen mit den Rechenoperationen

$$x \oplus y = x \cdot y$$

und

$$\lambda \odot x = x^\lambda$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}^+$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Seien  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  und  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen die Vektorraumaxiome:

1. Assoziativität der Vektoraddition:

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (x \oplus y) \oplus z$$

2. Existenz des Nullvektors und inverser Elemente:

In diesem Vektorraum ist 1 der Nullvektor:

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$$

Die inversen Elemente bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation sind die inversen Elemente von  $\mathbb{R}^+$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum:

$$x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$$

3. Kommutativität der Vektoraddition:

$$x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$$

4. Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren:

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot x$$

5. Distributivität:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = x^\lambda \oplus y^\lambda = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$$

und

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda \cdot x^\mu = x^\lambda \oplus x^\mu = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x.$$

6.  $1 \odot x = x^1 = x$

Die Abgeschlossenheit ist ebenfalls gegeben:

$$\lambda \odot x = x^\lambda \in \mathbb{R}^+, \quad x \oplus y = x \cdot y \in \mathbb{R}^+$$

**Erläuterung**

Wie Sie sehen, müssen in einem beliebigen Vektorraum „ $\oplus$ “ und „ $\odot$ “ nicht unbedingt etwas mit der altbekannten Addition und Multiplikation von Zahlen zu tun haben, das ist die tiefere Bedeutung des letzten Beispiels.

► **Definition**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $\mathbb{K}^n$  als die Menge aller Spaltenvektoren der Gestalt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten (Einträgen, Koordinaten)  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ .

$\mathbb{K}^{n*}$  ist entsprechend definiert als die Menge aller Zeilenvektoren von der Form

$$x = (x_1, \dots, x_n). \quad \blacktriangleleft$$

**Erläuterung**

Die obigen Mengen werden wir sogleich zu – sehr wichtigen – Vektorräumen machen, vorher allerdings noch Folgendes: Bei manchen Anwendungen ist es unerheblich, ob von Spalten- oder Zeilenvektoren gesprochen wird. Wir schreiben dann auch Spaltenvektoren in Zeilenform, d. h., wir „identifizieren“  $\mathbb{K}^n$  mit  $\mathbb{K}^{n*}$  und schreiben beispielsweise  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Abgesehen von der Anordnung in vertikaler bzw. horizontaler Form sind  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}^{n*}$  nämlich einfach  $n$ -Tupel reeller bzw. komplexer Zahlen. Im Fall von  $n = 0$  besteht  $\mathbb{K}^n$  insbesondere nur aus dem leeren Tupel:  $\mathbb{K}^0 = \mathbb{K}^{0*} = \{(\quad)\}$ .

■ **Satz**

$\mathbb{K}^n$  ist zusammen mit der komponentenweise definierten Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und der komponentenweise definierten Multiplikation mit Skalaren

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Der Nullvektor in  $\mathbb{K}^n$  ist gegeben durch

$$0 = \left. \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} n\text{-mal.}$$

Für  $\mathbb{K}^{n*}$  gilt Entsprechendes.

**Beweis:** Für den Beweis sind die Vektorraumaxiome zu überprüfen. Diese ergeben sich ganz natürlich aus den Eigenschaften der gewöhnlichen Addition und Multiplikation reeller bzw. komplexer Zahlen.

Im Falle von  $n = 0$  enthält  $\mathbb{K}^n$  nur das leere Tupel, besteht also nur aus einem Element: dem Nullvektor. ■

### Erläuterung

Vektoren aus  $\mathbb{K}^n$  werden gelegentlich mit einem Vektorpfeil,  $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ , gekennzeichnet oder auch fett gedruckt. In der Mathematik ist es allerdings üblich, dies nicht zu machen. Es muss nämlich stets aus dem Zusammenhang bzw. den Voraussetzungen klar sein, um welche Objekte es sich handelt.

### Beispiel

Sei  $C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  die Menge aller Funktionen auf  $\mathbb{R}$  und seien mit beliebigen  $f, g \in C(\mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  die folgenden Rechenoperationen definiert, sodass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda \odot f)(x) &= \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

Für die Addition  $\oplus$  und die Multiplikation  $\odot$  sind die Vektorraumaxiome 1–6 erfüllt, da diese auf selbige in  $\mathbb{R}$  zurückgeführt werden können – und  $\mathbb{R}$  ist ein Vektorraum.

Die Abgeschlossenheit ist ebenfalls erfüllt, denn  $\lambda \odot f$  ordnet jedem  $x \in \mathbb{R}$  die Zahl  $\lambda \cdot f(x) \in \mathbb{R}$  zu, und  $f \oplus g$  ordnet jedem  $x \in \mathbb{R}$  die Zahl  $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$  zu. Also sind  $\lambda \odot f$  und  $f \oplus g$  wieder Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Daher ist  $(C(\mathbb{R}), \oplus, \odot)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

### Erläuterung

Wir haben bei diesem Beispiel zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen Vektorraumoperationen und Rechenoperationen im Raum der Skalare verschiedene Symbole verwendet. Gewöhnlich wird aber auch hier für die Vektorraumoperationen einfach „+“ und „·“ geschrieben.

## Ausblick

Die volle Bedeutung des Begriffs „Vektorraum“ kann hier sicher noch nicht er-messen werden. Jedoch wird sich zeigen, dass dieser wirklich von großer Trag-weite ist. So werden noch diverse Vektorräume zum Gegenstand weiterer Un-tersuchungen, wie z. B. der sogenannte Raum der stetig differenzierbaren Funk-tionen.

In der Physik wird sehr oft mit Vektoren gearbeitet, es wird dann von gerichteten Größen gesprochen (im Gegensatz zu Skalaren), die dann wieder Elemente eines entsprechenden Vektorraums sind.

## Selbsttest

**I.** Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Welche der folgenden Gleichungen sind für alle  $x, y, z \in V$  definiert und korrekt?

(1)  $42 \cdot (x + y + z) = 42 \cdot x + 42 \cdot y + 42 \cdot z$

(2)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(3)  $x \cdot y = y \cdot x$

(4)  $2 \cdot x = x + x$

(5)  $2 + x = x + 2$

(6)  $x + (-2) \cdot z = x + (-2 \cdot z)$

(7)  $(2 \cdot z)^2 = 4 \cdot z^2$

**II.** Welche der folgenden Mengen mit Rechenoperationen sind  $\mathbb{R}$ -Vektorräume?

(1)  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x + y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \odot x = \lambda x$  für alle  $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

(2)  $(]0, \infty[, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x + y$  für alle  $x, y \in ]0, \infty[$  und  $\lambda \odot x = \lambda x$  für alle  $x \in ]0, \infty[, \lambda \in \mathbb{R}$

(3)  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x + y$  für alle  $x, y \in \mathbb{Z}$  und  $\lambda \odot x = \lambda x$  für alle  $x \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}$

(4)  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x + y$  für alle  $x, y \in \mathbb{Z}$  und  $\lambda \odot x = \lambda x$  für alle  $x \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}$

(5)  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x \cdot y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \odot x = \lambda + x$  für alle  $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

(6)  $(]0, \infty[, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x \cdot y$  für alle  $x, y \in ]0, \infty[$  und  $\lambda \odot x = x^\lambda$  für alle  $x \in ]0, \infty[, \lambda \in \mathbb{R}$

(7)  $([0, \infty[, \oplus, \odot)$  mit  $x \oplus y = x \cdot y$  für alle  $x, y \in [0, \infty[$  und  $\lambda \odot x = x^\lambda$  für alle  $x \in [0, \infty[, \lambda \in \mathbb{R}$



# 6 Basen und Untervektorräume

## Einblick

Betrachten wir eine Menge, die zusammen mit gewissen Operationen einen Vektorraum bildet. Es ist dann natürlich zu untersuchen, ob es Teilmengen gibt, die mit diesen Operationen auch die Eigenschaften eines Vektorraums haben, ob es also „Teilräume“ gibt. Diese gibt es, aber wie erkennen wir sie? Weiterhin ergibt sich aus dem zuvor Behandelten die Frage, ob wir wirklich stets alle Vektoren eines Vektorraums kennen müssen, um diesen selbst zu kennen. Oder genügt eventuell sogar eine endliche Anzahl von Vektoren, aus denen sich der gesamte Vektorraum ergibt? Wenn ja, wie geht das? Dies sind die wesentlichen Fragen, die nachstehend behandelt werden.

## Spann und Erzeugendensystem

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Ein Vektor  $v \in V$  heißt **Linearkombination** einer Anzahl von Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ , falls Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  existieren, sodass

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k.$$

Wir sagen auch:  $v$  lässt sich aus den Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k$  linear kombinieren. Die in der Linearkombination vorkommenden Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  heißen **Koeffizienten**. ◀

### Erläuterung

Im Zusammenhang mit obiger Definition wird auch gesagt, dass  $v$  von  $v_1, \dots, v_k$  linear abhängig ist.

Wir haben hier das große Sigma  $\Sigma$  als sogenanntes Summenzeichen eingeführt. Allgemein legen wir formal für eine Anzahl von „summierbaren Objekten“  $c_k, c_{k+1}, \dots, c_n$  fest:

$$\sum_{l=k}^n c_l = c_k + c_{k+1} + \dots + c_n.$$

Der sogenannte Summationsindex  $l$  kann dabei beliebig benannt werden:

$$\sum_{l=k}^n c_l = \sum_{\alpha=k}^n c_\alpha.$$

Beispielsweise ist

$$\sum_{l=3}^6 l^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86.$$

Mit „einer Anzahl von Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in V$ “ ist das Tupel  $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$  gemeint. Wir wollen also bei dieser Sprechweise eine Reihenfolge festlegen und zulassen, dass zwei der Vektoren identisch sind.

### Beispiel

Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann gilt:

Der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist eine Linearkombination von

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt nämlich:

$$v = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2.$$

In diesem Fall haben wir als Koeffizienten

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Der Spann (oder die lineare Hülle) einer Anzahl von Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  ist wie folgt definiert:

$$\text{Span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \left\{ v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Der Spann einer Anzahl von Vektoren besteht also aus allen Linearkombinationen dieser Vektoren.

**Beispiel**

Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann gilt:

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ v = \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

**► Definition**

Eine Anzahl von Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  heißt Erzeugendensystem von  $V$ , wenn gilt:

$$\text{Span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\} = V \quad \blacktriangleleft$$

**Erläuterung**

Eine Anzahl von Vektoren bildet also ein Erzeugendensystem von  $V$ , wenn sich jeder Vektor in  $V$  aus diesen linear kombinieren lässt.

**Lineare Unabhängigkeit, Basis****► Definition**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Anzahl von Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  heißt linear abhängig, wenn es Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  gibt, von denen mindestens einer von null verschieden ist (also  $\neq 0$ ), sodass gilt:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$$

Ansonsten heißen die Vektoren linear unabhängig. ◀

**Erläuterung**

Die Linearkombination einer gegebenen Anzahl von Vektoren, bei der alle Koeffizienten verschwinden, d. h.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \text{ mit } \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0,$$

heißt auch die triviale Darstellung des Nullvektors. Diese Darstellung gibt es offensichtlich immer. Lineare Abhängigkeit bedeutet also, dass eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors existiert.

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind genau dann linear abhängig, wenn es einen Skalar  $\lambda \neq 0$  gibt, sodass  $v_1 = \lambda v_2$ , d. h.,  $v_1$  und  $v_2$

sind Vielfache voneinander bzw.  $v_1$  und  $v_2$  sind parallel. Machen Sie sich das bitte dadurch klar, indem Sie  $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$  für den Fall  $k = 2$  betrachten und das Ergebnis dann nach  $v_1$  auflösen.

Ist einer der Vektoren der Nullvektor – z. B.  $v_1$  –, sind sie in jedem Fall linear abhängig, da dann  $1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 0$  eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors ist.

Ist eine Anzahl von Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  linear abhängig, so können wir immer einen dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen. Gilt nämlich

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$$

mit einem von null verschiedenen Koeffizienten, beispielsweise  $\lambda_1$ , dann können wir wie folgt nach  $v_1$  auflösen:

$$v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^k \lambda_i v_i$$

Ist umgekehrt einer der Vektoren (z. B.  $v_1$ ) eine Linearkombination der anderen, also

$$v_1 = \sum_{i=2}^k \lambda_i v_i,$$

so sind  $v_1, \dots, v_k$  linear abhängig, da wir dann den Nullvektor aus diesen Vektoren linear kombinieren können, ohne dass alle Koeffizienten verschwinden:

$$v_1 - \sum_{i=2}^k \lambda_i v_i = v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_k v_k = 0$$

Lineare Unabhängigkeit von  $v_1, v_2, \dots, v_k$  bedeutet hingegen, dass ausschließlich die triviale Darstellung des Nullvektors möglich ist:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

### ► Definition

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$  heißt Basis von  $V$ ; die Anzahl der Basiselemente heißt Dimension von  $V$ . Wir schreiben für die Dimension auch kurz  $\dim V$ . ◀

**Erläuterung**

Es lässt sich zeigen, dass jeder Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem eine Basis hat, und dass alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen besitzen, obige Definition ist also sinnvoll.

Jede Basis ist ein Erzeugendensystem, aber nicht jedes Erzeugendensystem eine Basis. Wir erkennen nämlich sofort, dass eine Basis ein Erzeugendensystem ist, in dem es keine „überflüssigen“ Vektoren (im Hinblick auf das Aufspannen des betrachteten Vektorraums) gibt.

Dem Vektorraum, der nur den Nullvektor enthält, wird die Dimension null zugeordnet. Seine Basis enthält keine Elemente.

Achtung: Sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird, werden wir nachstehend ausschließlich Vektorräume mit endlicher Dimension betrachten ( $\dim V < \infty$ ).

**Beispiel**

Das Tripel der Spaltenvektoren

$$B_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  und es gilt  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ; hingegen ist

$$B_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

zwar ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$ , aber keine Basis.

**► Definition**

Die sogenannte Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  besteht aus den  $n$  Vektoren

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei jeweils die  $i$ -te Stelle gleich 1 ist ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). ◀

**Beispiel**

Sei  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2:

$$\{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Die Polynome

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2$$

bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ , denn alle  $p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  haben die Gestalt

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i(x)$$

(es ist sozusagen  $a = \lambda_3$ ,  $b = \lambda_2$  und  $c = \lambda_1$ ). Tatsächlich bilden sie sogar eine Basis, was aus dem Vergleich der Koeffizienten klar wird:

$$\forall x (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Somit gilt  $\dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = 3$ . Eine andere mögliche Basis wäre z. B.:

$$\tilde{p}_1(x) = 5, \quad \tilde{p}_2(x) = x - 5, \quad \tilde{p}_3(x) = x^2$$

**Beispiel**

Sei  $V = \mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$  zusammen mit den Rechenoperationen

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{und} \quad \lambda \odot x = x^\lambda$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}^+$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  wieder der uns bereits bekannte  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann ist z. B.  $10 \in \mathbb{R}^+$  eine Basis, da jede positive reelle Zahl  $x$  dargestellt werden kann als  $x = \lambda \odot 10 = 10^\lambda$  mit einem geeigneten  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Um bei gegebenem  $x$  ein solches  $\lambda$  zu finden, setzen wir einfach  $\lambda = \log x$ , wobei „log“ den Logarithmus zur Basis 10 bezeichnet.) Wie Sie sehen, ist  $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  also ein Vektorraum der Dimension eins.

## Eindeutigkeit der Basisdarstellung, Untervektorräume

### ■ Satz

Bilden die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$ , dann existieren zu jedem Vektor  $v \in V$  eindeutig bestimmbare Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

**Beweis:** Da die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  ein Erzeugendensystem sind, gibt es Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , sodass

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Angenommen, es gibt weiterhin  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  mit

$$v = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i,$$

dann haben wir

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i.$$

Da die  $v_i$  linear unabhängig sind, folgt daraus, dass für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $\lambda_i - \mu_i = 0$ , d. h.

$$\mu_i = \lambda_i. \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Haben wir also eine Basis von  $V$  gegeben, dann können wir jeden Vektor in  $V$  aus den Basisvektoren in eindeutiger Weise linear kombinieren.

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U$  eine Teilmenge von  $V$ . Wir nennen  $U$  einen Untervektorraum oder Teilraum von  $V$ , falls für alle  $x, y \in U$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

1.  $U \neq \emptyset$
2.  $x + y \in U$
3.  $\lambda x \in U$

### Erläuterung

Ein Untervektorraum eines Vektorraums  $V$  ist mit denselben Rechenoperationen, die auf  $V$  definiert sind, selbst wieder ein Vektorraum. Wir können zur Beantwortung der Frage „Teilraum oder nicht?“ natürlich einfach nur die Teilmenge  $U$  zusammen mit den Operationen betrachten und alle Anforderungen an einen Vektorraum überprüfen. Das ist aber nicht nötig, denn da  $V$  ein Vektorraum ist, „vererben“ sich ohnehin dessen Eigenschaften bezüglich des Rechnens mit Vektoren. Also bleiben nur die oben genannten Eigenschaften der letzten Definition zu prüfen.

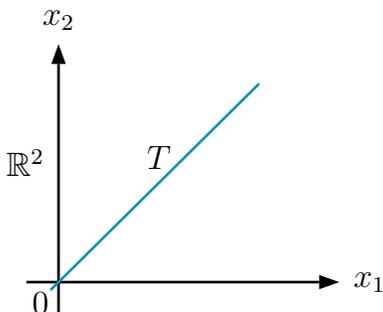
Ein Untervektorraum  $U$  muss nach 3. in obiger Definition notwendigerweise den Nullvektor enthalten, da mit beliebigem  $x \in U$  auch  $0 \cdot x = 0 \in U$  gilt. Ist dies nicht der Fall, kann es sich bei  $U$  nicht um einen Untervektorraum handeln, was einen brauchbaren „Schnelltest“ liefert (aber wirklich nur für den Ausschluss; als Beweis dafür, dass ein Teilraum gegeben ist, genügt dies natürlich nicht).

**Beispiel**

Die Menge

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\}$$

ist ein Teilraum von  $\mathbb{R}^2$ ; wir betrachten dabei auch die folgende Skizze.

**Beispiel**

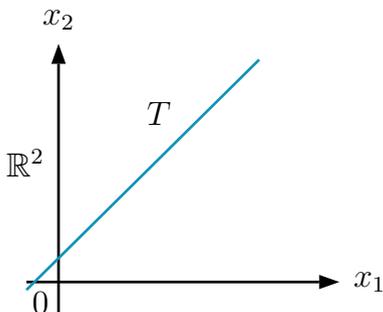
Für jeden Vektorraum  $V$  mit Nullvektor  $0$  gilt:  $\{0\}$  und  $V$  sind Untervektorräume von  $V$ .

**Beispiel**

Der Spann einer Anzahl von Vektoren ist immer ein Untervektorraum.

**Beispiel**

Die hier skizzierte Menge  $T$  liefert uns keinen Teilraum von  $\mathbb{R}^2$ , da die Null nicht in  $T$  enthalten ist:

**Beispiel**

Für den bereits in einem Beispiel zuvor betrachteten Vektorraum aller Funktionen  $C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  lässt sich eine Reihe von wichtigen Teilräumen angeben, z. B. der Raum aller stetigen Funktionen oder auch der Raum aller reellen Polynome.

## Ausblick

Wir lernten hier, dass das Finden einer Basis Vorteile bringt, denn durch sie erhalten wir (über das Bilden von Linearkombinationen) jedes beliebige Element in einem Vektorraum, und die Anzahl der Vektoren in der Basis liefert uns  $\dim V$ . Daher werden wir auch später immer wieder versuchen, eine Basis anzugeben, um uns die weitere Arbeit zu erleichtern. Wir werden sogar noch ganz spezielle Basen suchen, die zusätzliche Vorteile bringen.

Teilräumen werden wir in verschiedensten Gestalten begegnen, besonders wichtige behandeln wir bereits im nächsten Kapitel. Gut ist dabei, dass wir diese bereits sehr leicht identifizieren können. Wir erinnern uns daran, dass Teilräume Mengen mit besonderer Struktur sind, die gewisse Eigenschaften von dem sie jeweils enthaltenden Vektorraum „erben“. Auch in anderen mathematischen Teildisziplinen findet sich dieses Konzept der Vererbung wieder, das daher gemerkt werden sollte.

## Selbsttest

**I.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit der Dimension  $n > 1$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Jede Basis von  $V$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ .
- (2) Jedes Erzeugendensystem von  $V$  ist eine Basis von  $V$ .
- (3) Es gibt genau  $n$  verschiedene Basen von  $V$ .
- (4) Wenn eine Anzahl von  $n - 1$  Vektoren aus  $V$  gegeben ist, so sind diese linear abhängig.
- (5) Wenn eine Anzahl von  $n$  Vektoren aus  $V$  gegeben ist, so sind diese linear unabhängig.
- (6) Wenn eine Anzahl von  $n + 1$  Vektoren aus  $V$  gegeben ist, so sind diese linear abhängig.
- (7)  $V$  ist ein Teilraum von  $V$ .
- (8) Wenn eine Anzahl von linear abhängigen Vektoren aus  $V$  gegeben ist, so kann der erste dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen dargestellt werden.

**II.** Welche der folgenden Tupel von Vektoren sind eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ ?

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ | (3) $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ |
| (2) $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ | (4) $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$                              |

**III.** Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$ ?

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = 0 \right\}$ | (5) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$ |
| (2) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$        | (6) $\mathbb{R}^2$  |
| (3) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \right\}$        | (7) $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$              |
| (4) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0 \right\}$      | (8) $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$                         |



# 7 Lineare Abbildungen und Dimensionssätze

## Einblick

Über Abbildungen und einige ihrer Eigenschaften haben wir bereits etwas gelernt. In diesem Abschnitt kommen wir zu einer grundlegenden Eigenschaft von Abbildungen zwischen Vektorräumen, die für die gesamte lineare Algebra bedeutsam ist, diese gewissermaßen prägt: die sogenannte Linearität. Erstaunlich ist, dass sich dieser Begriff an vielen Stellen findet, auch an solchen, die auf den ersten Blick nicht im Zusammenhang mit der linearen Algebra stehen. So entspricht das in der Schule behandelte Ableiten von Funktionen einer linearen Abbildung. Sind nämlich zwei Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, die ableitbar sind, und ist  $a \in \mathbb{R}$ , so gilt:  $(f + g)' = f' + g'$  und  $(a \cdot f)' = a \cdot f'$ . Und diese Eigenschaft der Ableitung ist charakteristisch für die Linearität.

Ferner gibt es spezielle Vektorräume, die mit linearen Abbildungen direkt in Verbindung stehen, nämlich den sogenannten Kern und das sogenannte Bild einer linearen Abbildung, über deren Dimension wir interessante Aussagen machen werden. Diese Begriffe werden später erneut wichtig sein, z. B. im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen.

## Definition und Beispiele linearer Abbildungen

### ► Definition

Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $L: V \rightarrow W$  heißt linear, falls für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

1.  $L(x + y) = L(x) + L(y)$
2.  $L(\lambda x) = \lambda L(x)$

### Beispiel

Sei  $D$  mit  $D(f) = \frac{df}{dx}$  die Abbildung, die jeder differenzierbaren (ableitbaren) Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ihre Ableitung  $\frac{df}{dx}$  zuordnet. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$D(f + g)(x) = \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x) = D(f)(x) + D(g)(x)$$

und

$$D(\lambda f)(x) = \frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda \frac{df}{dx}(x) = \lambda D(f)(x),$$

wobei  $f, g$  beliebige differenzierbare Funktionen sind und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein beliebiger Skalar. Die Abbildung  $D$  ist also linear. Beachten Sie: Der Funktion  $f$  wird durch  $D$  ihre Ableitungsfunktion zugeordnet, die mit  $D(f)$  bezeichnet wird. In diese Ableitungsfunktion können Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  eingesetzt werden – heraus kommt dabei der (vielleicht etwas seltsam anmutende) Ausdruck  $D(f)(x)$ .

### Erläuterung

Dies ist die ausführliche Variante dessen, was wir in der Einleitung bereits behandelt haben. Wir sehen sofort, dass das Ableiten in der Form von „ $(\cdot)$ “ mit einer Abbildung – nämlich  $D$  – assoziiert ist, die sich als lineare Abbildung präsentiert.

### Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Dann gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2, \text{ aber} \\ f(x) + f(y) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Also gilt im Allgemeinen  $f(x) + f(y) \neq f(x+y)$  (z. B. für  $x = 1, y = 1$ ), sodass  $f$  keine lineare Funktion ist.

### Erläuterung

Sie sehen an diesem Beispiel sofort, dass Linearität keinesfalls etwas ist, was die „Einfachheit“ von Abbildungen charakterisiert. So ist  $f(x) = x^2$  durchaus einfach, dennoch nicht linear.

### Beispiel

Sei wieder  $V = \mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller positiven reellen Zahlen, also  $V$  zusammen mit den Rechenoperationen

$$x \oplus y = x \cdot y \text{ und } \lambda \odot x = x^\lambda$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^+$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist der (natürliche) Logarithmus

$$\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

aufgrund bekannter Rechenregeln eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \ln(x \oplus y) &= \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \ln(\lambda \odot x) &= \ln(x^\lambda) = \lambda \ln x \end{aligned}$$

**Erläuterung**

Das obige Beispiel zeigt deutlich, welche einigermaßen erstaunlichen Konstruktionen möglich sind, die zu linearen Abbildungen führen.

Die „Wirkung“ linearer Abbildungen wird oft „multiplikativ“ geschrieben, d. h., für eine lineare Abbildung  $L$  und einen Vektor  $v$  schreiben wir häufig  $Lv$  statt  $L(v)$ . Dies wird sich später als durchaus passend herausstellen, wenn wir mit sogenannten Matrizen arbeiten.

**Kern und Bild linearer Abbildungen**► **Definition**

Seien  $V, W$  Vektorräume und  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Wir definieren Kern und Bild von  $L$ :

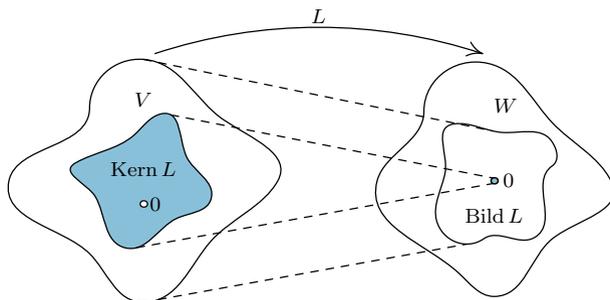
$$\text{Kern } L = \{v \in V \mid Lv = 0\} \subseteq V$$

$$\text{Bild } L = L(V) = \{Lv \mid v \in V\} \subseteq W$$

Der Kern wird auch Nullraum genannt. ◀

**Erläuterung**

In der folgenden Skizze haben wir wesentliche Punkte zum Verständnis aufgeführt. Natürlich sind  $V$  und  $W$  dort keine wirklichen Bilder für Vektorräume und z. B. kann Kern  $L$  auch gleich dem ganzen Vektorraum  $V$  sein. Dennoch sollten wir uns merken, wo jeweils Kern  $L$  und Bild  $L$  zu finden sind. Ferner ist in Kern  $L$  und Bild  $L$  jeweils der entsprechende Nullvektor enthalten; beide sind selbst Vektorräume, nämlich Untervektorräume von  $V$  bzw.  $W$ , was wir gleich noch beweisen.

■ **Satz**

Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume. Dann gilt für jede lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$ :

$$L(0) = 0$$

**Beweis:** Sei  $x \in V$  beliebig. Dann gilt:

$$L(0) = L(0 \cdot x) = 0 \cdot L(x) = 0 \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

In der Gleichung  $L(0) = 0$  steht „0“ auf der linken Seite für den Nullvektor in  $V$ , während „0“ auf der rechten Seite für den Nullvektor in  $W$  steht.

### ■ Satz

Kern und Bild einer linearen Abbildung sind Untervektorräume.

**Beweis:** Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Seien außerdem  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Kern und Bild von  $L$  sind nicht leer, denn es gilt  $L(0) = 0$ . Ferner gilt:

1. Sind  $x, y \in \text{Kern } L$ , also  $Lx = 0$  und  $Ly = 0$ , so haben wir auch  $L(x+y) = Lx + Ly = 0 + 0 = 0$  und  $L(\lambda x) = \lambda Lx = \lambda \cdot 0 = 0$ .
2. Für Vektoren in Bild  $L$  gilt:  $Lx + Ly = L(x+y)$  und  $\lambda Lx = L(\lambda x)$ . ■

### Beispiel

Für die lineare Abbildung

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\text{Kern } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\text{Bild } L = \left\{ (x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

### Beispiel

Wir betrachten nochmals die Ableitung  $D = \frac{d}{dx}$  als lineare Abbildung. Sei  $C^1(\mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die differenzierbar sind und deren Ableitung stetig ist, und sei  $C^0(\mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die stetig sind. Dann gilt für  $D: C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ :

$$\text{Kern } D = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist konstant} \}$$

### Erläuterung

Das letzte Beispiel greift in Teilen voraus. Bitte gehen Sie daher entspannt mit den neuen Begriffen um, und konzentrieren sich einfach auf den Inhalt bezüglich des Kerns. Wie wir noch in der Analysis sehen werden, gibt es zu jeder stetigen Funktion  $f$  eine differenzierbare Funktion  $F$  (eine sogenannte Stammfunktion), sodass  $\frac{dF}{dx} = f$  ist. Damit ergibt sich dann

$$\text{Bild } D = C^0(\mathbb{R}).$$

Wir bemerken weiterhin, dass  $C^0(\mathbb{R})$  und  $C^1(\mathbb{R})$  keine Vektorräume von endlicher Dimension sind.

## Dimensionssätze

### ■ Satz

Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume und sei  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim V = \dim(\text{Bild } L) + \dim(\text{Kern } L)$$

**Beweis:** Wir liefern nur die Beweisidee. Sei durch  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  gegeben. Wir betrachten nur Basiselemente, da alle anderen Vektoren aus diesen eindeutig darstellbar sind. Für  $v_i \neq v_j$  gilt, dass  $v_i$  und  $v_j$  linear unabhängig sind. Was passiert aber mit  $L(v_i)$  und  $L(v_j)$ ? In  $V$  tragen  $v_i$  und  $v_j$  jeweils mit „1“ zur Dimension bei. Sind  $L(v_i)$  und  $L(v_j)$  linear unabhängig, tun sie dies weiterhin, tragen also zu  $\dim(\text{Bild } L)$  mit jeweils „1“ bei. Sind nun aber  $L(v_i)$  und  $L(v_j)$  nicht linear unabhängig, dann tragen sie aber mit „1“ oder „2“ zu  $\dim(\text{Kern } L)$  bei. Oder anders: Wir können in einer geeigneten Basis wie folgt argumentieren: Wenn ein Basisvektor im Kern ist, ist sein Bild 0, trägt also nichts zur Dimension des Bildes bei. Wenn ein Basisvektor nicht im Kern ist, trägt er natürlich nichts zum Kern bei, aber dafür zur Dimension des Bildes. ■

### ► Definition

Für Untervektorräume  $U_1, U_2$  sei definiert:

$$U_1 + U_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\} \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Die Menge  $U_1 + U_2$  ist wieder ein Untervektorraum; dies ist recht leicht zu zeigen, bitte versuchen Sie es. Gleiches gilt für die Menge  $U_1 \cap U_2$ , falls  $U_1$  und

$U_2$  Untervektorräume sind:

$$\begin{aligned} x, y \in U_1 \cap U_2 &\Leftrightarrow x, y \in U_1 \wedge x, y \in U_2 \\ &\Rightarrow x + y \in U_1 \wedge x + y \in U_2 \\ &\Rightarrow x + y \in U_1 \cap U_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{K} \wedge x \in U_1 \cap U_2 &\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{K} \wedge x \in U_1 \wedge x \in U_2 \\ &\Rightarrow \lambda x \in U_1 \wedge \lambda x \in U_2 \\ &\Rightarrow \lambda x \in U_1 \cap U_2. \end{aligned}$$

Ferner ist  $0 \in U_1 \cap U_2$ , sodass  $U_1 \cap U_2$  nicht leer ist.

Beachten Sie: Auch wenn  $U_1$  und  $U_2$  Untervektorräume sind, so ist  $U_1 \cup U_2$  im Allgemeinen kein Untervektorraum.

### ■ Satz

Seien  $U_1, U_2$  Untervektorräume des Vektorraums  $V$ . Dann gilt:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

**Beweis:** Der Beweis ist etwas umfangreicher, wir liefern lediglich die Beweisidee: Sei  $k = \dim U_1$ ,  $l = \dim U_2$ ,  $m = \dim(U_1 \cap U_2)$  und  $n = \dim(U_1 + U_2)$ . Wir wählen eine Basis  $(v_1, \dots, v_m)$  von  $U_1 \cap U_2$ . Es ist möglich, diese zu Basen  $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_k)$  von  $U_1$  bzw.  $(v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_l)$  von  $U_2$  zu ergänzen. Es stellt sich ferner heraus, dass

$$(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_k, w_{m+1}, \dots, w_l)$$

eine Basis von  $U_1 + U_2$  ist. Damit haben wir dann  $n = m + (k - m) + (l - m) \Leftrightarrow k + l = n + m$ . ■

### Beispiel

Wir betrachten im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  die  $x$ - und  $y$ -Achse als Untervektorräume  $U_1$  und  $U_2$ . Beide haben die Dimension eins, ihr Schnitt ist der Nullvektor, der – als Untervektorraum betrachtet – die Dimension null hat. Hier gilt dann  $\dim U_1 + \dim U_2 = 1 + 1 = \dim(U_1 + U_2) = \dim V$ .

## Ausblick

Wir haben diverse Beispiele für lineare Abbildungen gesehen, auch solche von großer Bedeutung, wie es z. B. bei der Ableitung der Fall ist. Auch bei der Integration wird sich Linearität erneut finden lassen und im zweiten Band werden

wir auch den Zusammenhang zu sogenannten Differenzialgleichungen behandeln. Es ist uns klar, dass dies an dieser Stelle zu weit führt, denn die Differenzialgleichungen sind noch Klänge aus einer fernen Welt. Dennoch ist es schön, auch an dieser Stelle zu erkennen, dass die Mathematik als Gebäude verstanden werden kann, in dem wir uns in höheren Etagen durch das Wissen über die unteren besser orientieren können. So sollte nichts vergessen werden, denn mit großer Wahrscheinlichkeit begegnen uns die meisten Begriffe immer wieder, derjenige der Linearität sogar in den Naturwissenschaften.

Der Kern einer linearen Abbildung wird uns als der Lösungsraum homogener linearer Gleichungssysteme begegnen. Die Dimensionssätze sind für unsere Belange eher theoretischer Natur und dabei eher für Beweiszwecke dienlich.

## Selbsttest

**I.** Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen? (Definitions- und Wertebereich seien mit den üblichen Rechenoperationen versehen.)

- |     |   |      |  |
|-----|---|------|--|
| (1) | $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(x) = 2x$                           | (10) | $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1$ |
| (2) | $L: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, L(x) = 2x$                               | (11) | $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$          |
| (3) | $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(x) = 2$                            | (12) | $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$          |
| (4) | $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(x) = 0$                            |      |  |
| (5) | $L: \mathbb{R} \rightarrow \{0\}, L(x) = 0$                                 |      |  |
| (6) | $L: C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), L(f)(x) = x^2 f(x)$            |      |  |
| (7) | $L: C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), L(f)(x) = (f(x))^2$            |      |  |
| (8) | $L: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \mapsto 1$ |      |  |
| (9) | $L: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \mapsto c$ |      |  |

**II.** Seien  $V, W$  Vektorräume und  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. (Die Nullvektoren in  $V$  bzw.  $W$  seien beide mit  $0$  bezeichnet.) Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Kern  $L$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .
- (2) Kern  $L$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- (3)  $W \setminus \text{Bild } L$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .
- (4) Kern  $L \cap \text{Bild } L$  ist ein Untervektorraum von  $V$  oder  $W$ .
- (5)  $L(0) = 0$
- (6)  $\dim(\text{Bild } L) = \dim V - \dim(\text{Kern } L)$
- (7)  $\dim W - \dim(\text{Bild } L) = \dim(\text{Kern } L)$
- (8) Kern  $L = L(\{0\})$
- (9) Bild  $L = L(V)$
- (10) Kern  $L = L^{-1}(\{0\})$
- (11) Für alle  $x, y \in V$  gilt  $L(x - y) = L(x) - L(y)$ .
- (12) Für alle  $x \in V$  gilt  $L(x^2) = L(x)^2$ .
- (13) Für alle  $x \in V$  gilt  $L(2x) = 2L(x)$ .



# 8 Matrizen

## Einblick

Sogenannte Matrizen lernen wir zuerst als simple Schemata kennen. Dies ist übersichtlich und z. B. bei linearen Gleichungssystemen hilfreich. Allerdings werden wir weitere nützliche Dinge sehen, denn Matrizen sind direkt mit den zuvor behandelten linearen Abbildungen verbunden, und jede solche Abbildung lässt sich – bezüglich fest gewählter Basen – eindeutig als ein solches Schema mit festen Einträgen darstellen.

## Grundlegendes zu Matrizen

### ► Definition

Eine Matrix  $A$  ist ein rechteckiges Zahlenschema mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ , wobei  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die  $i$ -te Zeile von  $A$  ist der Zeilenvektor

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^{n*},$$

die  $j$ -te Spalte ist der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Wir nennen  $i$  den Zeilenindex und  $j$  den Spaltenindex.

Die Menge aller Matrizen mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten mit Einträgen aus  $\mathbb{K}$  wird mit  $M(m \times n, \mathbb{K})$  bezeichnet (sprich: „ $m$  Kreuz  $n$  Matrizen über  $\mathbb{K}$ “ oder auch nur „ $m$  Kreuz  $n$  Matrizen“). ◀

**Erläuterung**

Analog zu  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}^{n*}$  ist  $M(m \times n, \mathbb{K})$  zusammen mit der komponentenweise definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Es gilt  $M(1 \times n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n*}$  und  $M(n \times 1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ .

Oft wird auch die Kurzschreibweise  $A = (a_{ij})$  verwendet.

**► Definition**

Die Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{K})$$

heißt Einheitsmatrix. ◀

**Erläuterung**

Die Einheitsmatrix ist dadurch charakterisiert, dass nur die Diagonaleinträge  $a_{ii}$  verschieden von null sind:  $a_{ii} = 1$ . Sie wird uns begleiten, nämlich als Abbildung, die gerade nichts verändert; eine solche Abbildung nennt man auch identische Abbildung oder kurz Identität. Außerdem ist sie wichtiges Element bei der Behandlung von linearen Gleichungssystemen.

**Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung****■ Satz**

Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Basen  $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$  bzw.  $B_2 = (w_1, \dots, w_m)$  und sei  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gibt es für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  eindeutig bestimmte Skalare  $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{K}$ , sodass  $L(v_j) = a_{1j}w_1 + \dots + a_{mj}w_m$ .

**Beweis:** Da  $(w_1, \dots, w_m)$  eine Basis ist, folgt dies sofort aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung. ■

**Erläuterung**

Wir können also einer linearen Abbildung  $L: V \rightarrow W$  bei gegebenen Basen von  $V$  bzw.  $W$  nach obigem Satz stets eine eindeutig bestimmte Matrix  $(a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$  zuordnen.

► **Definition**

Die im vorigen Satz konstruierte Matrix heißt darstellende Matrix von  $L$  bezüglich der Basen  $B_1$  und  $B_2$ . Für die darstellende Matrix einer linearen Abbildung  $L$  verwenden wir die Bezeichnung  $L_{B_1 B_2}$ . Gilt  $B_1 = B_2 = B$ , so schreiben wir kurz  $L_B$ . ◀

**Beispiel**

Sei  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden als Basis  $B$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$ , d. h.

$$v_1 = w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$L(v_1) = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 1, a_{21} = 0$$

und

$$L(v_2) = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = 1, a_{22} = 2.$$

Damit ergibt sich

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Der Rang einer Matrix

■ **Satz**

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten einer Matrix ist immer gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen.

**Beweis:** Sei die  $m \times n$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir nennen die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen von  $A$  den Spalten- bzw. Zeilenrang und möchten also beweisen, dass

der Spaltenrang gleich dem Zeilenrang ist. Ist der Zeilenrang gleich  $k$ , so kann jede der Zeilen  $z_1, \dots, z_m$  (auf eindeutige Weise) als Linearkombination von  $k$  festen Basisvektoren  $z_1^\circ, \dots, z_k^\circ$  dargestellt werden (diese Basisvektoren können z. B. geeignet ausgewählte Zeilen sein):

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}z_1^\circ + \dots + b_{1k}z_k^\circ \\ &\vdots \\ z_m &= b_{m1}z_1^\circ + \dots + b_{mk}z_k^\circ \end{aligned}$$

Sind die Komponenten der Basisvektoren durch

$$\begin{aligned} z_1^\circ &= (v_{11}, \dots, v_{1n}) \\ &\vdots \\ z_k^\circ &= (v_{k1}, \dots, v_{kn}) \end{aligned}$$

konkret gegeben, so erhalten wir die  $i$ -te Spalte von  $A$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11}v_{1i} + \dots + b_{1k}v_{ki} \\ \vdots \\ b_{m1}v_{1i} + \dots + b_{mk}v_{ki} \end{pmatrix} \\ &= v_{1i} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} + \dots + v_{ki} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demnach kann jede Spalte als Linearkombination von  $k$  Vektoren dargestellt werden, sodass

$$\text{Spaltenrang} \leq k = \text{Zeilenrang}.$$

Wenden wir die gleiche Argumentation auf die Matrix  $A^T$  an, die aus  $A$  durch Vertauschen von Zeilen und Spalten hervorgeht, d. h. auf

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

so ergibt sich

$$\text{Zeilenrang} \leq \text{Spaltenrang},$$

womit „Zeilenrang = Spaltenrang“ gezeigt ist. ■

**Beispiel**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die erste und zweite Spalte sind beispielsweise linear unabhängig, doch alle drei sind es nicht, denn

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die erste und zweite Zeile sind linear unabhängig, alle drei Zeilen jedoch nicht:

$$(1, 0, 2) - (1, 1, 1) + (0, 1, -1) = 0$$

**► Definition**

Der Rang einer Matrix  $A$  ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen, und wir schreiben für diesen kurz  $\text{Rang } A$ . ◀

**Beispiel**

Für die zuletzt betrachtete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt  $\text{Rang } A = 2$  und für

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist  $\text{Rang } B = 1$ .

**Das Matrizenprodukt****► Definition**

Seien die Matrizen  $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$  und  $B = (b_{ij}) \in M(n \times p, \mathbb{K})$  gegeben. Dann definieren wir das Matrizenprodukt von  $A$  und  $B$  als

$$A \cdot B = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, p}} \in M(m \times p, \mathbb{K}). \quad \blacktriangleleft$$

**Erläuterung**

Beachten Sie: Das Produkt  $A \cdot B$  ist nur dann erklärt, wenn die Spaltenanzahl von  $A$  mit der Zeilenanzahl von  $B$  übereinstimmt.

Auch bei der Multiplikation von Matrizen ist es üblich, den Mal-Punkt nicht zu schreiben:  $AB = A \cdot B$ .

**■ Satz**

Für das Matrizenprodukt gelten die folgenden Rechenregeln:

1. a) Für alle  $A \in M(m \times k, \mathbb{K})$  und  $B, C \in M(k \times n, \mathbb{K})$  gilt

$$A(B + C) = AB + AC.$$

- b) Für alle  $A \in M(n \times m, \mathbb{K})$  und  $B, C \in M(k \times n, \mathbb{K})$  gilt

$$(B + C)A = BA + CA.$$

2. Für alle  $A \in M(m \times k, \mathbb{K})$ ,  $B \in M(k \times n, \mathbb{K})$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB).$$

3. Das Matrizenprodukt ist assoziativ, d. h., für alle  $A \in M(m \times k, \mathbb{K})$ ,  $B \in M(k \times n, \mathbb{K})$  und  $C \in M(n \times p, \mathbb{K})$  gilt

$$(AB)C = A(BC).$$

4. Für alle  $A \in M(m \times k, \mathbb{K})$  gilt  $E_m \cdot A = A$  und  $A \cdot E_k = A$ .

■

**Erläuterung**

Wie üblich können wir aufgrund der Assoziativität für das Produkt mehrerer Matrizen die Klammern fortlassen:  $ABC = (AB)C = A(BC)$ . Im Allgemeinen ist das Matrizenprodukt jedoch nicht kommutativ, d. h.

$$AB \neq BA.$$

Aus den Rechenregeln ist leicht zu folgern, dass für eine gegebene Matrix  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  die Abbildung

$$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$$

linear ist. Diese Abbildung hat ein paar interessante Eigenschaften: Die Matrizenmultiplikation entspricht der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Ist nämlich eine weitere Matrix  $B \in M(n \times p, \mathbb{K})$  mit entsprechender linearer Abbildung

$$g: \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto Bx$$

gegeben, so haben wir

$$f \circ g: \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto ABx.$$

Die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Standardbasen von  $\mathbb{K}^m$  und  $\mathbb{K}^n$  ist gerade wieder  $A$  selbst.

### Beispiel

Das Produkt zweier  $2 \times 2$ -Matrizen sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^2 a_{2j} b_{jk} \end{pmatrix}_{\substack{i=1,2 \\ k=1,2}} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Beispiel

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wir berechnen ein paar Produkte:

$$AB = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)v = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 6y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$Bv = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$A(Bv) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3x + 4y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 6y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = (AB)v$$

## Besondere Matrizen

### ► Definition

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . (Wir nennen Matrizen wie  $A$ , welche ebenso viele Zeilen wie Spalten haben, quadratisch.)

1.  $A$  heißt invertierbar, wenn es eine Matrix  $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$  gibt, sodass

$$AB = E_n.$$

$A^{-1} = B$  heißt dann Inverse von  $A$ .

2.  $A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$  heißt Transponierte von  $A$ .
3.  $A^* = \overline{A}^T$  heißt Adjungierte von  $A$ . ( $\overline{A}$  steht dabei für die Matrix  $A$  mit komplex konjugierten Einträgen, d. h., komplexe Einträge  $x + iy$  werden durch  $x - iy$  ersetzt.)
4. Gilt  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $A = A^T$ , dann heißt  $A$  symmetrisch.
5. Gilt  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und  $A = A^*$ , dann heißt  $A$  selbstadjungiert oder hermitesch.
6. Sind höchstens die Diagonalelemente von  $A$  verschieden von null, d. h.  $a_{ij} = 0$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ , sprechen wir von einer Diagonalmatrix. ◀

### Beispiel

Die Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist quadratisch, ihre eigene Inverse, gleich ihrer Transponierten und symmetrisch.

### Beispiel

Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat als Adjungierte

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4i & 1 \end{pmatrix}.$$

## Ausblick

Wir sahen, dass Matrizen wirklich praktisch sind, um lineare Abbildungen übersichtlich darzustellen und mit ihnen zu rechnen. Davon werden wir im kommenden Abschnitt sogleich Gebrauch machen. Darüber hinaus treten Matrizen in verschiedenen Formen auf, von denen uns insbesondere die Diagonalgestalt noch beschäftigen wird. So lassen sich für bestimmte lineare Abbildungen spezielle Basen finden, sodass diese bezüglich solcher Basen Diagonalgestalt haben; das macht u. a. das Rechnen einfach.

Darüber hinaus werden wir die Matrizen – wenn auch viel später – als sehr hilfreich bei der Behandlung von sogenannten Differenzialgleichungssystemen erkennen.

Ein Anwendungsaspekt lässt sich erkennen, wenn wir an Matrizen im Zusammenhang mit Bildern denken: Bei einer Matrix mit zehn Zeilen und zehn Spalten entspricht jeder Eintrag einem Pixel in einem recht groben quadratischen Bild. Pixel können sichtbar sein (dann steht eine 1 an der entsprechenden Stelle in der Matrix) oder nicht (dann steht eine 0 an der entsprechenden Stelle in der Matrix). Durch die Multiplikation mit weiteren Matrizen lassen sich Bilder dann verändern. Methoden dieser Art eröffnen uns den Weg z. B. zur Bildbearbeitung.

## Selbsttest

I. Welchen Rang hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} ?$$

- |          |          |
|----------|----------|
| (1) null | (3) drei |
| (2) zwei | (4) vier |

II. Sei  $A \in M(2 \times 3, \mathbb{K})$ ,  $B \in M(2 \times 3, \mathbb{K})$  und  $C \in M(3 \times 4, \mathbb{K})$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- |   |  |
|---|--|
| (1) $A + C \in M(2 \times 4, \mathbb{K})$       | (10) $C^T \cdot B^T$ ist nicht definiert.          |
| (2) $A \cdot C \in M(2 \times 3, \mathbb{K})$   | (11) $C^T \cdot B^T \in M(4 \times 2, \mathbb{K})$ |
| (3) $A \cdot C \in M(2 \times 4, \mathbb{K})$   | (12) $C^* \cdot B^* \in M(4 \times 2, \mathbb{K})$ |
| (4) $A \cdot B \in M(2 \times 2, \mathbb{K})$   | (13) $A = (A^T)^T$                                 |
| (5) $A \cdot B^T \in M(2 \times 2, \mathbb{K})$ | (14) $B^* = (B^*)^*$                               |
| (6) $A + B \in M(2 \times 3, \mathbb{K})$       | (15) $\text{Rang } A > 0$                          |
| (7) $B + C$ ist nicht definiert.                | (16) $\text{Rang } B \leq 2$                       |
| (8) $B \cdot C$ ist nicht definiert.            | (17) $\text{Rang } C \leq 2$                       |
| (9) $A^T \cdot B \in M(2 \times 2, \mathbb{K})$ |  |



# 9 Lineare Gleichungssysteme

## Einblick

War die lineare Algebra bisher noch ein recht abstraktes Gebilde, kommen wir hier zu durchaus praktischen Aspekten, die mit linearen Gleichungssystemen verbunden sind. Diese begegnen uns im Alltag, wenn z. B. Fragen der folgenden Art auftreten: „Welche Anzahl von Tischen lässt sich produzieren, wenn im Lager  $x_1$  Tischbeine,  $x_2$  Tischplatten,  $x_3$  Metallwinkel und  $x_4$  Schrauben zur Verfügung stehen?“

Natürlich sind wir auch daran interessiert, welche Anzahl von Lösungen es gibt, ob sich aus bekannten Lösungen neue konstruieren lassen oder eventuell gar keine existieren, und ob sich in der Menge der Lösungen sogar eine Struktur erkennen lässt.

## Grundlegendes zu linearen Gleichungssystemen und Gauß-Algorithmus

### ► Definition

Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit  $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$  heißt lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten (Variablen)  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ .

Gilt  $b_j = 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$ , sprechen wir von einem homogenen linearen Gleichungssystem, sonst von einem inhomogenen linearen Gleichungssystem.

Die  $b_j$  heißen Inhomogenitäten, die  $a_{jk}$  Koeffizienten.

Wir können das lineare Gleichungssystem auch schreiben als:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b$$

Dabei heißt  $A$  System- oder Koeffizientenmatrix,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ist ein Lösungsvektor oder kurz eine Lösung, sofern  $x_1, \dots, x_n$  das gesamte Gleichungssystem erfüllen. Die Menge aller Lösungsvektoren heißt Lösungsmenge und  $b = (b_1, \dots, b_m)$  ist der Inhomogenitätsvektor oder kurz die Inhomogenität.

Stellvertretend für das lineare Gleichungssystem können wir auch die sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix betrachten:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) = (A|b)$$

### Beispiel

Wir schreiben für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= -2 \\ x_1 - 6x_2 &= 7 \end{aligned}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \end{array} \right).$$

Wir bezeichnen die einzelnen Zeilen mit römischen Zahlen. Dann können wir das Gleichungssystem wie folgt (sogar äquivalent) umformen – was in jedem Schritt gemeint ist, ergibt sich sicher ohne weitere Erklärung:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \end{array} \right) &\xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{II - 3I} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 23 & -23 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{II/23} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{I + 6 \cdot II} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir lesen ab:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$  sind die eindeutig bestimmten Lösungen.

**Erläuterung**

Wir haben das lineare Gleichungssystem hier unter Verwendung des sogenannten Gauß-Algorithmus gelöst, bei dem auf die erweiterte Koeffizientenmatrix die folgenden elementaren Zeilenoperationen angewendet werden:

1. Tauschen von Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl  $\neq 0$ ,
3. Addieren eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Wir können auch ohne großen Schaden die Spalten der Koeffizientenmatrix vertauschen. Dies entspricht jedoch einer Vertauschung der Variablen, was wir dann sorgfältigst notieren müssten – und deshalb darauf verzichten.

■ **Satz**

Mithilfe elementarer Zeilenumformungen kann jede Matrix auf die folgende Form gebracht werden, welche normierte Zeilenstufenform genannt wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

Hierbei steht „\*“ für einen beliebigen Eintrag. ■

**Erläuterung**

Von der Richtigkeit dieses Satzes können wir uns ausnahmsweise durch Nachrechnen einer hinreichend großen Anzahl von Beispielen überzeugen, auf den Beweis verzichten wir hier.

Im obigen Satz ist durch die abgebildete Matrix deutlich, warum der Name „Zeilenstufenform“ gewählt wurde, die Einsen bilden nämlich gerade eine Stufenform in den Zeilen. Anstatt der Einsen können dort auch andere Zahlen ungleich null stehen, allerdings lässt sich dann durch das Teilen der Elemente einer Zeile durch gerade diese Zahl eine Eins als sogenannter „Kopf“ erhalten. Es ergibt sich dann also durch das Normieren auf eins schließlich die normierte Zeilenstufenform.

Nach elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems mit  $m$  Gleichungen in  $m$  Variablen  $x_1, \dots, x_m$  ist diese im schönsten Fall von der Form

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_m \end{array} \right).$$

Dann ist der eindeutig bestimmte Lösungsvektor gegeben durch  $(x_1, \dots, x_m) = (c_1, \dots, c_m)$ . Dies ist jedoch nicht immer möglich.

## Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

### ■ Satz

Sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ . Dann sind Linearkombinationen von Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$  wieder Lösungen.

**Beweis:** Seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n$  Lösungen des linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$  und sei  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= A \cdot (\lambda_1 x_1) + A \cdot (\lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Zusammen mit der Tatsache, dass jedes homogene lineare Gleichungssystem wenigstens den Nullvektor als Lösung hat (da  $A \cdot 0 = 0$ ), erhalten wir die Aussage, dass die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems stets ein Untervektorraum ist. Deshalb sprechen wir in diesem Fall auch vom Lösungsraum.

### ■ Satz

Sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  und  $b \in \mathbb{K}^m$ . Sei außerdem  $x_p \in \mathbb{K}^n$  eine beliebige Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  und sei  $\mathbb{L}_H$  der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$ . Dann ist die Lösungsmenge von  $Ax = b$  gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{x_p + x_H \mid x_H \in \mathbb{L}_H\}.$$

**Beweis:** In jedem Fall besteht  $\mathbb{L}$  aus Lösungsvektoren von  $Ax = b$ , denn

$$A \cdot (x_p + x_H) = Ax_H + Ax_p = 0 + b = b.$$

Wir müssen noch zeigen, dass umgekehrt jeder Lösungsvektor in  $\mathbb{L}$  enthalten ist. Sei also  $x_0$  so, dass  $Ax_0 = b$ . Dann gilt

$$A \cdot (x_0 - x_p) = A \cdot x_0 - A \cdot x_p = A \cdot x_0 - b = 0.$$

Somit gilt  $x_0 - x_p \in \mathbb{L}_H$ , d. h., es gibt ein  $x_H \in \mathbb{L}_H$ , sodass  $x_0 - x_p = x_H$ , also letztlich

$$x_0 = x_H + x_p. \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Wir nennen  $x_p$  in diesem Zusammenhang eine partikuläre oder spezielle Lösung (dann auch als  $x_s$  geschrieben). Es kann passieren, dass gar kein  $x_p$  existiert, dann gilt  $\mathbb{L} = \emptyset$ .

### Beispiel

Betrachten wir das folgende lineare Gleichungssystem in den Variablen  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung ist  $x_p = (x_1, x_2) = (1, 1)$ , was durch simples Einsetzen klar wird. Der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$\mathbb{L}_H = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ist die gesuchte Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

### Beispiel

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

hat keine Lösung, d. h.  $\mathbb{L} = \emptyset$ .

### ■ Satz

Sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  eine Matrix und  $e_i \in \mathbb{K}^n$  der  $i$ -te Standardbasisvektor. Dann ist  $Ae_i$  gerade die  $i$ -te Spalte von  $A$ .

**Beweis:**

$$Ae_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Obiger Satz ist für sich von begrenzter Wichtigkeit, allerdings bekommt er sogleich in der Anwendung Bedeutung. Es ist ferner gut zu erkennen, dass wir eigentlich nichts anderes hätten erwarten dürfen, selbst wenn wir lineare Abbildungen nicht mit ihren darstellenden Matrizen assoziieren; bitte denken Sie kurz darüber nach, eventuell auch in Form eines Beispiels.

### ■ Satz

Sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  eine Matrix und  $\mathbb{L}_H$  der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$ . Dann gilt:

$$\dim \mathbb{L}_H = n - \text{Rang } A$$

**Beweis:** Wir betrachten wieder die lineare Abbildung  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$ . Dann gilt zunächst einmal  $\text{Rang } A = \dim \text{Bild } f$ , da das Bild von  $f$  von den Spalten von  $A$  aufgespannt wird. Das sehen wir, indem wir  $Ax$  wie folgt ausschreiben ( $x_i$  sind die Einträge von  $x$ ):

$$\begin{aligned} Ax &= A \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (Ae_i) \end{aligned}$$

Nach dem Satz zuvor ist  $Ae_i$  aber gerade die  $i$ -te Spalte von  $A$ . Außerdem gilt offensichtlich  $\text{Kern } f = \mathbb{L}_H$ . Zusammen mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen ist schließlich bewiesen:

$$\dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f = \dim \mathbb{K}^n \Rightarrow \dim \mathbb{L}_H + \text{Rang } A = n \quad \blacksquare$$

### ■ Satz

Sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  und  $b \in \mathbb{K}^m$ . Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  hat genau dann eine Lösung, wenn  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b)$ .

**Beweis:** Ist  $\text{Rang } A < \text{Rang}(A|b)$ , dann kann  $b$  nicht in dem Teilraum liegen, der von den Spalten von  $A$  aufgespannt wird. Anders ausgedrückt:  $b$  kann nicht als Linearkombination der Spalten von  $A$  dargestellt werden – andernfalls wäre ja  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b)$  (womit die andere Richtung auch gleich gezeigt ist). ■

### Erläuterung

Die Idee des obigen Beweises ist, dass ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  genau dann eine Lösung hat, wenn  $b$  in dem Teilraum liegt, der von den Spalten von  $A$  aufgespannt wird.

### Beispiel

Betrachten wir das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Wir wissen bereits aus einem vorigen Beispiel, dass gilt:  $\text{Rang } A = 2$ . Anwendung des Gauß-Algorithmus (1. Zeile von der 2. Zeile abziehen, und dann 2. Zeile von der 3. Zeile abziehen) führt auf das äquivalente Gleichungssystem

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

und offensichtlich sind die Zeilen dieser Matrix linear unabhängig, sodass

$$\text{Rang}(A|b) = 3$$

gilt. Somit hat das entsprechende lineare Gleichungssystem keine Lösung. Dies sehen wir auch daran, dass nach der äquivalenten Umformung in der letzten Zeile „ $0 = 1$ “ steht – ein Widerspruch.

### Beispiel

Dieses Beispiel dient zur Erklärung der Berechnung der Inversen einer Matrix als Anwendung vieler zuvor behandelter Dinge. Zur Erinnerung: Existiert die Inverse  $A^{-1}$  einer quadratischen Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ , so hat diese die definierende Eigenschaft  $AA^{-1} = E_n$ . Darüber hinaus gelten die üblichen „selbstverständlichen“ Rechenregeln wie z. B.

$$A^{-1}A = E_n$$

oder

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

die natürlich auch bewiesen werden können.

### Erläuterung

Die Frage bleibt jedoch: Wie lässt sich die Inverse einer gegebenen Matrix konkret berechnen? Betrachten wir hierzu die  $i$ -te Spalte von  $A^{-1}$ . Diese muss, mit  $A$  von links multipliziert, die  $i$ -te Spalte der Einheitsmatrix ergeben. Diese ist jedoch gerade der  $i$ -te Vektor der Standardbasis von  $\mathbb{K}^n$ , also  $e_i$ . Die einzelnen Spalten von  $A^{-1}$  – nennen wir sie  $s_1, \dots, s_n$  – müssen also jeweils das lineare Gleichungssystem  $As_i = e_i$  erfüllen. Diese  $n$  Gleichungssysteme unterscheiden sich nur durch die Inhomogenität  $b = e_i$ . Wir fassen sie also in der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A|E_n)$  zusammen. Ist  $A$  invertierbar, so ist die normierte Zeilenstufenform von  $(A|E_n)$  gerade gleich  $(E_n|A^{-1})$ , sodass die Inverse einer Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus berechenbar ist.

### Beispiel

Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{II} + (-2) \cdot \text{I}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{3 \cdot \text{I} + 2 \cdot \text{II}} \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{I}/3} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{II}/(-3)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die Inverse ist also gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

## Ausblick

Das zuvor Behandelte ist wichtiges Handwerkszeug. An diversen Stellen werden Sie lineare Gleichungssysteme lösen müssen und wissen wollen, wie der Lösungsraum, auch von der Struktur her, beschaffen ist. Wir hatten ja bereits

im Einblick ein regelrechtes Alltagsbeispiel gesehen. Prominente Beispiele aus der Praxis finden sich ferner im Bereich der Regelungstechnik, die sich mit der gezielten Beeinflussung von z. B. physikalischen Größen in Anlagen befasst.

Interessant ist die Feststellung, dass sich beispielsweise die Aussagen über die Struktur der Lösungsmenge in der Theorie der sogenannten linearen Differentialgleichungen erneut verwenden lassen. Dabei kommt wesentlich zum Tragen, dass wir die Ableitung bereits als lineare Abbildung identifizierten.

## Selbsttest

**I.** Welche der folgenden Rechenoperationen dürfen beim Gauß-Algorithmus durchgeführt werden?

- (1) Vertauschen von Zeilen
- (2) Multiplikation einer Zeile mit einem beliebigen Skalar
- (3) Subtrahieren einer Zeile von einer anderen
- (4) Multiplikation zweier Zeilen
- (5) Division einer Zeile mit  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$
- (6) Quadrieren einer Zeile
- (7) Multiplikation einer Spalte mit  $\frac{223}{71}$

**II.** Sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sei ferner  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ . Entscheiden Sie, ob stets wahr ist: Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b \dots$

- (1) ... hat keine Lösung, wenn  $b = 0$ .
- (2) ... hat (mindestens) eine Lösung, wenn  $b = 0$ .
- (3) ... hat keine Lösung, wenn  $\text{Rang}(A|b) \geq \text{Rang } A$ .
- (4) ... hat keine Lösung, wenn  $\text{Rang}(A|b) = \text{Rang } A$ .
- (5) ... hat keine Lösung, wenn  $b$  eine der Spalten von  $A$  ist.
- (6) ... hat eine Lösung, wenn  $b$  eine der Spalten von  $A$  ist.
- (7) ... hat keine Lösung, wenn  $b$  eine Linearkombination der Spalten von  $A$  ist.
- (8) ... hat eine Lösung, wenn  $b$  eine Linearkombination der Spalten von  $A$  ist.
- (9) ... hat genau dann keine Lösung, wenn  $b \notin \text{Bild } f$ .
- (10) ... hat unendlich viele Lösungen, wenn  $\text{Kern } f = \{0\}$ .
- (11) ... hat unendlich viele Lösungen, wenn  $\text{Kern } f = \{0\}$  und  $b \in \text{Bild } f$ .
- (12) ... hat unendlich viele Lösungen, wenn  $\dim \text{Kern } f = 1$  und  $b = 0$ .
- (13) ... hat keine Lösung, wenn  $\text{Kern } f \neq \{0\}$  und  $b \notin \text{Bild } f$ .
- (14) ... hat unendlich viele Lösungen, wenn  $\dim \text{Kern } f > 0$  und  $b \in \text{Bild } f$ .



# 10 Die Determinante

## Einblick

Der nun zu behandelnde Begriff der Determinante birgt mannigfache Anwendungen und insbesondere Vereinfachungen. Mit Determinanten können wir u. a. Volumina berechnen, einfach über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren entscheiden, Informationen über den Lösungsraum linearer Gleichungssysteme gewinnen und vieles mehr.

## Der Laplace'sche Entwicklungssatz

### ► Definition

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . Dann ist die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix  $S_{ij}(A)$ , die sogenannte Streichungsmatrix, definiert durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. ◀

### Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 42 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

gilt:

$$S_{12}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

### ► Definition

Die Determinante einer quadratischen Matrix  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$  ist ein Skalar und wird mit  $\det A$  oder  $|A|$  bezeichnet. Gilt  $n = 1$ , so setzen wir  $\det(A) = a_{11}$ . Andernfalls definieren wir die Determinante von  $A$  rekursiv über den sogenannten Entwicklungssatz von Laplace. Für diesen gibt es zwei Fassungen:

1. Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile. Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ ; dann gilt:

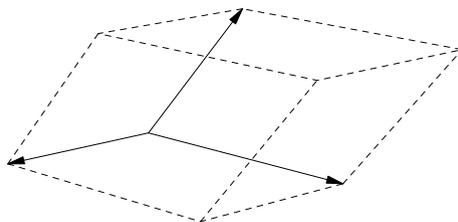
$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(S_{ik}(A))$$

2. Entwicklung nach der  $k$ -ten Spalte. Sei  $k \in \{1, \dots, n\}$ ; dann gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det (S_{ik}(A)) \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Die Determinante einer Matrix ist anschaulich das Volumen eines sogenannten Parallelepipeds, also eines geometrischen Objekts, das von den Spalten einer Matrix  $A$  aufgespannt wird.



Ein Parallelepiped im  $\mathbb{R}^3$ , aufgespannt durch drei Vektoren

Gewöhnlich wird die Determinante über die sogenannte Leibniz-Formel definiert und der Entwicklungssatz von Laplace anschließend bewiesen. Die Leibniz-Formel ist zwar für die praktische Berechnung nicht von besonderem Interesse, wir wollen diese dennoch liefern:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left( \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right)$$

Das Produktzeichen  $\prod_{i=1}^n$  liefert, analog zum Summenzeichen, das Produkt der dahinter stehenden Terme, also z. B.  $\prod_{i=0}^2 x_i = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$ . Die Summe wird über alle Permutationen (Vertauschungen)  $\sigma$  der Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  berechnet und  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  liefert das Vorzeichen von  $\sigma$ :  $+1$ , falls  $\sigma$  eine gerade Permutation ist, und  $-1$  im Fall einer ungeraden. Ob eine Permutation gerade oder ungerade ist, kann daran ersehen werden, wie viele Transpositionen – das sind Permutationen, die genau zwei Elemente vertauschen – nötig sind, um die jeweils vorliegende Permutation zu erzeugen (gerade oder ungerade Anzahl). Bei  $S_n$  handelt es sich um die Menge der Permutationen von  $n$  Elementen; diese heißt symmetrische Gruppe. Genau genommen wird auch diese Menge mit Operationen versehen, wodurch dann die Menge erst zu einer Gruppe wird.

Eine quadratische Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  kann aufgefasst werden als ein  $n$ -Tupel von Vektoren aus  $\mathbb{K}^n$ , nämlich der Spaltenvektoren  $a_1, \dots, a_n$  von  $A$ . Die Determinante kann dann als Abbildung von  $(\mathbb{K}^n)^n$  nach  $\mathbb{K}$  gesehen werden:  $\det A = \det(a_1, \dots, a_n)$ . Mit dieser Sichtweise kann die Determinante auch über die Erfüllung der folgenden Eigenschaften definiert werden:

1. Für alle  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, a, b \in \mathbb{K}^n$  gilt:

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, a + b, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ = \det(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

2. Für alle  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, a \in \mathbb{K}^n$  und  $r \in \mathbb{K}$  gilt:

$$\det(v_1, \dots, v_{i-1}, r \cdot a, v_{i+1}, \dots, v_n) \quad (10.1)$$

$$= r \cdot \det(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_n) \quad (10.2)$$

3. Für alle  $v_1, \dots, v_r, \dots, v_s, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$  mit  $r \neq s$  gilt:

$$\det(v_1, \dots, v_r, \dots, v_s, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_s, \dots, v_r, \dots, v_n)$$

4.  $\det E_n = 1$

Bei der Verwendung als definierende Eigenschaften muss dann noch bewiesen werden, dass es genau eine solche Abbildung gibt.

Zumeist wird bei der Berechnung der einfache Weg gewählt, nämlich über den eingangs formulierten Entwicklungssatz. Egal nach welcher Methode eine Determinante berechnet wird – die gefundenen Werte müssen natürlich identisch sein.

### Beispiel

Berechnen wir die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^2 (-1)^{1+k} a_{1k} \det(S_{1k}(A)) \\ &= (-1)^2 a_{11} \det(S_{11}(A)) + (-1)^3 a_{12} \det(S_{12}(A)) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Wir berechnen dies nun zusätzlich über die Leibniz-Formel, wobei hier natürlich  $n = 2$  ist:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \left( \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^2 a_{i\sigma(i)} \right) = \sum_{\sigma \in S_2} (\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)})$$

In  $S_2$  haben wir nun die Permutation, welche 1 und 2 nicht vertauscht, das Signum ist also 1. Ferner diejenige, welche 1 auf 2 und 2 auf 1 abbildet, das Signum ist dann gerade  $-1$ . Wir erhalten schließlich

$$\sum_{\sigma \in S_2} (\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}) = 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{21},$$

also wieder obiges Ergebnis.

### Erläuterung

Es ist grundsätzlich ratsam, die Determinante nach der Zeile oder Spalte der betrachteten Matrix zu entwickeln, welche die meisten Nullen enthält, damit nur wenige der Summanden bei der Entwicklung nach Laplace berechnet werden müssen. Teils sind aber die Schemata zur Berechnung so einfach, dass sich dies nicht einmal lohnt.

## Berechnung von Determinanten in einfachen Fällen

### ■ Satz

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  eine obere oder untere Dreiecksmatrix, d. h.,  $A$  ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

**Beweis:** Wir zeigen diesen Satz durch vollständige Induktion. Für  $n = 1$  ist die Aussage sicher richtig:  $\det A = a_{11}$ . Nehmen wir an, die Aussage ist für  $n - 1$  wahr, und berechnen mit diesem Wissen die Determinante einer unteren

Dreiecksmatrix  $A$  vom Format  $n \times n$  durch Entwicklung nach der letzten Spalte. Diese hat nur einen einzigen von null verschiedenen Eintrag, sodass nur ein Summand übrig bleibt:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n+n} a_{nn} \det(S_{nn}(A)) \\ &= (-1)^{2n} a_{nn} \det(S_{nn}(A)) \\ &= a_{nn} \det(S_{nn}(A)) \\ &= a_{nn} a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1} a_{nn} \end{aligned}$$

Für obere Dreiecksmatrizen funktioniert der Beweis genauso; wir müssen die Determinante dann nach der letzten Zeile entwickeln. ■

**Erläuterung**

Für Diagonalmatrizen, welche sowohl obere als auch untere Dreiecksmatrizen sind, gilt obige Aussage natürlich auch.

Die Gleichungen für Determinanten „kleiner“ Matrizen sind leicht zu merken, ohne dass wir den Laplace’schen Entwicklungssatz bemühen müssen.

■ **Satz**

- $n = 1$ :

Die Determinante ist in diesem Fall einfach definiert als der (einzige) Eintrag:

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$$

- $n = 2$ :

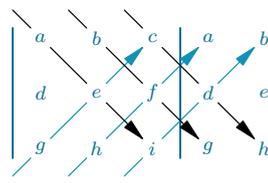
Dieser Fall wurde bereits zuvor explizit berechnet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Wir können uns dies auch als Schema merken:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} a & \cdot & \cdot & b \\ & \searrow & - & \swarrow \\ \cdot & & d & c & \cdot \end{matrix}$$

- $n = 3$ : Hierfür gibt es die sogenannte Regel von Sarrus:



Die „Nebendiagonalen“ sind von den „Hauptdiagonalen“ zu subtrahieren:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

**Beweis:** Der Beweis ergibt sich alleine aus dem Ausrechnen der Determinanten mit dem Entwicklungssatz; es handelt sich ja hier lediglich um einfache Spezialfälle, deren Ergebnis wir hier übersichtlich darstellten. ■

### Erläuterung

Beachten Sie: Die Regel von Sarrus gilt nur für  $3 \times 3$ -Matrizen, es gibt keine entsprechende Regel für  $n > 3$ .

### Beispiel

Wir berechnen die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 - 0 + 1 \cdot (-4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

und mithilfe der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die 1. und 3. Zeile linear abhängig sind. Wie wir sehen werden, ist es kein Zufall, dass die Determinante in diesem Fall verschwindet.

## Eigenschaften der Determinanten

### ► Definition

Wenn wir vom Kern oder Bild einer Matrix  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  sprechen, so meinen wir damit den Kern oder das Bild der linearen Abbildung  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $x \mapsto Ax$ . ◀

**Beispiel**

Es ist  $\text{Kern } A = \mathbb{L}_H$ , wobei  $\mathbb{L}_H$  (wie zuvor) der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$  ist.

**■ Satz**

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\det A \neq 0$
2.  $\text{Rang } A = n$
3.  $\text{Kern } A = \{0\}$
4.  $A$  ist invertierbar.

**Beweis:** Wir beweisen den Satz durch Ringschluss.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Wir zeigen nur den Fall  $n = 2$ , und zwar durch Kontraposition. Sei also die Matrix  $A$  von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und die Spaltenvektoren seien linear abhängig. Wenn eine der Spalten der Nullvektor ist, sind wir fertig, da dann  $\det A = ad - bc$  sicher null ist. Andernfalls müssen die Spalten Vielfache voneinander sein:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Die Determinante von  $A$  berechnet sich dann zu  $\det A = ad - bc = (\lambda b)d - b(\lambda d) = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Wir haben ja bereits gesehen, dass das Bild von  $A$  durch deren Spalten aufgespannt wird, woraus sich  $\dim \text{Bild } A = \text{Rang } A$  ergibt. Aus dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen folgt somit:

$$\begin{aligned} n &= \dim \text{Bild } A + \dim \text{Kern } A \\ &= \text{Rang } A + \dim \text{Kern } A = n + \dim \text{Kern } A \\ &\Rightarrow \dim \text{Kern } A = 0 \end{aligned}$$

(3)  $\Rightarrow$  (4): Wenn der Kern von  $A$  nur aus dem Nullvektor besteht, ist umgekehrt der Rang maximal:  $n = \dim \text{Bild } A + \dim \text{Kern } A = \text{Rang } A + 0 = \text{Rang } A$ . Wenn der Rang maximal ist, kann die inverse Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus berechnet werden.

(4)  $\Rightarrow$  (1): Wie wir später sehen werden, gilt für quadratische Matrizen  $A$  und  $B$ :  $\det(AB) = \det A \det B$ . Zusammen mit  $AA^{-1} = E_n$  ergibt sich dann

$$1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} \Rightarrow \det A = \frac{1}{\det(A^{-1})} \neq 0. \quad \blacksquare$$

### ■ Satz

Seien  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$  mit Spalten  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$  bzw.  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}^n$ . (Wir schreiben hierfür  $A = (a_1, \dots, a_n)$  bzw.  $B = (b_1, \dots, b_n)$ .) Sei ferner  $c \in \mathbb{K}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:

1.  $\det(a_1, \dots, (a_k + \lambda c), \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) + \lambda \det(a_1, \dots, c, \dots, a_n)$
2.  $\det(a_1, \dots, (a_k + \lambda a_l), \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)$  mit  $l \neq k$
3.  $\det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_l, \dots, a_k, \dots, a_n)$
4.  $\det E_n = 1$
5.  $\det A = \det A^T$
6.  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$  (Determinantenmultiplikationssatz)
7. Wenn  $A$  invertierbar ist, gilt  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .

**Beweis:** Die Beweise der obigen Aussagen sind nicht schwer, sondern rein technischer Natur. Sie benötigen viele Zeilen (nicht sehr interessanter) „Indexgymnastik“. Wir verzichten daher darauf. Nicht unerwähnt wollen wir jedoch lassen, dass sich einige der obigen Aussagen direkt in der axiomatischen Definition der Determinante finden. ■

## Ausblick

Wir sahen, dass die Determinante wirklich sehr nützlich ist. So ermöglicht sie z. B. einfache Aussagen über die Lösungen (homogener) linearer Gleichungssysteme, und dies werden wir auch später bei den sogenannten Eigenwerten verwenden, wodurch wir eine einfache Berechnungsmöglichkeit für letztere erhalten. Das ist aber noch lange nicht ihr einziges Anwendungsgebiet, denn wir werden sie, gerade hinsichtlich ihrer „Fähigkeiten“ zur Volumenberechnung, noch oft benötigen. Sogar dann, wenn es um das Berechnen von Flächen oder Volumina geht, die nicht einfach wie ein Würfel oder Parallelogramm, also einfache Beispiele für Parallelepipede, aussehen. Wir haben uns also ein wertvolles Werkzeug angeschaffen.

## Selbsttest

I. Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Welche Determinante hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} ?$$

(1) 0

(3)  $\lambda^4$

(2)  $\lambda$

(4)  $\lambda^{16}$

II. Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  eine quadratische Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu  $\det A \neq 0$ ?

(1) Kern  $A = \{0\}$

(2) Rang  $A = n$

(3)  $A$  ist invertierbar.

(4)  $\dim \text{Kern } A = 0$

(5)  $\dim \text{Bild } A = n$

(6)  $\text{Bild } A = \mathbb{K}^n$

(7) Die Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.

(8) Die Spalten von  $A$  bilden eine Basis von  $\mathbb{K}^n$ .

(9) Die Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig.

(10) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Basis von  $\mathbb{K}^n$ .

(11) Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  hat für alle  $b \in \mathbb{K}^m$  genau eine Lösung.

(12) Wenn  $x \in \mathbb{K}^n$  das lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$  löst, so gilt  $x = 0$ .



# 11 Eigenwerte und Eigenvektoren

## Einblick

Wir kommen hier zu Begriffen, die weit über die lineare Algebra hinaus verwendet werden, ein wichtiges Einsatzgebiet ist die Physik. Die Frage wird geklärt, wann eine lineare Abbildung nicht mehr liefert, als Streckungen und/oder Stauchungen. Dies ist natürlich nicht immer der Fall, aber es gibt Bedingungen dafür, die wir finden werden. Diese sind dann mit den sogenannten Eigenwerten und -vektoren verbunden. Es gibt ferner den Begriff der Vielfachheit, der in zwei Varianten auftritt. Er ist direkt mit den zuvor genannten Schlüsselwörter verbunden.

## Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  heißt Eigenwert von  $L$ , falls es ein  $v \in V$  gibt mit

1.  $v \neq 0$  und
2.  $Lv = \lambda v$ .

Dabei heißt  $v$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . ◀

### Erläuterung

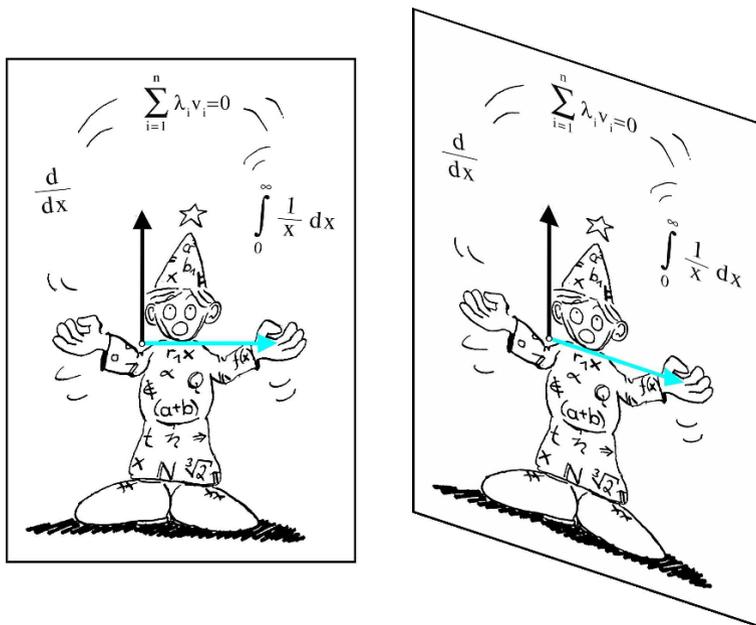
Dass der Nullvektor ausgeschlossen wird, ist vernünftig. Andernfalls wäre jeder Skalar ein Eigenwert, da für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:  $L(0) = 0 = \lambda \cdot 0$ .

Wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $L$  mit Eigenwert  $\lambda$  ist, so sind auch alle von null verschiedenen Vielfachen von  $v$  Eigenvektoren mit Eigenwert  $\lambda$ :

$$L(\alpha v) = \alpha Lv = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Die Eigenwertgleichung  $Lv = \lambda v$  besagt anschaulich, dass für einen Eigenvektor  $v$  die lineare Abbildung  $L$  lediglich eine Streckung oder Stauchung mit dem Faktor  $\lambda > 0$  ist, für  $\lambda < 0$  liegt darüber hinaus eine Umkehrung der „Richtung“ vor. Dabei muss klar sein, dass diese Anschauung im eigentlichen Sinne

nur dann vernünftig ist, sofern die Elemente des betrachteten Vektorraums als „Pfeile“ vorstellbar sind; z. B. schwindet im Vektorraum der stetigen Funktionen eine derartige Vorstellungsmöglichkeit. Zur weiteren Klärung betrachten wir noch die folgenden Bilder:



Die lineare Abbildung ist hier eine Scherung. Der schwarze Vektor ist ein Eigenvektor der Scherungsabbildung, denn er hat entlang der vertikalen Achse seine Richtung nicht geändert. Ferner hat er seine Länge nicht verändert, der zugehörige Eigenwert ist also  $\lambda = 1$ . Der blaue Vektor ist kein Eigenvektor, denn seine Richtung hat sich geändert.

Wir wollen Ihnen noch kurz mitteilen, woher die (für einige doch recht speziellen) Bilder oben kommen: In der ersten Auflage fand sich unser Mathematik-Zauberlehrling noch auf dem Einband. Von selbigem ist er verschwunden – beim Thema Eigenvektoren arbeitet er jedoch weiterhin ordentlich.

### Beispiel

Sei  $L: \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq n}[x]$  gegeben durch  $L(p)(x) = x \cdot p'(x)$ . Dann ist jedes Monom

$$e_k(x) = x^k$$

ein Eigenvektor von  $L$  zum Eigenwert  $k$ :

$$L(e_k)(x) = x \cdot kx^{k-1} = kx^k = ke_k(x)$$

► **Definition**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Sei außerdem  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Eigenwert von  $L$ . Dann heißt

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Lv = \lambda v\} \subseteq V$$

Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda$ . ◀

**Erläuterung**

Der Eigenraum  $V_\lambda$  besteht aus allen Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert  $\lambda$  unter Hinzunahme des Nullvektors, der nach Definition kein Eigenvektor sein kann. Dies wird sich sogleich als gute Idee herausstellen.

■ **Satz**

Der Eigenraum einer linearen Abbildung zu einem gegebenen Eigenwert ist ein Untervektorraum.

**Beweis:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit Eigenwert  $\lambda$ . Seien außerdem  $x, y \in V_\lambda$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

1. Es gilt  $V_\lambda \neq \emptyset$ , da  $0 \in V_\lambda$ .
2. Es gilt

$$\begin{aligned} L(x + y) &= Lx + Ly \\ &= \lambda x + \lambda y \\ &= \lambda(x + y), \end{aligned}$$

d. h.  $x + y \in V_\lambda$ .

3. Für  $\alpha = 0$  gilt  $\alpha \cdot x = 0 \in V_\lambda$ . Für  $\alpha \neq 0$  ist  $\alpha \cdot x \in V_\lambda$  klar, denn Vielfache von Eigenvektoren sind, wir hatten es oben bereits bewiesen, wieder Eigenvektoren. ■

■ **Satz**

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

**Beweis:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Seien außerdem  $\lambda_1 \in \mathbb{K}$  und  $\lambda_2 \in \mathbb{K}$  Eigenwerte von  $L$  zu den Eigenvektoren  $v_1 \in V$  bzw.  $v_2 \in V$ . Die Behauptung lautet nun: Sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  verschieden, dann sind  $v_1$  und  $v_2$  linear unabhängig. Wir beweisen die Kontraposition. Seien also

$v_1$  und  $v_2$  linear abhängig. Da weder  $v_1$  noch  $v_2$  der Nullvektor ist, muss es ein  $\alpha \in \mathbb{K}$  geben, sodass  $v_1 = \alpha v_2$  bzw.  $v_1 - \alpha v_2 = 0$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &= L(0) \\
 &= L(v_1 - \alpha v_2) \\
 &= L(v_1) - \alpha L(v_2) \\
 &= \lambda_1 v_1 - \alpha \lambda_2 v_2 \\
 &= \lambda_1 v_1 - \lambda_2 (\alpha v_2) \\
 &= \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_1 \\
 &= (\lambda_1 - \lambda_2) v_1
 \end{aligned}$$

Da  $v_1 \neq 0$ , gilt  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ . ■

### Erläuterung

Dieser Satz ist von besonderer Tragweite, denn wir werden noch sehen, dass Bedarf nach linear unabhängigen Eigenvektoren besteht. Haben wir nämlich z. B. eine lineare Abbildung von einem Vektorraum  $V$  mit  $\dim V = n$  in sich selbst, und hat diese Abbildung  $n$  verschiedene Eigenwerte, so garantiert uns dies die Existenz einer Basis von  $V$ , die nur aus Eigenvektoren besteht. Dies wird interessante Konsequenzen haben.

## Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

### ► Definition

Das Polynom  $n$ -ten Grades

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

heißt charakteristisches Polynom von  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . ◀

### Erläuterung

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . Wie üblich können wir  $A$  vermöge der Matrizenmultiplikation als lineare Abbildung  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $x \mapsto Ax$  auffassen. Haben wir umgekehrt eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  auf einem beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ , können wir dieser bei gegebener Basis die eindeutig bestimmte darstellende Matrix  $A$  zuordnen. Die Eigenwerte von  $A$  sind identisch mit denen von  $f$ , und die Eigenvektoren von  $f$  können über die Basisdarstellung in jene von  $A$  überführt werden. Wir werden diese Idee in einem späteren Abschnitt noch präzisieren.

Woher aber kommt eigentlich das charakteristische Polynom? Für einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  muss es einen Vektor  $v \in \mathbb{K}^n$  mit  $v \neq 0$  geben, sodass  $Av = \lambda v$ . Das ist äquivalent zur Aussage, dass für ein  $v \neq 0$  gilt:

$$(A - \lambda E_n)v = 0$$

Anders ausgedrückt: Der Kern von  $A - \lambda E_n$  darf nicht nur den Nullvektor enthalten. Das ist aber genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda E_n) = 0,$$

wie wir im Kapitel über die Determinante behandelt haben.

### ■ Satz

Die Eigenwerte einer Matrix sind genau die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms.

**Beweis:** Der Beweis ist bereits mit der Erläuterung zum charakteristischen Polynom gegeben. ■

### Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_2) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Damit besitzt  $A$  genau zwei verschiedene Eigenwerte:  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ .

### Erläuterung

Sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  einer Matrix einmal bekannt, finden wir die jeweils zum Eigenwert  $\lambda_i$  gehörigen Eigenvektoren über die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i E)x = 0.$$

Der Lösungsraum dieses Gleichungssystems ist dann gerade der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_i$ .

### Beispiel

Wir setzen die Berechnung des letzten Beispiels fort:

1. Für den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  haben wir das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Damit ergibt sich

$$V_{\lambda_1} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Für den Eigenwert  $\lambda_2 = -1$  haben wir das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_2 E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Damit ergibt sich

$$V_{\lambda_2} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

## Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten

### ► Definition

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  und sei  $\lambda \in \mathbb{K}$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p_A$ . Dann lässt sich schreiben

$$p_A(z) = (z - \lambda)^n \cdot q(z),$$

wobei  $q$  ein Polynom ist. Die größte Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , für die eine solche Faktorisierung existiert, heißt algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ .

Die Dimension des Eigenraums zu  $\lambda$  wird die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$  genannt. ◀

### Erläuterung

Das Zusammenspiel der gegebenen Vielfachheiten wird noch Bedeutung bekommen. An dieser Stelle fällt auf, dass die geometrische Vielfachheit etwas mit der Dimension von Vektorräumen zu schaffen hat, in denen wir später noch geometrische Überlegungen anstellen werden (so wird von Längen und Winkeln die Rede sein). Der Name kann damit gerechtfertigt werden. Gleiches gilt bei der algebraischen Vielfachheit, bezieht sich diese doch auf eine Zerlegung von Polynomen, was in die mathematische Disziplin der Algebra fällt.

**Beispiel**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist das charakteristische Polynom von  $A$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda + i)(\lambda - i) \end{aligned}$$

Die (komplexen) Eigenwerte von  $A$  sind also  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$ . Die algebraische Vielfachheit ist jeweils 1.

**Erläuterung**

Fassen wir im obigen Beispiel  $A$  als eine Matrix mit reellen Einträgen auf, so besitzt diese keinen Eigenwert, da das charakteristische Polynom keine reelle Nullstelle hat.

**Beispiel**

Sei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist das charakteristische Polynom von  $B$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 \end{aligned}$$

Die algebraische Vielfachheit des (einzigen) Eigenwerts  $\lambda_1 = 2$  ist also 2. Wir berechnen ferner die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_1$ , also die Dimension des zugehörigen Eigenraums  $V_{\lambda_1} = V_2$ :

$$(B - \lambda_1 E_2) v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_2 = 0$$

Folglich gilt

$$V_2 = \text{Kern}(B - 2E_2) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

sodass die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_1$  gleich 1 ist.

### ■ Satz

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist immer kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit. ■

### Erläuterung

Ist für einen Eigenwert die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische, so wird es keine Basis aus Eigenvektoren geben. Allerdings können sie durch Hinzunahme anderer Vektoren zu einer Basis ergänzt werden. Solche „Ersatzvektoren“ finden wir, indem wir die Eigenwertgleichung verallgemeinern: Jeder Eigenvektor  $v$  von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  erfüllt nicht nur die Eigenwertgleichung

$$(A - \lambda E)v = 0,$$

sondern gleichfalls die Gleichung

$$(A - \lambda E)^k v = 0 \quad (\text{Hauptvektorgleichung}),$$

wobei  $k$  die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda$  ist. Lösungen der Hauptvektorgleichung heißen Hauptvektoren ( $k$ -ter Stufe). Ein Eigenvektor  $v$  wird bereits beim Exponenten 1 von  $(A - \lambda E)$  auf den Nullvektor abgebildet, also auch für  $k > 1$ , denn

$$(A - \lambda E)^k v = (A - \lambda E)^{k-1} (A - \lambda E)v = (A - \lambda E)^{k-1} 0 = 0.$$

Somit sind Eigenvektoren auch Hauptvektoren. Weiterhin kann es aber noch Lösungen der Hauptvektorgleichung geben, die nicht Eigenvektoren sind, und es gilt: Zu einer  $k$ -fachen Nullstelle des charakteristischen Polynoms existieren genau  $k$  linear unabhängige Hauptvektoren. Diese sind Lösungen der Hauptvektorgleichung

$$(A - \lambda E)^k v = 0.$$

Die Berechnung einer Basis aus Hauptvektoren geschieht folgendermaßen: Für jeden Eigenwert  $\lambda$  berechnen wir die Eigenvektoren mithilfe der Eigenwertgleichung

$$(A - \lambda E)v = 0.$$

Ist die algebraische Vielfachheit  $k$  von  $\lambda$  größer als die geometrische, so heben wir den Exponenten von  $(A - \lambda E)$  um eins an und lösen das Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)^2 v = 0.$$

Neben den bereits gefundenen Eigenvektoren kann es hierzu weitere Hauptvektoren geben. Dies ist dann der Fall, wenn die Anzahl der Nullzeilen nach Anwendung des Gauß-Algorithmus im Vergleich zum vorigen Gleichungssystem

(mit Exponent 1) angestiegen ist. Für jede hinzugekommene Nullzeile können wir unsere Basis um einen Hauptvektor ergänzen, wobei wir lediglich beachten müssen, dass sie von den bisherigen Basisvektoren linear unabhängig sind. Insgesamt benötigen wir zum Eigenwert  $\lambda$  so viele Basisvektoren, wie die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  beträgt. Haben wir noch nicht genug, erhöhen wir den Exponenten von  $(A - \lambda E)$  weiter und lösen nacheinander

$$(A - \lambda E)^l v = 0$$

für  $l = 3, 4, \dots, k$ , bis wir genug Hauptvektoren für die Basis gefunden haben.

### Beispiel

Wir wollen die Eigen- und Hauptvektoren der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnen: Das charakteristische Polynom ist  $(2 - \lambda)^3$ , wodurch mit  $\lambda = 2$  ein dreifacher Eigenwert vorliegt. Zur Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren benötigen wir nicht einmal den Gauß-Algorithmus:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

führt zu einem linear unabhängigen Eigenvektor, nämlich mit der Wahl  $x = 1$  zu  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Für die Hauptvektoren bilden wir das Quadrat von  $A - 2E$ :

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

liefert uns sämtliche Linearkombinationen von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als mögliche Hauptvektoren.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  haben wir aber schon als Eigenvektor identifiziert, womit  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als ein gesuchter Hauptvektor bleibt. Wir brauchen insgesamt drei linear unabhängige Eigen- und Hauptvektoren (da 2 ein dreifacher Eigenwert ist), also müssen wir noch  $(A - 2E)^3$  berechnen:

$$(A - 2E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Hier ist jeder Vektor eine Lösung, linear unabhängig zu den bisherigen beiden ist beispielsweise  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Somit besteht also die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigen- und Hauptvektoren von  $M$ .

## Ausblick

Eigenwerte und Eigenvektoren sind für sich interessante Objekte, denn mit ihnen sind wesentliche geometrische Eigenschaften verbunden, die wir bereits bildlich wahrgenommen haben. Es wird Sie eventuell in Kursen zur Physik erstaunen, dass wesentliche Aussagen dieser Disziplin tatsächlich über Untersuchungen von Eigenwerten und -vektoren zustande kommen. Dort werden u. a. Vektorräume unendlicher Dimension betrachtet. Dann sind nicht mehr nur Matrizen Gegenstand der Überlegungen, sondern sogenannte Operatoren, für welche sogenannte Spektren untersucht werden. Diese können wir uns als Menge verallgemeinerter Eigenwerte vorstellen. Ein wichtiger Operator ist dann der sogenannte „Hamilton Operator“ in der Quantenmechanik. Sein Spektrum liefert die möglichen Energiewerte, die in einem betrachteten System auftreten können, mit dem er assoziiert ist.

Im Rahmen der Mathematik selbst werden uns Basen aus Eigenvektoren interessieren. Wenn solche nämlich existieren, lassen sich mit ihrer Hilfe lineare Abbildungen besonders einfach darstellen. Die Darstellung einer solchen als Matrix bekommt dann nämlich Diagonalgestalt.

Die Hauptvektoren sahen wir als eine natürliche Verallgemeinerung der Eigenvektoren. Sie spielen z. B. dann eine Rolle, wenn eine Matrix sich gerade nicht in Diagonalgestalt bringen lässt, aber immerhin noch in eine andere angenehme Form, die sogenannte Jordan'sche Normalform.

## Selbsttest

**I.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ( $\dim V = n$ ),  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $A$  eine darstellende Matrix von  $L$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Zwei verschiedene Eigenvektoren von  $L$  sind linear unabhängig.
- (2) Zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert von  $L$  sind linear abhängig.
- (3) Zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von  $L$  sind linear unabhängig.
- (4) Wenn  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $L$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist, so ist  $-v$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-\lambda$ .
- (5) Wenn  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $L$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist, so ist  $-v$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .
- (6)  $0 \in V$  ist ein Eigenvektor von  $L$ .
- (7) Das charakteristische Polynom von  $A$  bzw.  $L$  ist gegeben durch  $p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ .
- (8) Das charakteristische Polynom von  $A$  bzw.  $L$  hat den Grad  $n$ .
- (9)  $v \in V$  ist genau dann ein Eigenvektor von  $L$ , wenn  $v$  Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $L$  ist.
- (10)  $0 \in \mathbb{K}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $L$ , wenn  $\det A = 0$ .
- (11)  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $L$ , wenn  $\text{Kern}(A - \lambda E_n) \neq \{0\}$ .
- (12) Der Eigenraum zu einem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  von  $L$  ist gegeben durch  $V_\lambda = \{v \in V \mid v \text{ ist Eigenvektor von } L \text{ zum Eigenwert } \lambda\}$ .
- (13) Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts von  $L$  ist immer größer oder gleich seiner geometrischen Vielfachheit.
- (14) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von  $L$  ist gleich  $n$ .
- (15) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von  $L$  ist gleich  $n$ .



# 12 Koordinatenabbildung und Basiswechsel

## Einblick

Wir haben bereits gesehen, dass die darstellende Matrix einer linearen Abbildung  $L: V \rightarrow W$  zwischen zwei Vektorräumen von den gewählten Basen abhängt. Auf den ersten Blick scheint es die beste Idee zu sein, stets immer die Standardbasis zu wählen, weil diese eine besonders einfache Gestalt hat. Allerdings lässt sich daraus keineswegs folgern, dass dann auch die darstellende Matrix besonders einfach ist. Um die damit verknüpften Fragen zu beantworten, werden hier zuerst untersucht, was genau bei einem Wechsel der jeweils betrachteten Basis eigentlich passiert. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist die sogenannte Koordinatenabbildung, durch welche Elemente eines beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraums stets mit den vertrauten Vektoren von  $\mathbb{K}^n$  assoziiert werden.

## Die Koordinatenabbildung

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\dim V = n$ . Sei ferner eine Basis  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  von  $V$  gegeben. Die Abbildung

$$K_B: V \rightarrow \mathbb{K}^n, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatenabbildung (bezüglich der Basis  $B$ ), wobei für jedes  $v \in V$  die  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  jene eindeutig bestimmten Skalare mit

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$$

sind. ◀

**Erläuterung**

Zumeist stellt sich das Problem, dass die Elemente eines  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  nicht a priori in „einfacher“ Form vorliegen, z. B. nicht in Form eines Spaltenvektors  $v \in \mathbb{K}^n$ . Ist jedoch eine Basis  $B$  von  $V$  gegeben, so können wir uns mithilfe der Basisdarstellung gerade eine bijektive lineare Abbildung  $K_B: V \rightarrow \mathbb{K}^n$  konstruieren, sodass jedem Vektor  $v \in V$  in eindeutiger Weise ein Vektor  $K_B(v) \in \mathbb{K}^n$  zugeordnet ist und umgekehrt. Somit ist dann wirklich jedem Vektor eines beliebigen Vektorraums ein Element von  $\mathbb{K}^n$  zugeordnet; dieser ist also der Raum, auf den wir uns für weitere Untersuchungen stets zurückziehen können. Die Eindeutigkeit resultiert dabei aus der Tatsache, dass ja gerade die Darstellung eines jeden Vektors für eine fest gegebene Basis eindeutig ist.

**Beispiel**

Wir wählen als Basis von  $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ :

$$E = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Was ist die Koordinatenabbildung  $K_E$ ?

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine beliebige  $2 \times 2$ -Matrix mit Einträgen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Dann ist die Basisdarstellung von  $A$  bezüglich  $E$  gegeben durch

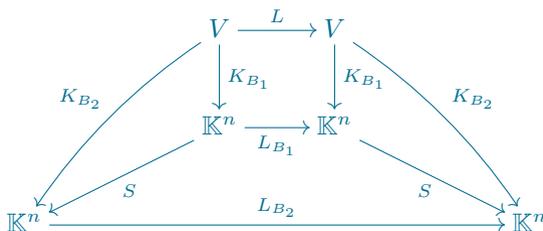
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$K_E: M(2 \times 2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^4, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

**Darstellende Matrizen und Basiswechsel****► Definition**

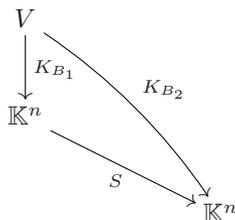
Sei  $V$  ein Vektorraum und  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann ist der Basiswechsel bezüglich zweier verschiedener Basen  $B_1 = (b_1, \dots, b_n)$  und  $B_2 = (v_1, \dots, v_n)$  durch folgende Verknüpfung von Abbildungen gegeben:



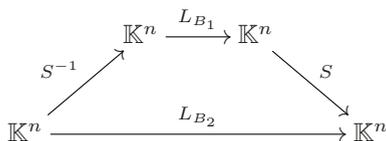
- $K_{B_i}$  : Koordinatenabbildung bezüglich der Basis  $B_i$
- $L_{B_i}$  : darstellende Matrix von  $L$  bezüglich  $B_i$  ( $i = 1, 2$ )
- $S$  : Transformationsmatrix

**Erläuterung**

Es liegt also eine lineare Abbildung  $L$  vor, die von  $V$  nach  $V$  abbildet. Nun können wir  $V$ , vermöge  $K_{B_1}$  bzw.  $K_{B_2}$ , mit  $\mathbb{K}^n$  assoziieren. Die entsprechenden darstellenden Matrizen  $L_{B_1}$  bzw.  $L_{B_2}$  „leben“ dann im unteren Teil des Diagramms und bilden jeweils den  $\mathbb{K}^n$  auf den  $\mathbb{K}^n$  ab. Allerdings sind nun verschiedene Basen, nämlich  $B_1$  und  $B_2$ , im Spiel. Es bleibt daher die Frage, wie die „Verwandlung“ von  $L_{B_1}$  zu  $L_{B_2}$  ermöglicht wird. Die darstellenden Matrizen  $L_{B_1}$  und  $L_{B_2}$  sind aber gerade über die sogenannte Transformationsmatrix  $S = K_{B_2} \circ K_{B_1}^{-1}$  verknüpft, was aus folgendem Teil des Diagramms in der Definition klar wird:



Der folgende Ausschnitt aus dem kommutativen Diagramm in der Definition:



zeigt, dass

$$\begin{aligned}
 L_{B_2} &= S \circ L_{B_1} \circ S^{-1} \\
 &= SL_{B_1}S^{-1}
 \end{aligned}$$

gilt.

Ein Diagramm ist dabei kommutativ, wenn verschiedene Verkettungen von Abbildungen das gleiche Ergebnis liefern. Selbstverständlich können wir aus obigem Diagramm analog auch  $L_{B_1}$  mittels der Transformationsmatrix und  $L_{B_2}$  erhalten.

Die Matrix  $L_{B_1} = (a_{ij})$  im ersten Diagramm ist tatsächlich die darstellende Matrix von  $L$  bezüglich der Basis  $B_1$ , wie sie zuvor (im Abschnitt „darstellende Matrix einer linearen Abbildung“) konstruiert wurde. Für die  $k$ -te Spalte von  $L_{B_1}$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} L_{B_1} e_k &= (K_{B_1} \circ L \circ K_{B_1}^{-1})(e_k) \\ &= (K_{B_1} \circ L)(K_{B_1}^{-1}(e_k)) \\ &= (K_{B_1} \circ L)(b_k) \\ &= K_{B_1}(L(b_k)) \end{aligned}$$

Das ist aber gerade der Koordinatenvektor von  $L(b_k)$  bezüglich der Basis  $B_1$ , sodass wir

$$L(b_k) = a_{1k}b_1 + \dots + a_{nk}b_n$$

haben.

Wir können den Basiswechsel von  $B_1$  nach  $B_2$  auch direkt über die Transformationsmatrix  $S$  darstellen, da

$$L_{B_2} = SL_{B_1}S^{-1}$$

gilt. Die  $k$ -te Spalte der Transformationsmatrix  $S = (s_{ij})$  sieht so aus:

$$\begin{aligned} S e_k &= (K_{B_2} \circ K_{B_1}^{-1})(e_k) \\ &= K_{B_2}(K_{B_1}^{-1}(e_k)) \\ &= K_{B_2}(b_k) \end{aligned}$$

Dies ist gerade der Koordinatenvektor des  $k$ -ten Basisvektors von  $B_1$  bezüglich der Basis  $B_2$ , sodass

$$b_k = s_{1k}v_1 + \dots + s_{nk}v_n.$$

Für die  $k$ -te Spalte der inversen Transformationsmatrix  $S^{-1} = (\tilde{s}_{ij})$  gilt hingegen:

$$\begin{aligned} S^{-1} e_k &= (K_{B_1} \circ K_{B_2}^{-1})(e_k) \\ &= K_{B_1}(K_{B_2}^{-1}(e_k)) \\ &= K_{B_1}(v_k) \end{aligned}$$

Dies ist gerade der Koordinatenvektor des  $k$ -ten Basisvektors von  $B_2$  bezüglich der Basis  $B_1$ , sodass

$$v_k = \tilde{s}_{1k}b_1 + \dots + \tilde{s}_{nk}b_n.$$

**Beispiel**

Ein besonders wichtiger Fall ist der, bei dem  $V = \mathbb{K}^n$  ist, und  $B_1$  ist die Standardbasis von  $\mathbb{K}^n$ . In diesem Fall ist die  $k$ -te Spalte der inversen Transformationsmatrix einfach der  $k$ -te Basisvektor von  $B_2$ :

$$v_k = \tilde{s}_{1k}e_1 + \dots + \tilde{s}_{nk}e_n = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{1k} \\ \vdots \\ \tilde{s}_{nk} \end{pmatrix}$$

**Beispiel**

Sei

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis  $E$  von  $\mathbb{R}^2$  gegeben ist durch

$$L_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die darstellende Matrix  $L_B = (a_{ij})$  bezüglich der Basis

$$B = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)?$$

Wir erhalten nach unseren bisherigen Kenntnissen

$$L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = -1, a_{21} = 2$$

und

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = 0, a_{22} = 1.$$

Die darstellende Matrix ist also

$$L_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir nun  $L_B$  über die Transformationsmatrix  $S$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_E} & \mathbb{K}^n \\ \uparrow S^{-1} & & \downarrow S \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_B} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Die Spalten der inversen Transformationsmatrix sind hier gerade die Basisvektoren:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mittels des Gauß-Algorithmus kann die Inverse von  $S^{-1}$  berechnet werden:

$$S = (S^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben final:

$$\begin{aligned} L_B &= SL_E S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Erläuterung

Wir sahen im letzten Beispiel, wie der Basiswechsel praktisch realisiert wird, und das Ergebnis des Wechsels präsentiert sich in einer darstellenden Matrix, die natürlich von der in der ursprünglichen Basis abweicht. Gewisse Charakteristika linearer Abbildungen ändern sich allerdings nicht. So haben Koordinatentransformationen auf die Eigenwertberechnung keinen Einfluss, denn die charakteristischen Polynome der Matrizen  $A$  und  $B = SAS^{-1}$  sind gleich

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(SAS^{-1} - \lambda E) \\ &= \det(SAS^{-1} - \lambda SES^{-1}) \\ &= \det(S(A - \lambda E)S^{-1}) \\ &= \det S \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det S^{-1} \\ &= \det(A - \lambda E) \\ &= p_A(\lambda). \end{aligned}$$

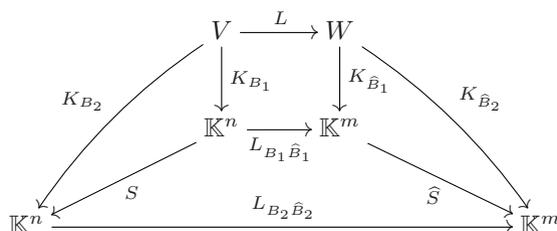
Ferner ändert sich auch die Determinante durch einen Basiswechsel nicht, denn es gilt:

$$\det B = \det(SAS^{-1}) = \det S \cdot \det A \cdot \det S^{-1} = \det S \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det S} = \det A.$$

## Ausblick

Was wir über darstellende Matrizen gelernt hatten, war hier wieder bedeutsam und wir haben alles in einen größeren Rahmen eingeordnet, sodass wir nun zwischen verschiedenen Basen „umschalten“ können. Dies ist sehr technisch und es scheint hier besonders angebracht, die Überlegungen anhand der Beispiele zu verstehen – und dann sogleich erneut alleine zu rechnen. Die endgültige Befreiung vom Diktat einer bestimmten Basis ist allerdings nicht nur Selbstzweck, wie wir im kommenden Kapitel sehen werden.

Bei unseren Überlegungen haben wir stets lineare Abbildungen von  $V$  nach  $V$  betrachtet. Allerdings können wir durchaus auch solche von  $V$  (mit Dimension  $n$ ) in einen anderen Vektorraum  $W$  (mit Dimension  $m$ ) untersuchen. Wir werden daher abschließend das entsprechende Diagramm für den allgemeineren Fall vorstellen. Mit dem bisher Gelernten ist es einfach, die entsprechenden Gleichungen für einen Basiswechsel aufzustellen; Sie müssen nur wie zuvor den Abbildungspfeilen folgen. Wie zeigen Ihnen hier das entsprechende Diagramm:



Dabei ist  $L_{B_i \hat{B}_i}$  die darstellende Matrix der Abbildung  $L: V \rightarrow W$  für den Fall, dass  $V$  die Basis  $B_i$  und  $W$  die Basis  $\hat{B}_i$  hat.

## Selbsttest

**I.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ( $\dim V = n$ ) mit Basen  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$ ,  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung,  $L_{\mathcal{B}_i}$  bzw.  $K_{\mathcal{B}_i}$  die entsprechenden darstellenden Matrizen bzw. Koordinatenabbildungen ( $i = 1, 2$ ) sowie  $S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$  die Transformationsmatrix. Welche der folgenden Formeln sind stets richtig?

- |   |  |
|---|--|
| (1) $S^{-1} = K_{\mathcal{B}_1}^{-1} \circ K_{\mathcal{B}_2}$                     | (11) $L_{\mathcal{B}_1} = K_{\mathcal{B}_1}^{-1} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_1}$      |
| (2) $S^{-1} = K_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ K_{\mathcal{B}_1}$                     | (12) $L = K_{\mathcal{B}_1}^{-1} \circ L_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_1}$      |
| (3) $S = L_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_1}$                               | (13) $L = K_{\mathcal{B}_1} \circ L_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$      |
| (4) $K_{\mathcal{B}_2} = S \circ K_{\mathcal{B}_1} \circ S^{-1}$                  | (14) $L^{-1} = K_{\mathcal{B}_1} \circ L_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ |
| (5) $L_{\mathcal{B}_2} = SL_{\mathcal{B}_1}S^{-1}$                                | (15) $K_{\mathcal{B}_2} = S \circ K_{\mathcal{B}_1}$                                   |
| (6) $L_{\mathcal{B}_2} = S^{-1}L_{\mathcal{B}_1}S$                                | (16) $K_{\mathcal{B}_1} = K_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ S$                              |
| (7) $SL_{\mathcal{B}_2} = L_{\mathcal{B}_1}S$                                     | (17) $\text{Bild } K_{\mathcal{B}_1} \subseteq \mathbb{K}^n$                           |
| (8) $SL_{\mathcal{B}_2} = SL_{\mathcal{B}_1}$                                     | (18) $\text{Bild } K_{\mathcal{B}_1} = \mathbb{K}^n$                                   |
| (9) $L_{\mathcal{B}_1} = SL_{\mathcal{B}_2}S^{-1}$                                | (19) $\text{Kern } K_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$  |
| (10) $L_{\mathcal{B}_1} = K_{\mathcal{B}_1} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ | (20) $\text{Kern } L_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$  |
|   | (21) $\det S \neq 0$   |

**II.** Sei  $L: M(3 \times 5, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lineare Abbildung und  $A_L$  eine darstellende Matrix von  $L$ . Welches Format hat  $A_L$ ?

- |  |   |
|--|---|
| (1) $A_L \in M(3 \times 15, \mathbb{R})$ | (5) $A_L \in M(5 \times 3, \mathbb{R})$ |
| (2) $A_L \in M(15 \times 3, \mathbb{R})$ | (6) $A_L \in M(3 \times 5, \mathbb{R})$ |
| (3) $A_L \in M(3 \times 45, \mathbb{R})$ | (7) $A_L \in M(9 \times 5, \mathbb{R})$ |
| (4) $A_L \in M(45 \times 3, \mathbb{R})$ | (8) $A_L \in M(5 \times 9, \mathbb{R})$ |



# 13 Diagonalisierung

## Einblick

Dieses Kapitel ist nur die logische Konsequenz des vorhergehenden. Wir lernten dort, wie wir darstellende Matrizen bezüglich einer Basis in eine solche bezüglich einer anderen Basis transformieren. Es bleibt die Frage offen, ob es Basen gibt, in denen die darstellende Matrix besonders einfach ist. Die Antwort lautet ja, sofern bestimmte Bedingungen erfüllt sind. Die Diagonalgestalt hat diverse Vorteile, denn mit Matrizen in dieser Gestalt können wir sehr leicht rechnen und auch die Eigenwerte müssen wir nie wieder bestimmen, diese stehen dann nämlich genau auf der Diagonalen. Nicht immer ist Diagonalisierung jedoch möglich, wir kommen dann aber zu einer anderen Darstellung, der sogenannten Jordan'schen Normalform.

## Diagonalisierbare Matrizen

### ► Definition

Eine quadratische Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  heißt diagonalisierbar, falls eine invertierbare Matrix  $S \in M(n \times n, \mathbb{K})$  existiert, sodass  $D = SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist. ◀

### Erläuterung

Die Matrix  $A$  kann dann umgekehrt wieder aus der Diagonalmatrix  $D$  berechnet werden über  $A = S^{-1}DS$ . Wir können unter Umständen also eine Matrix  $S$  finden, die  $A$  in Diagonalform transformiert. Die entsprechende Basis, in die wir dabei wechseln, besteht gerade aus den Eigenvektoren von  $A$ .

### ■ Satz

Eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von  $\mathbb{K}^n$  gibt, die aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.

**Beweis:** Im Folgenden ist wie üblich  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis von  $\mathbb{K}^n$ . Zunächst zeigen wir die Richtung „ $\Rightarrow$ “: Sei  $A$  diagonalisierbar mit Transformationsmatrix  $S$ , sodass  $D = SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Seien  $v_1, \dots, v_n$  die Spalten von  $S^{-1}$  (insbesondere gilt dann  $Sw_i = e_i$ ). Diese bilden eine Basis von  $\mathbb{K}^n$ . Tatsächlich sind sie auch Eigenvektoren von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , denn für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\begin{aligned} Av_i &= S^{-1}DSv_i \\ &= S^{-1}De_i \\ &= S^{-1}\lambda_i e_i \\ &= \lambda_i(S^{-1}e_i) \\ &= \lambda_i v_i. \end{aligned}$$

Nun „ $\Leftarrow$ “: Sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und sei  $S^{-1} = (v_1, \dots, v_n)$  die invertierbare Matrix, die diese Eigenvektoren als Spalten hat. Dann ist  $D = SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix. Dies wird klar, indem wir die  $k$ -te Spalte von  $D$  berechnen:

$$\begin{aligned} De_k &= SAS^{-1}e_k \\ &= SA v_k \\ &= S(\lambda_k v_k) \\ &= \lambda_k(Sv_k) \\ &= \lambda_k e_k. \end{aligned}$$

### Erläuterung

Wir betrachten das Geschehen zur Verdeutlichung in folgendem kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \\ \uparrow S^{-1} & & \downarrow S \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$A$ : diagonalisierbare Matrix

$D$ : Diagonalmatrix

$S^{-1}$ : inverse Transformationsmatrix mit einer Basis aus Eigenvektoren von  $A$  als Spalten

### ■ Satz

Eine Matrix mit komplexen Einträgen ist diagonalisierbar, wenn die geometrische Vielfachheit ihrer Eigenwerte der jeweiligen algebraischen Vielfachheit entspricht.

**Beweis:** Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte einer  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit komplexen Einträgen ist  $n$ , da das charakteristische Polynom in  $n$  Linearfaktoren zerfällt, wobei die  $\lambda_i$  nicht notwendigerweise verschieden sein müssen:  $p_A(x) = \pm(x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$ . (Jedes komplexe Polynom  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zerfällt auf diese Weise; dies ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra.) Nach Voraussetzung ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume von  $A$  damit ebenfalls  $n$ . Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, können wir einmal gewählte Basen der Eigenräume zu einer Basis von  $\mathbb{C}^n$  zusammenführen. ■

### Erläuterung

Mithilfe einer Basisdarstellung können wir natürlich auch wieder lineare Abbildungen betrachten, die zuerst nicht durch eine Matrix gegeben sind.

### Beispiel

Wir möchten die lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ , gegeben durch

$$L(p)(x) = p'(x),$$

diagonalisieren. ( $L$  ordnet jedem Polynom höchstens zweiten Grades seine Ableitung zu.) Die darstellende Matrix von  $L$  bezüglich der Basis  $E = (e_0, e_1, e_2) \in (\mathbb{R}_{\leq 2}[x])^3$  mit  $e_0(x) = 1$ ,  $e_1(x) = x$ ,  $e_2(x) = x^2$  ist gegeben durch

$$L_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da

$$\begin{aligned} L(e_0)(x) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2, \\ L(e_1)(x) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2, \\ L(e_2)(x) &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2. \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist gegeben durch

$$p_{L_E}(\lambda) = \det(L_E - \lambda E_3) = -\lambda^3.$$

Die Matrix  $L_E$  und damit auch die lineare Abbildung  $L$  haben also nur einen einzigen Eigenwert,  $\lambda = 0$ . Der zugehörige Eigenraum der darstellenden Matrix

$L_E$  wird vom Vektor  $(1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$  aufgespannt. Die algebraische Vielfachheit von  $\lambda = 0$  ist drei, die geometrische ist eins. Übersetzen wir nun das Erhaltene mithilfe der Koordinatenabbildung zurück in die Welt der Polynome, haben wir als Eigenraum der linearen Abbildung  $L$  den Untervektorraum aller konstanten Polynome

$$V_0 = \text{Span}\{e_0\}.$$

Da wir  $\mathbb{R}^3$  nicht mit  $(1, 0, 0)^T$  bzw.  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  nicht mit  $e_0$  alleine aufspannen können, ist  $L$  nicht diagonalisierbar.

## Weitere Kriterien für Diagonalisierbarkeit

### ■ Satz

Eine quadratische Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  ist diagonalisierbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $A$  hat  $n$  (paarweise) verschiedene Eigenwerte.
2.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $A = A^T$  (d. h.,  $A$  ist symmetrisch).
3.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und  $A = A^*$  (d. h.,  $A$  ist selbstadjungiert). ■

### Erläuterung

Die obigen Bedingungen sind nur hinreichend: Es gibt auch Matrizen, die diagonalisierbar sind, ohne eines dieser Kriterien zu erfüllen.

Der letzte Satz gibt uns also hilfreiche Kriterien, um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen. So haben wir es nämlich in der Praxis recht oft mit symmetrischen und selbstadjungierten Matrizen zu tun, diese sind aber stets diagonalisierbar.

Wir sprechen in obigem Zusammenhang oft von „paarweise“ verschiedenen statt einfach nur von „verschiedenen“ Eigenwerten. Gemeint ist damit, dass je zwei Eigenwerte nicht gleich sind. So werden Missverständnisse vermieden, denn verstehen wir unter „verschieden“ das Gegenteil von „gleich“, so sind die Zahlen 1, 2 und 1 verschieden (da sie nicht alle gleich sind).

### Beispiel

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = 1$$

und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2 = -1.$$

Dies können wir durch Nachrechnen bestätigen:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 v_2$$

Die Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind linear unabhängig und bilden folglich eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . Um  $A$  zu diagonalisieren, schreiben wir diese Basis in die Spalten der inversen Transformationsmatrix:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von  $S^{-1}$  ist die Transformationsmatrix  $S$  selbst und kann z. B. mit dem Gauß-Algorithmus berechnet werden. Wir erhalten dann:

$$S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen durch Nachrechnen, dass  $A$  bezüglich der Basis aus Eigenvektoren die zu erwartende Diagonalgestalt  $D$  hat:

$$\begin{aligned} D &= SAS^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Erläuterung

Die Reihenfolge der Eigenwerte in der Diagonalmatrix ist grundsätzlich frei wählbar: Wollen wir den  $i$ -ten Eigenwert in der  $j$ -ten Spalte haben, so müssen wir einen zugehörigen Eigenvektor (es können ja auch mehrere sein) nur in die  $j$ -te Spalte der Transformationsmatrix  $S^{-1}$  schreiben.

**Beispiel**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $A$  symmetrisch und daher diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom  $p_A$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen dieses Polynoms, welche z. B. mit der aus der Schule bekannten  $p$ - $q$ -Formel (in einigen Bundesländern auch „Mitternachtsformel“ genannt) berechnet werden können; in diesem Fall ist  $p = -2$  und  $q = -3$ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

Es gibt also eine Transformationsmatrix  $S$ , sodass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Erläuterung**

Es gibt Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind. Allerdings ist damit nicht alles verloren, es gibt dann nämlich noch die sogenannte Jordan'sche Normalform. Es handelt sich dabei um eine Matrix  $J$  in der folgenden Form

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix} = SAS^{-1},$$

welche auch als Blockdiagonalform bezeichnet wird und die einer Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  zugeordnet wird. Die Matrix  $S^{-1}$  hat in den Spalten gerade die Hauptvektoren von  $A$ , wir erkennen also oben wieder den Wechsel in eine andere Basis (gerade durch  $SAS^{-1}$ ). Die  $J_i$  sind Matrizen und heißen Jordan-Blöcke:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Ihre Einträge  $\lambda_i$  sind dabei die Eigenwerte von  $A$ , wobei es zu jedem dieser Eigenwerte eine Anzahl von Jordan-Blöcken gibt, die gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist. Die Spalten von  $S^{-1}$  sind also die Hauptvektoren in der Reihenfolge der zugehörigen Jordan-Blöcke in  $J$ .

## Ausblick

Wir sahen, was der Wechsel in eine besondere Basis, nämlich einer solchen aus Eigenvektoren, bewirkt. Es ist nicht nur die einfache Diagonalgestalt selbst, die vieles einfach macht, sondern auch die Tatsache, dass dann die Eigenwerte bereits offensichtlich sind, diese stehen ja gerade auf der Diagonalen. Auch den Fall, für den Eigenvektoren „fehlen“, können wir noch immer unter Verwendung von Hauptvektoren „retten“, das Ergebnis in Gestalt der Jordan'schen Normalform ist allerdings nicht mehr ganz so schön.

Diagonalmatrizen spielen auch in anderen Bereichen eine Rolle, denn in der Theorie der Differenzialgleichungen können sie in bestimmten Fällen zu Lösungen führen.

Liegt eine symmetrische Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  vor, gibt es noch eine Besonderheit. In diesem Zusammenhang wird nämlich die Frage gestellt, ob es eine sogenannte orthogonale Matrix  $O$  gibt, sodass  $A$  über  $OAO^{-1}$  in Diagonalgestalt gebracht wird. Es wird dann von einer „Hauptachsentransformation“ gesprochen.

## Selbsttest

I. Welche der folgenden Aussagen sind hinreichende Bedingungen dafür, dass eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  diagonalisierbar ist?

- (1) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von  $A$  ist  $n$ .
- (2) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von  $A$  ist  $n$ .
- (3) Für jeden Eigenwert von  $A$  ist die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit.
- (4) Für jeden Eigenwert von  $A$  ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit.
- (5) Es gibt eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ , die aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.
- (6) Kein Eigenvektor von  $A$  ist der Nullvektor.
- (7)  $A$  ist symmetrisch.
- (8)  $A$  ist eine Diagonalmatrix.
- (9)  $A$  ist eine obere Dreiecksmatrix.
- (10)  $A$  ist die Nullmatrix.
- (11)  $A = -A$
- (12)  $A = A^T$
- (13)  $A$  ist die Einheitsmatrix.
- (14)  $\det A \neq 0$
- (15)  $A$  hat  $n$  paarweise verschiedene Eigenwerte.
- (16) Es existiert ein Eigenraum von  $A$  mit Dimension  $n$ .
- (17) Es existiert eine invertierbare Matrix  $S$ , sodass die Matrix  $SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist.
- (18) Es existiert eine invertierbare Matrix  $R$ , sodass die Matrix  $R^{-1}AR$  eine Diagonalmatrix ist.
- (19) Der Grad des charakteristischen Polynoms von  $A$  ist  $n$ .
- (20) Das charakteristische Polynom von  $A$  hat  $n$  paarweise verschiedene komplexe Nullstellen.
- (21) Das charakteristische Polynom von  $A$  hat  $n$  paarweise verschiedene reelle Nullstellen.



# 14 Normierte, euklidische und unitäre Vektorräume

## Einblick

Vektorräume sind Mengen zusammen mit einer Struktur. Für weitere Untersuchungen und Anwendungen können wir diese Räume selbst noch mit einem Zusatz versehen, der Längen- und Winkelmessungen ermöglicht. Damit lassen sich praktische Überlegungen anstellen – z. B. zur Entfernung von Punktteilchen nach einem Stoß, zum Brechungswinkel von Laserstrahlen beim Eintritt in ein dichteres Medium und zur Ablenkung von Lichtstrahlen durch eine Masse in der Relativitätstheorie. Aber auch innermathematische Betrachtungen – z. B. zur Bestimmung der Länge eines Polynoms, zur Berechnung des Winkels zwischen der Sinus- und Kosinusfunktion oder zur Orthogonalität allgemein – sind möglich. Die zuletzt genannten Punkte sind abstrakt und vorerst nicht greifbar. Ihnen liegt jedoch zugrunde, dass der gewöhnliche Längen- und Winkelbegriff vom augenscheinlichen abstrahierbar ist, der für die Vektorräume  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  noch die übliche Bedeutung hat, da diese einfach als Ebene oder den uns umgebenden Raum denkbar sind.

Der Begriff der Länge ist mit der Norm assoziiert, der des Winkels wesentlich mit dem Skalarprodukt. Ein Vektorraum ergibt zusammen mit einer auf ihm definierten Norm einen normierten Vektorraum; ein Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt ergibt einen euklidischen (reeller Fall) bzw. unitären (komplexer Fall) Vektorraum.

Aus einem Skalarprodukt lässt sich stets eine Norm konstruieren, umgekehrt gilt dies nicht.

## Normierte Vektorräume

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

heißt Norm, falls gilt:

1.  $\|v\| \geq 0$  für alle  $v \in V$ , und  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$  (positive Definitheit),

2.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  für alle  $v, w \in V$  (Dreiecksungleichung),
3.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{K}, v \in V$ .

Ein Vektorraum  $V$  zusammen mit einer Norm  $\|\cdot\|$  heißt normierter Vektorraum, wir schreiben für diesen auch  $(V, \|\cdot\|)$ . ◀

### Erläuterung

Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , steht  $|\alpha|$  in Punkt (3) für den üblichen Betrag der Zahl  $\alpha$ . Dabei ist  $|\alpha| = \alpha$ , falls  $\alpha$  positiv oder null ist,  $-\alpha$  sonst. Wir erinnern daran, dass für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  der Betrag von  $\alpha = a + ib$  wie folgt gegeben ist:

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Durch  $\|v\|$  erhalten wir dann die „Länge“ des Vektors  $v \in V$ . Aber Achtung: Die mit  $\|v\|$  gemessene Länge von  $v$  hängt erwartungsgemäß (wir gehen später darauf genauer ein) von der jeweils gewählten Norm ab. So könnte die Länge mit einem Zoll- oder Zentimetermaßband gemessen werden, was jedoch nicht bedeutet, dass zwei verschiedene Normen zwangsläufig durch Skalierung auseinander hervorgehen.

Betrachten wir z. B. zwei Punkte in  $\mathbb{R}^3$ , die durch ihre Ortsvektoren  $v$  und  $w$  gegeben sind. Dann hat der Differenzvektor  $v - w$  (bzw.  $w - v$ ) gerade die Länge  $\|v - w\| = \|w - v\|$ . Für die sogenannte Standardnorm, im folgenden Beispiel behandelt, entspricht dann  $\|v - w\|$  dem üblichen Abstand der durch  $v$  und  $w$  gegebenen Punkte (z. B. auf einem Blatt Papier mit einem Lineal gemessen).

### Beispiel

Die sogenannte Standardnorm (auch euklidische Norm genannt) ist für  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  die Komponenten von  $x$  sind.

Seien

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

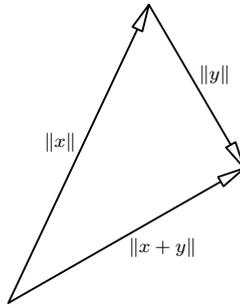
und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen für den Spezialfall  $n = 2$ , dass die Standardnorm tatsächlich eine Norm ist, prüfen also die Punkte der Definition:

1.  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$  ist offensichtlich,  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x\| = 0$  ebenfalls. Sei also  $x$  so, dass  $\|x\| = 0$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 = -x_2^2. \end{aligned}$$

Für  $x_2 \neq 0$  hätten wir  $x_1^2 < 0$ , was nicht möglich ist. Daher muss  $x_2 = 0$  sein, damit gleichfalls  $x_1 = 0$ .

2. Für den Nachweis der Dreiecksungleichung begnügen wir uns mit einer (im  $\mathbb{R}^2$  allerdings aussagekräftigen) Skizze, die gleichzeitig die Namensgebung erklärt:



3. Wir betrachten hierzu die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= |\alpha| \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= |\alpha| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

**Beispiel**

Die Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^n$  ist wie folgt gegeben:

$$\|x\|_{\max} = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Hierbei bezeichnet  $\max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$  die größte der Zahlen  $|x_1|, \dots, |x_n|$ .

## Skalarprodukte

### ► Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

heißt Skalarprodukt, falls für alle  $u, v, w \in V$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt:

1.  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , ferner  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$  (positive Definitheit),
2.  $\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$  (Linearität im zweiten Eingang),
3.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ .

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  heißt  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidischer Vektorraum, für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  unitärer Vektorraum. ◀

### Erläuterung

Bei euklidischen Vektorräumen folgt aus der dritten Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$$

also die Symmetrie des Skalarprodukts.

Die Forderung  $\langle u, u \rangle \geq 0$  scheint ohne Sinn, wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist, da keine Aussage über „größer“ oder „kleiner“ für komplexe Zahlen vorliegt. Jedoch folgt aus

$$\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$$

stets, dass  $\langle u, u \rangle$  eine reelle Zahl ist, was die vermeintliche Problematik löst, da die Ungleichung  $\langle u, u \rangle \geq 0$  für reelle Zahlen sinnvoll ist.

Bei unitären Vektorräumen lassen sich Skalare aus dem zweiten Eingang herausziehen, es liegt also Linearität in diesem vor:

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

Beim Herausziehen aus dem ersten Eingang ist zu beachten, dass der Skalar dabei komplex konjugiert wird:

$$\begin{aligned} \langle \lambda u, v \rangle &= \overline{\langle v, \lambda u \rangle} \\ &= \overline{\lambda \langle v, u \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Dies ist in der Literatur nicht einheitlich; teils werden Skalarprodukte unitärer Räume als linear im ersten Eingang definiert.

### Beispiel

Das sogenannte Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  (auch euklidisches Skalarprodukt genannt) ist definiert durch

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Für die zuvor eingeführte Standardnorm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  gilt  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ . Wie wir sehen werden, lässt sich derart immer eine Norm aus einem Skalarprodukt konstruieren.

Wir zeigen, dass das Standardskalarprodukt tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Seien also nachstehend  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

1. Als nicht offensichtliche Teilaussage der positiven Definitheit bleibt

$$\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Wir zeigen die Kontraposition; sei also  $u \neq 0$ . Dann gibt es (mindestens) eine Komponente, die nicht verschwindet. Sei diese Komponente ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u_1$ . („Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“, abgekürzt „o. B. d. A.“, heißt hier, dass sich an der Argumentation nichts Entscheidendes ändert, wenn eine andere Komponente betrachtet wird.) Wäre nun  $\langle u, u \rangle = 0$ , so gilt:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0 \Rightarrow u_1^2 = -u_2^2 - \dots - u_n^2$$

Die rechte Gleichung beinhaltet einen Widerspruch, denn die linke Seite ergibt eine positive Zahl und die rechte eine Zahl, die negativ oder null ist.

2. Die Linearität im zweiten Eingang ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle u, \lambda v + \mu w \rangle &= \sum_{i=1}^n u_i (\lambda v_i + \mu w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda u_i v_i + \mu u_i w_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n u_i v_i + \mu \sum_{i=1}^n u_i w_i \\ &= \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

3. Hier ergibt sich:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \langle v, u \rangle$$

**Beispiel**

Auf  $\mathbb{C}^n$  ist gleichfalls ein Standardskalarprodukt definiert:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$$

**■ Satz**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann gilt für alle  $u, v \in V$  die sogenannte Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$\langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle \geq |\langle u, v \rangle|^2$$

**Beweis:** Für  $v = 0$  ist diese Ungleichung richtig, da dann auf beiden Seiten Null steht. Es genügt also, den Fall  $v \neq 0$  zu betrachten.

Zunächst gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle \\ &= \langle u - \lambda v, u \rangle - \lambda \langle u - \lambda v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \bar{\lambda} \langle v, u \rangle - \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \overline{\lambda \langle u, v \rangle} - \lambda \langle u, v \rangle + |\lambda|^2 \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Wählen wir speziell

$$\lambda = \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{\langle v, v \rangle},$$

so wird diese Ungleichung zu

$$0 \leq \langle u, u \rangle - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle},$$

welche äquivalent zur Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ist. ■

**Erläuterung**

Diese Ungleichung hat diverse Konsequenzen und wird insbesondere als Hilfsmittel bei Beweisen verwendet.

**■ Satz**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Wird für alle  $u \in V$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

definiert, dann ist  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm auf  $V$ .

**Beweis:** Wir beschränken uns auf den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und zeigen die Dreiecksungleichung. Dass  $\|\cdot\|$  die anderen definierenden Eigenschaften einer Norm hat, können Sie leicht selbst zeigen. Seien  $x, y \in V$ , so gilt:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Das ist gerade das Quadrat der Dreiecksungleichung. ■

### Erläuterung

Um zu betonen, dass die Norm im obigen Satz aus dem Skalarprodukt entspringt, wird diese auch die vom Skalarprodukt induzierte Norm genannt.

Jeder Vektorraum mit einem Skalarprodukt wird auf die hier demonstrierte Weise zu einem normierten Vektorraum. Insgesamt wird durch ein Skalarprodukt die Berechnung von Winkeln und Längen ermöglicht, was bereits im Einblick angedeutet wurde.

### ► Definition

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum mit zugehöriger (induzierter) Norm  $\|\cdot\|$ . Für alle vom Nullvektor verschiedenen  $u, v \in V$  definieren wir den Winkel  $\angle(u, v) \in [0, \pi]$  zwischen  $u$  und  $v$  (bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) über die Gleichung

$$\cos(\angle(u, v)) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Ist  $u$  oder  $v$  der Nullvektor, so definieren wir  $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$ . ◀

### Erläuterung

Diese Definition ist sinnvoll und eindeutig, denn nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

und die Kosinusfunktion ordnet jedem Winkel  $\phi \in [0, \pi]$  genau einen Wert aus dem Intervall  $[-1, 1]$  zu.

### ► Definition

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zwei Vektoren  $u, v \in V$  heißen orthogonal (geschrieben  $u \perp v$ ), falls  $\langle u, v \rangle = 0$  gilt. Andere Formulierung:  $u$  steht senkrecht auf  $v$ . ◀

**Erläuterung**

Speziell für euklidische Vektorräume gilt:  $u \perp v \Leftrightarrow \angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$ .

**Beispiel**

Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ , das für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  über

$$\langle x, y \rangle_G = x^T G y$$

definiert ist mit

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es kann gezeigt werden, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Die zu  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  gehörige Norm bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_G$ . Wir berechnen nun den Winkel zwischen den Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_G &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für die Norm der Vektoren gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_G^2 &= \langle u, u \rangle_G \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|v\|_G^2 &= \langle v, v \rangle_G \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen  $u$  und  $v$  berechnet sich zu:

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle_G}{\|u\|_G \|v\|_G} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(u, v) = \frac{\pi}{3}.$$

Sowohl Winkel als auch Länge in einem euklidischen Vektorraum hängen demnach vom verwendeten Skalarprodukt ab – bezüglich des Standardskalarprodukts stehen  $u$  und  $v$  natürlich senkrecht aufeinander.

### Beispiel

Sei  $C^0([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$  der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ . Definieren wir für alle  $f, g \in C^0([0, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx,$$

erhalten wir ein Skalarprodukt auf  $C^0([0, 1])$ . Die nicht offensichtliche Eigenschaft ist  $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$  und setzt in jedem Fall Stetigkeit voraus. Betrachten wir nämlich die nichtstetige Funktion

$$\xi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist zwar  $\langle \xi, \xi \rangle = \int_0^1 \xi(x)^2 dx = 0$ , aber  $\xi$  ist dennoch nicht die Nullfunktion (welche im Raum der Funktionen der Nullvektor ist). Eine solche Situation kann bei stetigen Funktionen nicht auftreten; wenn eine stetige Funktion an einer Stelle von null verschieden ist, so ist sie auch in einer Umgebung dieser Stelle von null verschieden. Aus diesem Grund erhalten wir stets einen positiven Beitrag zum Integral.

## Das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren

### ■ Satz

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und seien  $u_1, \dots, u_k \in V$  Vektoren, die paarweise senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben, d. h., es gilt

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Das Symbol „ $\delta_{ij}$ “ heißt auch Kronecker-Delta. Dann sind  $u_1, \dots, u_k$  linear unabhängig.

**Beweis:** Für eine Linearkombination des Nullvektors mit den Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  und beliebigem Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0 &\Rightarrow \left\langle v_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta_{ij} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

### ► Definition

Sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis von  $V$ , deren Elemente paarweise senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben, heißt Orthonormalbasis. ◀

### Erläuterung

Eine orthogonale Basis genügt für zahlreiche Überlegungen. Es leuchtet aber ein, dass vielfach das Verwenden von normierten Vektoren Berechnungen drastisch vereinfacht.

### Beispiel

Die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts).

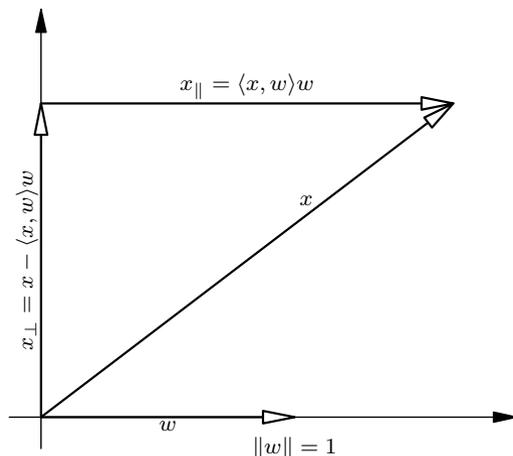
### ■ Satz

Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . Dann kann wie folgt eine Orthonormalbasis  $(u_1, \dots, u_n)$  von  $V$  konstruiert werden:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ u_2^\circ &= v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1, & u_2 &= \frac{u_2^\circ}{\|u_2^\circ\|} \\ &\vdots & &\vdots \\ u_{l+1}^\circ &= v_{l+1} - \sum_{k=1}^l \langle u_k, v_{l+1} \rangle u_k, & u_{l+1} &= \frac{u_{l+1}^\circ}{\|u_{l+1}^\circ\|} \\ &\vdots & &\vdots \\ u_n^\circ &= v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_k, v_n \rangle u_k, & u_n &= \frac{u_n^\circ}{\|u_n^\circ\|}. \end{aligned}$$

**Erläuterung**

Diese Rechenvorschrift heißt das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren. Wir machen uns am Beispiel von  $\mathbb{R}^2$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt, das Verfahren klar: Angenommen, es ist ein normierter Vektor  $w \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|w\| = 1$  gegeben, sowie ein von  $w$  linear unabhängiger Vektor  $x \in \mathbb{R}^2$ . Letzterer lässt sich in eine Summe von Vektoren zerlegen, nämlich  $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$ , wobei  $x_{\parallel}$  parallel zu  $w$  ist, und  $x_{\perp}$  steht senkrecht auf  $w$ :



Der Vektor  $x_{\parallel}$  ist gerade die orthogonale Projektion auf den Teilraum  $\text{Span}\{w\}$  und hat dieselbe Richtung wie  $w$ . Um die Länge von  $x_{\parallel}$  zu bestimmen, erinnern wir daran, dass im rechtwinkligen Dreieck der Kosinus eines Winkels das Verhältnis der Längen von Ankathete und Hypotenuse ist:

$$\cos(\angle(x, w)) = \frac{\|x_{\parallel}\|}{\|x\|}$$

Gleichfalls gilt

$$\cos(\angle(x, w)) = \frac{\langle x, w \rangle}{\|x\| \cdot \|w\|} = \frac{\langle x, w \rangle}{\|x\|},$$

sodass  $\|x_{\parallel}\| = \langle x, w \rangle$ . Damit folgt endlich

$$x_{\perp} = x - x_{\parallel} = x - \langle x, w \rangle w.$$

Normieren wir den Vektor  $x_{\perp}$ , so haben wir zusammen mit  $w$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  konstruiert.

Für  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 2$  muss das Verfahren fortgeführt werden, wobei wir die orthogonalen Projektionen auf alle bereits konstruierten Vektoren subtrahieren müssen, bis das Verfahren endet. Für andere Vektorräume und Skalarprodukte funktioniert es genauso, wie sich mit vollständiger Induktion und den definierenden Eigenschaften eines Skalarprodukts beweisen lässt.

**Beispiel**

Sei erneut  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  das Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ , welches für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  über

$$\langle x, y \rangle_G = x^T G y$$

definiert ist mit

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir orthonormalisieren die Basis

$$(v_1, v_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Es wurde ja bereits festgestellt, dass  $v_1$  und  $v_2$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  nicht orthonormal sind.

Der erste Basisvektor ergibt sich durch Normierung:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einen auf  $u_1$  senkrecht stehenden Vektor erhalten wir aus  $v_2$  durch Subtrahieren der orthogonalen Projektion von  $v_2$  auf  $u_1$ :

$$\begin{aligned} u_2^\circ &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle_G u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schließlich muss  $u_2^\circ$  normiert werden:

$$\begin{aligned} \|u_2^\circ\|^2 &= \langle u_2^\circ, u_2^\circ \rangle_G \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

also

$$u_2 = \frac{u_2^\circ}{\|u_2^\circ\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis von  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ .

## Orthogonale Abbildungen

### ► Definition

Seien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  und  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  euklidische Vektorräume. Eine lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$  heißt orthogonal, falls für alle  $x, y \in V$  gilt:

$$\langle Lx, Ly \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Oft werden auch Skalarprodukte in verschiedenen Vektorräumen universell mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet, solange keine Missverständnisse möglich sind. Obige Gleichung würde dann

$$\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$$

lauten, und wir müssen uns merken, dass auf der rechten Seite der Gleichung das Skalarprodukt in  $V$  steht, während  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf der linken Seite das Skalarprodukt in  $W$  bezeichnet.

### ■ Satz

Seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume mit  $\dim V = \dim W$ , und  $(v_1, \dots, v_n)$  sei eine Orthonormalbasis von  $V$ . Dann ist eine lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$  genau dann orthogonal, wenn  $(Lv_1, \dots, Lv_n)$  eine Orthonormalbasis von  $W$  ist.

**Beweis:** Zuerst beweisen wir die Richtung „ $\Rightarrow$ “: Sei  $L$  orthogonal. Dann ist

$$\langle Lv_i, Lv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Jetzt „ $\Leftarrow$ “: Sei  $L$  derart, dass  $\langle Lv_i, Lv_j \rangle = \delta_{ij}$ . Seien  $x, y \in V$  beliebige Vektoren mit Basisdarstellungen

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

und

$$y = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \langle Lx, Ly \rangle &= \left\langle L \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right), L \left( \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i L v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j L v_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle L v_i, L v_j \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \delta_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle v_i, v_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \right\rangle \\
 &= \langle x, y \rangle
 \end{aligned}$$

■

### Erläuterung

Orthogonale Abbildungen erhalten nicht nur das Skalarprodukt, sondern auch die vom Skalarprodukt induzierte Norm:

$$\|Lx\| = \sqrt{\langle Lx, Lx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

Geometrisch formuliert erhalten orthogonale Abbildungen folglich Winkel und Längen.

Der letzte Satz hat als Konsequenz: Gilt  $V = W$ , dann bilden die Spalten der darstellenden Matrix  $L_B \in M(n \times n, \mathbb{R})$  von  $L$  bezüglich der Orthonormalbasis  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von  $\mathbb{R}^n$ .

Matrizen mit reellen Einträgen, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden, haben die Eigenschaft  $AA^T = E_n$ . Solche Matrizen heißen gleichfalls orthogonal. Beachten Sie, dass die darstellende Matrix einer orthogonalen Abbildung bezüglich einer beliebigen Basis im Allgemeinen nicht orthogonal ist.

### Beispiel

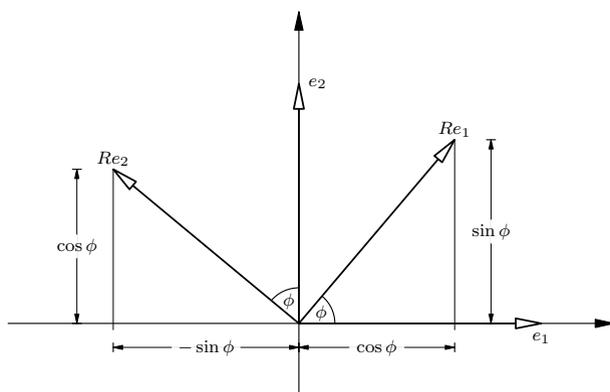
Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  mit Standardskalarprodukt und Standardbasis  $(e_1, e_2)$  und möchten die darstellende Matrix einer Drehung um den Winkel  $\phi \in [0, 2\pi[$

konstruieren. Aus der nachstehenden Abbildung ist ersichtlich, dass für eine solche Drehung  $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt:

$$Re_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \text{ und } Re_2 = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Dies sind gerade die Spalten der darstellenden Matrix, sodass

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$



Drehungen erhalten Längen und Winkel – deshalb verwundert es nicht, dass diese Matrix orthogonal ist:

$$\begin{aligned} RR^T &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \phi + (-\sin \phi)^2 & \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi - \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= E_2 \end{aligned}$$

### Beispiel

Die darstellende Matrix einer Drehung um die 3-Achse (z-Achse) von  $\mathbb{R}^3$  um den Winkel  $\phi$  ist gegeben durch

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

eine Drehung um die  $y$ -Achse ist gegeben durch

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich beweisen, dass jede Drehung in  $\mathbb{R}^3$  in im Wesentlichen eindeutiger Weise auf die Form  $R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$  gebracht werden kann. Die Winkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  heißen dann Euler'sche Winkel.

### ■ Satz

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $L: V \rightarrow V$  eine orthogonale Abbildung. Für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  von  $L$  gilt:  $\lambda = 1$  oder  $\lambda = -1$ .

**Beweis:** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $L$  zum Eigenvektor  $v \in V$ . Dann gilt:

$$\langle v, v \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

Da  $v \neq 0$ , und damit auch  $\langle v, v \rangle \neq 0$  (denn  $v$  ist ja ein Eigenvektor), folgt schließlich  $\lambda^2 = 1$ . ■

### Beispiel

Betrachten wir die Drehung um die  $z$ -Achse

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Drehwinkel  $\phi \in [0, 2\pi[$ . Das charakteristische Polynom von  $R$  ist gegeben durch

$$p_R(\lambda) = \det(R - \lambda E_3) = (1 - \lambda)((\cos \phi - \lambda)^2 + \sin^2 \phi).$$

Die Eigenwerte von  $R$  sind die Nullstellen dieses Polynoms:

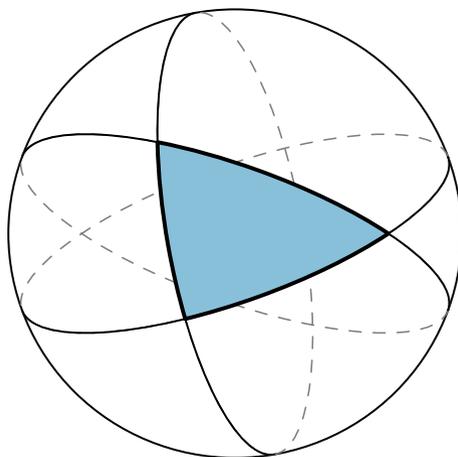
$$\begin{aligned} p_R(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (1 - \lambda)((\cos \phi - \lambda)^2 + \sin^2 \phi) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \text{ oder } (\cos \phi - \lambda)^2 + \sin^2 \phi = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oder } (\cos \phi - \lambda)^2 = -\sin^2 \phi \end{aligned}$$

Die erste Gleichung besagt, dass es in jedem Fall den Eigenwert  $\lambda = 1$  gibt. Die zweite Gleichung kann nur dann eine reelle Lösung haben, wenn  $\sin \phi = 0$ , d. h.  $\phi = 0$  oder  $\phi = \pi$ . Für den Drehwinkel  $\phi = 0$  ist  $R$  die Einheitsmatrix, sodass jeder Vektor in  $\mathbb{R}^3$  Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Für  $\phi = \pi$  wird jeder Vektor durch  $R$  um  $180^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht: Alle Vektoren parallel zur Drehachse sind in diesem Fall Eigenvektoren zum Eigenwert 1, und alle Vektoren orthogonal zur Drehachse sind Eigenvektoren zum Eigenwert  $-1$ . Gilt weder  $\phi = 0$  noch  $\phi = \pi$ , so sind die einzigen Eigenvektoren jene parallel zur Drehachse.

## Ausblick

Die Berechnung von Winkeln und Längen kann sehr einfach mit Erfordernissen in der Praxis motiviert werden. Dort liegt dann z.B. die mathematische Beschreibung eines physikalischen Vorganges vor, bei dem sich zwei elastische Teilchen nach einem Stoß voneinander entfernen. Zu jedem Zeitpunkt nach dem Stoß kann dann der Abstand vom Punkt des Zusammentreffens bis zur aktuellen Position bestimmt werden, gleichfalls der Winkel zwischen den beiden geradlinigen Bahnen der Teilchen. Die Anwendungen reichen aber weit über solche Überlegungen der Kinematik hinaus, denn u. a. wird auch in der Elektrodynamik intensiv mit Vektoren gearbeitet, wodurch die in diesem Abschnitt verwendeten Begriffe wieder Bedeutung erlangen.

Erinnern wir uns an das Beispiel der Vektoren, welche auf den ersten Blick orthogonal erscheinen, dies aber bezüglich eines bestimmten Skalarprodukts – verschieden vom Standardskalarprodukt – nicht sind. Die Tatsache, dass mit dem jeweiligen Skalarprodukt bestimmte Winkel und Längen (diese über die induzierte Norm) verknüpft sind, hat besondere Konsequenzen; denken wir dabei an ein Dreieck auf einer Kugel:



Die Summe der Winkel des Dreiecks ist hier offensichtlich nicht gleich  $180^\circ$ , wie es aus der Schule für Dreiecke in der Ebene bekannt ist. Ferner ist der Abstand zwischen zwei Ecken verschieden, je nachdem, ob dieser auf der Kugeloberfläche gemessen wird oder entlang einer gedachten geraden Linie in der Kugel. Winkel und Längen haben daher einen direkten Bezug zur Geometrie. Denken wir uns die Kugel weg und konzentrieren uns nur darauf, dass offenkundig ein Zusammenhang zwischen Geometrie und Längen/Winkeln besteht, so wird klar, dass sich über das Skalarprodukt und die dadurch induzierte Norm die Geometrie bestimmen lässt. Dies bildet im Kern die Grundlage für die mathematische Beschreibung von Raum und Zeit (als Einheit: Raumzeit).

Wechseln wir gedanklich zur reinen Mathematik. Hier haben wir uns zukünftig der Frage zu stellen, was Grenzwerte sind und wann bestimmte Elemente einer Menge beliebig nahe an anderen liegen. Der Begriff Nähe ist dann wieder mit dem Abstand, also auch der Norm, assoziiert und von größter Bedeutung, z. B. bei der Untersuchung von Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

## Selbsttest

**I.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Welche der folgenden Formeln sind für alle  $x, y \in V$  korrekt?

$$(1) \quad \|2x\| = 2\|x\|$$

$$(4) \quad \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(2) \quad \|-2x\| = -2\|x\|$$

$$(5) \quad \|-2x\| = 2\|x\|$$

$$(3) \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

$$(6) \quad \|x + y\| \geq 0$$

**II.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $v, w \in V$  mit  $w \neq 0$  und  $U = \{x \in V \mid x \perp w\}$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig?

$$(1) \quad \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$$

$$(2) \quad \langle v, w \rangle \geq 0$$

$$(3) \quad v \in U \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

$$(4) \quad v \in U \text{ und } v \neq 0 \Rightarrow v \text{ und } w \text{ sind linear unabhängig.}$$

$$(5) \quad w \in U$$

$$(6) \quad 0 \in U$$

**III.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $v, w \in V$  und  $L: V \rightarrow V$  eine orthogonale Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

$$(1) \quad \langle Lv, Lv \rangle \geq 0$$

$$(2) \quad \langle Lv, Lv \rangle > 0$$

$$(3) \quad \text{Jede darstellende Matrix von } L \text{ ist orthogonal.}$$

$$(4) \quad v \text{ und } w \text{ sind genau dann orthogonal, wenn } Lv \text{ und } Lw \text{ orthogonal sind.}$$

$$(5) \quad \text{Bild } L = V$$

$$(6) \quad \text{Der einzige Eigenwert von } L \text{ ist } 1.$$

# Aufgaben zur linearen Algebra

**I.** Sei  $C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  der Vektorraum aller reellen Funktionen. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\delta: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$$

linear ist, und geben Sie das Bild von  $\delta$  an.

Betrachten Sie nun den Untervektorraum von  $C(\mathbb{R})$ , der aus den Polynomen höchstens zweiten Grades besteht:

$$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Geben Sie eine Basis des Kerns von  $\delta$ , eingeschränkt auf  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ , an. Bestätigen Sie bei diesem Beispiel die Gültigkeit des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen.

**II.** Seien  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$  quadratische Matrizen. Zeigen Sie, dass  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Angenommen,  $A$  und  $B$  sind invertierbar. Zeigen Sie, dass dann auch das Produkt  $AB$  invertierbar ist, und dass  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  gilt.

**III.** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie für jede der folgenden Matrizen – falls definiert – die Determinante und geben Sie den Rang der Matrix in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$  an.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\beta} & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ -1 & 0 & \bar{\alpha}\beta \end{pmatrix}$$

**IV.** Ein gebrauchter Tennisschläger und ein Tennisball kosten zusammen 1,10 EUR. Der Schläger kostet 1,00 EUR mehr als der Ball. Wie viel kostet der Schläger und wie viel kostet der Ball?

**V.** Geben Sie – in Abhängigkeit der Parameter  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  – den Lösungsraum  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  des durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegebenen

linearen Gleichungssystems an:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right)$$

**VI.** Diagonalisieren Sie die Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. geben Sie explizit eine invertierbare Matrix  $S \in M(n \times n, \mathbb{C})$  und eine Diagonalmatrix  $D \in M(n \times n, \mathbb{C})$  an, sodass  $A = S^{-1}DS$ .

Interpretieren Sie die Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto Ax$  geometrisch und erläutern Sie anschaulich, wieso  $A$  keine reellen Eigenwerte haben kann.

**VII.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Vektorraum,  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und

$$f: V \rightarrow V, v \mapsto \langle b_1, v \rangle b_1.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich  $B$ .

**VIII.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Vektorraum, und sei  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit  $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle$  für alle  $v, w \in V$ . Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $L$  gilt:  $|\lambda| = 1$ .

**IX.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $\dim V = n$  und sei  $V^* = \{f: V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist linear}\}$  die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  nach  $\mathbb{K}$ . Zusammen mit der üblichen punktweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} (f + g)(v) &:= f(v) + g(v) \\ (\lambda f)(v) &:= \lambda f(v) \end{aligned}$$

für alle  $f, g \in V^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$  ist  $V^*$  wiederum ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, welcher der Dualraum von  $V$  genannt wird. Seine Elemente nennt man auch Kovektoren.

- (1) Welcher Vektor in  $V^*$  ist der Nullvektor? Bestätigen Sie außerdem die Abgeschlossenheit von  $V^*$ , d. h., die Rechenoperationen führen nicht aus der Menge heraus.
- (2) Sei  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$  und seien  $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$  die Vektoren in  $V^*$ , für welche gilt:

$$b_i^*(b_j) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

- (a) Bestätigen Sie, dass jeder der Kovektoren  $b_i^*$  durch die obigen Bedingungen bereits eindeutig bestimmt ist. (Hinweis: Wie sieht  $b_i^*(v)$  aus, wenn Sie  $v \in V$  in der Basis  $B$  darstellen?)
- (b) Zeigen Sie, dass  $B^*$  linear unabhängig ist.
- (c) Zeigen Sie, dass  $B^*$  ein Erzeugendensystem von  $V^*$  ist, genauer: Jeder Kovektor  $f \in V^*$  lässt sich wie folgt darstellen:

$$f = \sum_{i=1}^n f(b_i)b_i^*$$

(3) Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ .

- (a) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor  $u \in V$  die Abbildung

$$u^* : V \rightarrow \mathbb{K}, u^*(x) := \langle u, x \rangle$$

ein Kovektor ist, also  $u^* \in V^*$  gilt.

- (b) Zeigen Sie, dass die oben definierte Zuordnung  $T: V \rightarrow V^*$ ,  $u \mapsto u^*$  injektiv ist.

Teil III

Analysis



# 15 Grundzüge der Analysis

## Einblick

Sehr viele physikalische Phänomene lassen sich durch Funktionen modellieren, von denen die folgenden Beispiele natürlich nur ein Ausschnitt sind:

Die Bewegung eines fallenden Steins kann beschrieben werden durch eine Funktion  $h: [t_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto h(t)$ , wobei  $h(t)$  die Höhe des Steins zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Mit  $t_0$  wird dabei der Zeitpunkt bezeichnet, an dem der Stein zu fallen beginnt. Die zeitliche Entwicklung der Temperatur  $T$  an einem bestimmten Ort – über einen Zeitraum  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  hinweg gemessen – kann durch eine Funktion  $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto T(t)$  beschrieben werden. Ebenso auch die an einem Verbraucher in einem Stromkreis anliegende Spannung, der auf eine Trommemembran ausgeübte Gesamtdruck, die Winkelgeschwindigkeit eines Windrades, die Auslenkung eines Fadenpendels, die Gesamtkonzentration einer chemischen Substanz in einer Lösung usw.

Alle diese Beispiele haben gemeinsam, dass sie durch „kontinuierliche“ Funktionen modelliert werden. Obwohl Messreihen allgemein diskret vorliegen (wir messen den Druck in einem Hohlrohr an bestimmten Stellen, das Thermometer wird zu bestimmten Zeiten abgelesen usw.), gehen wir davon aus, dass z. B. dynamische Prozesse in vielen Fällen mit der Zeit meist nur stetige Änderungen erfahren, die durch oftmaliges Messen beliebig genau beschrieben werden können. In der Analysis werden ebensolche Begriffe wie „stetig“ oder „beliebig genau“ vom mathematischen Standpunkt aus beleuchtet und ergründet. Von besonderer Bedeutung wird sein, dass wir Untersuchungen „nahe“ bei bestimmten Punkten durchführen wollen (und müssen). Dazu verwenden wir sogenannte Folgen von Zahlen, insbesondere solche, die sich einem einzigen Punkt beliebig annähern.

Der Gegenstand des gesamten zweiten Teils des Buches ist die reelle Analysis; daher werden wir Betrachtungen für komplexe Zahlen nur dort als Zusatz aufnehmen, wo sich dies ohne Aufwand (und Schaden) anbietet.

## Folgen und Konvergenz

### ► Definition

Eine Folge ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Wir schreiben für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder kurz  $(x_n)$ , wobei jedem Index  $n \in \mathbb{N}$  eine reelle oder komplexe Zahl  $x_n$  zugeordnet wird. ◀

### Erläuterung

In der Praxis denken wir dann meist nicht explizit daran, dass wir es mit Abbildungen zu tun haben. Sonst hätte sich eher die Schreibweise  $x(n)$  statt  $x_n$  eingebürgert.

### Beispiel

Die Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  ist eine Folge reeller Zahlen:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

### Beispiel

Die Folge  $(y_n)$  mit  $y_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Beispiel für eine konstante Folge.

### Beispiel

Die Folge  $(z_n)$  mit  $z_n = i^n$  ist eine (periodische) Folge komplexer Zahlen:

$$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i, z_4 = 1, \dots$$

### Beispiel

Die rekursiv definierte Folge  $(u_n)$  mit  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  und Startwerten  $u_0 = 0, u_1 = 1$  ist die sogenannte Fibonacci-Folge:

$$(u_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots)$$

Jedes Folgenglied der Fibonacci-Folge ist die Summe der zwei vorhergehenden.

### Erläuterung

Beim ersten der obigen Beispiele mussten wir  $n \geq 1$  voraussetzen. Wie wir sehen werden, kommt es für die Betrachtungen der Analysis auf den Wert der ersten Folgenglieder zumeist nicht an. So werden wir auch Folgen mit der Indexmenge  $\{k, k+1, k+2, \dots\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , betrachten. Wir schreiben dann auch  $(x_n)_{n \geq k}$ .

### ► Definition

Eine Folge  $(x_n)$  reeller oder komplexer Zahlen heißt konvergent mit Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  bzw.  $a \in \mathbb{C}$ , wenn es für alle  $\epsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\epsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  gilt:  $|x_n - a| < \epsilon$ . ◀

### Erläuterung

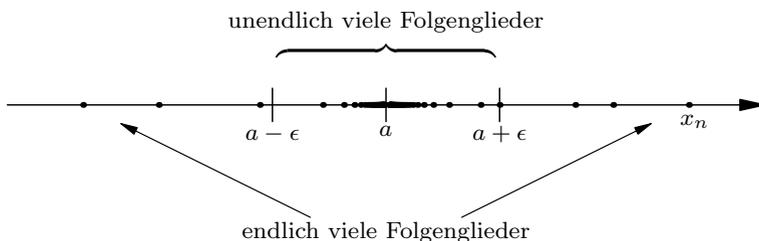
Intuitiv wird der Begriff des Grenzwerts einer Folge von Zahlen so verstanden, dass die Folgenglieder ihm „im Unendlichen beliebig nahe“ kommen. Präzisiert wird dies gerade durch obige Definition.

Konvergiert eine Folge  $(x_n)$  gegen den Grenzwert  $a$ , so schreiben wir dafür  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$  (kurz:  $x_n \rightarrow a$ ) oder auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Es lässt sich zeigen, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. Dafür müssen wir nur beachten, dass ab einem geeigneten  $N \in \mathbb{N}$  bei der angenommenen Existenz zweier Grenzwerte  $a_1$  und  $a_2$  gelten würde:

$$0 \leq |a_1 - a_2| = |a_1 - x_n - a_2 + x_n| \leq |a_1 - x_n| + |x_n - a_2| < 2\epsilon,$$

und zwar für beliebiges  $\epsilon > 0$ , was den am weitesten links stehenden Term zwischen Null und Null „einklemmt“. Wir verwendeten die Dreiecksungleichung, die bei Untersuchungen dieser Art häufig vorkommt.

In den folgenden Abbildung finden Sie eine Veranschaulichung des Grenzwertbegriffs, zuerst im Fall reeller Folgen:



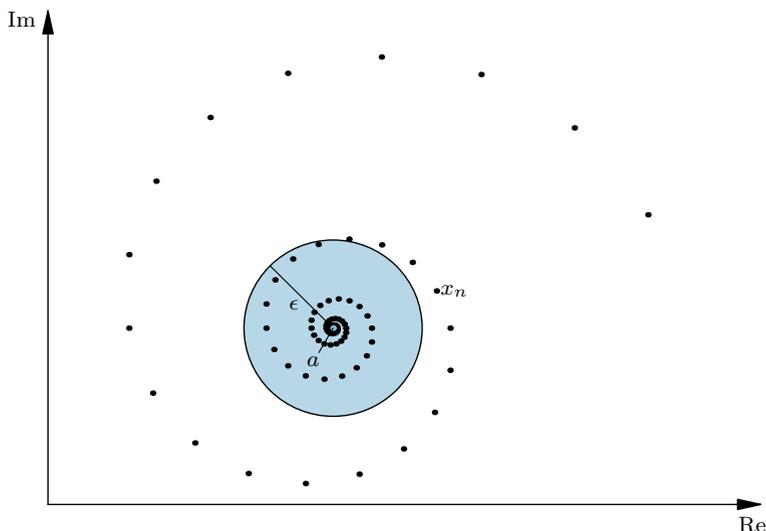
Der Grenzwert einer konvergenten Folge auf der reellen Zahlengeraden

Dies bedeutet, dass innerhalb jedes Intervalls der Form  $]a - \epsilon, a + \epsilon[$  unendlich viele Folgenglieder liegen, während sich außerhalb dieser Intervalle stets nur endlich viele befinden. Das Intervall  $]a - \epsilon, a + \epsilon[$  nennen wir eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  und sagen statt „alle Folgenglieder bis auf endlich viele“ (also alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index  $N$ ) auch kurz: „fast alle Folgenglieder“. Mit dieser Sprechweise können wir sagen: Eine Folge konvergiert genau dann gegen den Grenzwert  $a$ , wenn in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  fast alle Folgenglieder enthalten sind.

Durch diese Sichtweise wird auch klar, wie Konvergenz bei komplexen Folgen aussieht, denn hier liegen in jeder beliebig kleinen Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \epsilon\}$$

mit Mittelpunkt  $a$  fast alle Folgenglieder:



Der Grenzwert einer konvergenten Folge in der komplexen Ebene

Mit Quantoren kann die Definition für die Konvergenz einer Folge wie folgt geschrieben werden: Die Folge  $(x_n)$  konvergiert genau dann gegen  $a$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |x_n - a| < \epsilon$$

### Beispiel

Betrachten wir die Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit  $x_n = \frac{1}{n}$ . Wir zeigen, dass  $(x_n)$  gegen  $a = 0$  konvergiert. Sei also  $\epsilon > 0$  beliebig. Wenn nun ein  $N \in \mathbb{N}$  so gewählt wird, dass  $N > \frac{1}{\epsilon}$ , dann gilt die Ungleichung

$$|x_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

für alle  $n \geq N$ .

### Erläuterung

Wir nennen Folgen, die wie im obigen Beispiel gegen null konvergieren, Nullfolgen.

### Beispiel

Die Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = (-1)^n$  konvergiert gegen keinen Grenzwert. Gäbe es nämlich einen solchen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , so hätten wir für alle  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  gefunden, sodass

$$2\epsilon = \epsilon + \epsilon > |x_N - a| + |a - x_{N+1}| \geq |x_N - a + a - x_{N+1}| = |x_N - x_{N+1}| = 2.$$

(Hierbei wurde die Dreiecksungleichung benutzt.) Das kann für beliebige  $\epsilon > 0$  aber offensichtlich nicht richtig sein – die Ungleichung ist z. B. für  $\epsilon = \frac{1}{2}$  verletzt.

### ► Definition

Nichtkonvergente Folgen heißen divergent. ◀

### Erläuterung

Wir haben im letzten Beispiel die Divergenz einer Folge gezeigt, indem wir nachwiesen, dass die Folgenglieder auch „im Unendlichen“ immer wieder einen nichtverschwindenden Mindestabstand annehmen. Wir sagen dazu, dass die Folge keine Cauchy-Folge ist. Wir werden diesen Begriff im nächsten Abschnitt präzisieren und zeigen, dass dieser in unserem Rahmen sogar äquivalent zur Idee der Konvergenz ist.

### Beispiel

Die Folge komplexer Zahlen  $(z_n)$  mit  $z_n = i^n$  ist divergent. Der Beweis dieser Tatsache funktioniert wie im Beispiel zuvor: Benachbarte Folgenglieder haben immer den Abstand  $\sqrt{2}$ , wir müssen zum Nachweis nur  $|i^{n+1} - i^n|$  berechnen.

## Rechenregeln für konvergente Folgen

### ■ Satz

Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Dann sind auch Summe, Produkt und Quotient von  $(x_n)$  und  $(y_n)$  konvergent und es gilt:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$  (Insbesondere gilt deshalb  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a$  für alle  $c \in \mathbb{C}$ .)
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ , falls  $b \neq 0$  und  $y_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
4.  $a \leq b$ , falls  $x_n \leq y_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Wir zeigen exemplarisch nur die erste Behauptung. Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $x_n$  und  $y_n$  gegen  $a$  bzw.  $b$  konvergieren, gibt es  $N_1 \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_1$ , und es gibt  $N_2 \in \mathbb{N}$  so, dass  $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_2$ . Dann gilt aber

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon$$

für alle  $n \geq N$ , falls wir  $N \geq \max\{N_1, N_2\}$  wählen. ■

**Erläuterung**

Beachten Sie beim vierten Punkt, dass dieselbe Aussage mit strikter Gleichheit nicht gilt. Beispielsweise haben wir  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ , jedoch gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}.$$

Bitte beachten Sie bei der Untersuchung auf Konvergenz insbesondere, dass die Gleichheit von Grenzwerten keineswegs allgemein bedeutet, dass auch die Folgen gleich sind.

**Beispiel**

Die Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

konvergiert gegen 1, da  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  eine Nullfolge ist. Mithilfe des gleichen Arguments finden wir heraus ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 1} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{13}{n}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 + 13 \cdot \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3$$

**Erläuterung**

Die oben verwendete Idee des Ausklammerns von geeigneten Potenzen von  $n$  wird in analogen Fällen stets verwendet und basiert darauf, dass wir die Konvergenz der Folge  $\frac{1}{n}$  bereits bewiesen haben.

**Beispiel**

Sei  $x > 1$ . Wir behaupten, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$  gilt. Um dies zu beweisen, müssen wir für beliebiges  $\epsilon > 0$  zeigen: Es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|\sqrt[n]{x} - 1| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$ . Es ist klar, dass  $\sqrt[n]{x} > 1$  gilt. Also bleibt zu zeigen, dass  $y_n := \sqrt[n]{x} - 1 < \epsilon$ . Mit dem binomischen Satz (gleich im Detail behandelt) und  $y_n > 0$  folgt:

$$x = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \underbrace{\binom{n}{2} y_n^2 + \dots + \binom{n}{n-1} y_n^{n-1} + y_n^n}_{>0} > ny_n$$

Wählen wir also ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \geq \frac{x}{\epsilon}$ , so gilt für alle  $n \geq N$ , dass  $y_n < \epsilon$ .

**Erläuterung**

Wir verwendeten den sogenannten binomischen Lehrsatz, den wir aufgrund seiner immensen Bedeutung bei diversen Rechnungen an dieser Stelle liefern

wollen: Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

mit den sogenannten Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei die sogenannte Fakultät definiert ist als  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$  und  $0! = 1$  festgelegt wird. Der Beweis dieses Satzes ist gleichzeitig eine schöne Übung der vollständigen Induktion: Der Induktionsanfang ist sicher klar. Für den Induktionsschritt stellen wir vorab fest, dass

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Sei die Behauptung nun für ein beliebiges, aber festes  $n$  bereits bewiesen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Das ist aber gerade die Behauptung für  $n+1$ .

### Beispiel

Aufgrund des binomischen Lehrsatzes gilt für alle  $x \geq 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx$$

(Diese Ungleichung heißt Bernoulli'sche Ungleichung und gilt sogar für  $x \geq -1$ ; dies wird in einer der Aufgaben zu den Grundlagen mithilfe von vollständiger Induktion gezeigt.)

Wir wollen nun beweisen, dass für reelles  $x$  mit  $0 \leq x < 1$  die Folge  $(x^n)$  eine Nullfolge ist. Für  $x = 0$  ist das klar. Für  $0 < x < 1$  können wir mit  $\delta > 0$  einfach  $x = \frac{1}{1+\delta}$  setzen und erhalten durch die Verwendung obiger Ungleichung

$$0 \leq x^n = \frac{1}{(1+\delta)^n} \leq \frac{1}{1+n\delta} < \frac{1}{n\delta},$$

woraus die Behauptung folgt, weil  $\frac{1}{n}$  eine Nullfolge ist. Insbesondere folgt wiederum, dass auch für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $0 \leq |z| < 1$  die Folge  $(z^n)$  eine Nullfolge ist, denn:

$$z^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z^n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z|^n \rightarrow 0$$

## Konvergenzkriterien für Folgen

### Das Monotoniekriterium

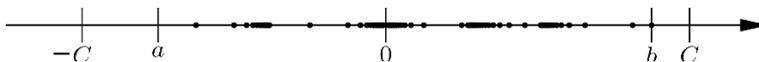
#### ► Definition

Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt beschränkt, falls es ein  $C \geq 0$  gibt, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$|x_n| \leq C \quad \blacktriangleleft$$

#### Erläuterung

Eine reelle Folge  $(x_n)$  ist genau dann beschränkt, wenn es  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $a \leq x_n \leq b$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ :



Eine beschränkte Folge

Eine weitere Möglichkeit, diesen Sachverhalt zu beschreiben, besteht darin zu sagen, dass die Folge  $(x_n)$  nur Werte im Intervall  $[a, b]$  annimmt, d. h.  $x_n \in [a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Für komplexe Folgen bedeutet Beschränktheit, dass alle Folgenglieder in einer Kreisscheibe mit festem Radius in der komplexen Ebene zu finden sind.

■ **Satz**

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $(x_n)$  eine Folge mit Grenzwert  $a \in \mathbb{C}$  und sei  $\epsilon = 1$ . Wenn wir  $N \in \mathbb{N}$  geeignet wählen, so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$ :

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < \epsilon + |a| = 1 + |a|$$

Das bedeutet, dass der Betrag fast aller Folgenglieder durch  $1 + |a|$  nach oben abgeschätzt werden kann. Berücksichtigen wir noch die restlichen (endlich vielen) Folgenglieder bei der Abschätzung, so erhalten wir für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

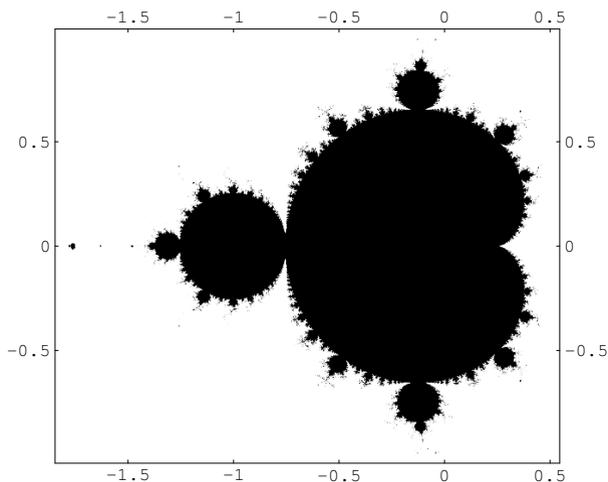
$$|x_n| \leq \max\{|x_0|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |a|\} \quad \blacksquare$$

**Beispiel**

Die konstante Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = 5$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  wird durch  $a = 5$  und  $b = 5$  beschränkt und ist konvergent; die Folge  $(y_n)$  mit  $y_n = (-1)^n$  wird durch  $a = -1$  und  $b = 1$  beschränkt. Dennoch ist  $(y_n)$  nicht konvergent. Die Folge  $(z_n)$  mit  $z_n = \frac{i^n}{n+1}$  ist beschränkt, da  $|z_n| = \frac{1}{n+1} \leq 1$ , und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Beispiel**

Die rekursiv definierte Folge  $(u_n)$  mit  $u_{n+1} = u_n^2 + c$  und Startwert  $u_0 = 0$  ist genau dann beschränkt, wenn der komplexe Parameter  $c \in \mathbb{C}$  zur sogenannten Mandelbrot-Menge gehört, welche nachstehend dargestellt ist.



Mandelbrot-Menge

Beispielsweise gehört  $c = 1$  nicht zur Mandelbrot-Menge, da dann  $(u_n) = (0, 1, 2, 5, 26, \dots)$  nicht beschränkt ist. Die Zahl  $c = i$  hingegen gehört zur Mandelbrot-Menge, da in diesem Fall  $(u_n) = (0, i, -1 + i, -i, -1 + i, -i, \dots)$  gilt, sodass  $|u_n| \leq \sqrt{2}$ . Aus der komplizierten Struktur der Menge lässt sich aber erahnen, dass allgemein nicht so leicht entschieden werden kann, ob  $(u_n)$  beschränkt ist.

### ► Definition

Eine Folge reeller Zahlen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ bzw. } x_n \geq x_{n+1}$$

Eine Folge reeller Zahlen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$x_n < x_{n+1} \text{ bzw. } x_n > x_{n+1}$$

Wir sprechen auch kurz von monotonen oder streng monotonen Folgen, wenn es auf die Unterscheidung zwischen wachsend und fallend nicht ankommt. ◀

### Erläuterung

Für komplexe Folgen ist der Begriff bedeutungslos, da sich komplexe Zahlen nicht nach ihrer „Größe“ ordnen lassen.

### ■ Satz

Jede beschränkte und monotone Folge  $(x_n)$  reeller Zahlen ist konvergent. ■

### Erläuterung

Wir verzichten hier auf einen Beweis und begnügen uns an dieser Stelle mit anschaulicher Evidenz. Später jedoch kehren wir, mit neuem Werkzeug, zum Monotoniekriterium zurück.

### Beispiel

$x_n = (-1)^n$  ist beschränkt, aber nicht monoton.

### Beispiel

$y_n = 1 - \frac{1}{n}$  ist beschränkt und monoton, folglich konvergent.

### Beispiel

$z_n = \frac{(-1)^n}{n}$  konvergiert, ist jedoch nicht monoton.

## Das Häufungspunktprinzip und das Cauchy-Kriterium

### ► Definition

Für eine reelle Zahl  $x$  und ein  $\epsilon > 0$  nennen wir die Menge

$$U_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \epsilon\} = ]x - \epsilon, x + \epsilon[$$

der Zahlen, die von  $x$  einen Abstand von weniger als  $\epsilon$  haben, eine (offene)  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$ . ◀

### ► Definition

Ein Punkt  $\xi$  heißt Häufungspunkt einer Folge  $(x_n)$ , falls in jeder noch so kleinen  $\epsilon$ -Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder liegen. ◀

### ■ Satz

Ist in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$  eine Folge  $(x_n)$  gegeben (also  $x_n \in [a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ), dann existiert in diesem Intervall mindestens ein Häufungspunkt  $\xi \in [a, b]$  von  $(x_n)$ .

**Beweis:** Für die Beweisidee betrachten wir exemplarisch eine Folge im Intervall  $[0, 1]$  und teilen dieses in zehn Intervalle gleicher Länge. In jedem dieser Intervalle liegen entweder unendlich viele Glieder der Folge oder nur endlich viele. Wählen wir ein Intervall aus, das unendlich viele Folgenglieder enthält,

so können wir die Prozedur mit diesem Intervall „bis ins Unendliche“ fortführen: Mit jedem Schritt erhalten wir eine weitere Dezimalstelle eines Punktes, der in einer immer kleiner werdenden  $\epsilon$ -Umgebung unendlich vielen Folgengliedern benachbart ist – folglich ist der so konstruierte Punkt ein Häufungspunkt. ■

### Erläuterung

Eine Zahl  $\xi$  ist genau dann ein Häufungspunkt einer Folge  $(x_n)$ , wenn gilt: Für alle  $\epsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$ , sodass  $|x_n - \xi| < \epsilon$ .

Hat eine beschränkte Folge genau einen Häufungspunkt, so ist sie konvergent und hat diesen Häufungspunkt als Grenzwert.

Was in obigem Satz formuliert wurde, wird auch als Häufungspunktprinzip bezeichnet und ist ferner als Satz von Bolzano-Weierstraß bekannt. Eine Variante lautet: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Häufungspunkte sind genau die Grenzwerte solcher Teilfolgen. Eine Teilfolge ist eine Auswahl von unendlich vielen Folgengliedern der betrachteten Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : Mit der Auswahl von Indizes  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  erhalten wir z. B. die Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

### Beispiel

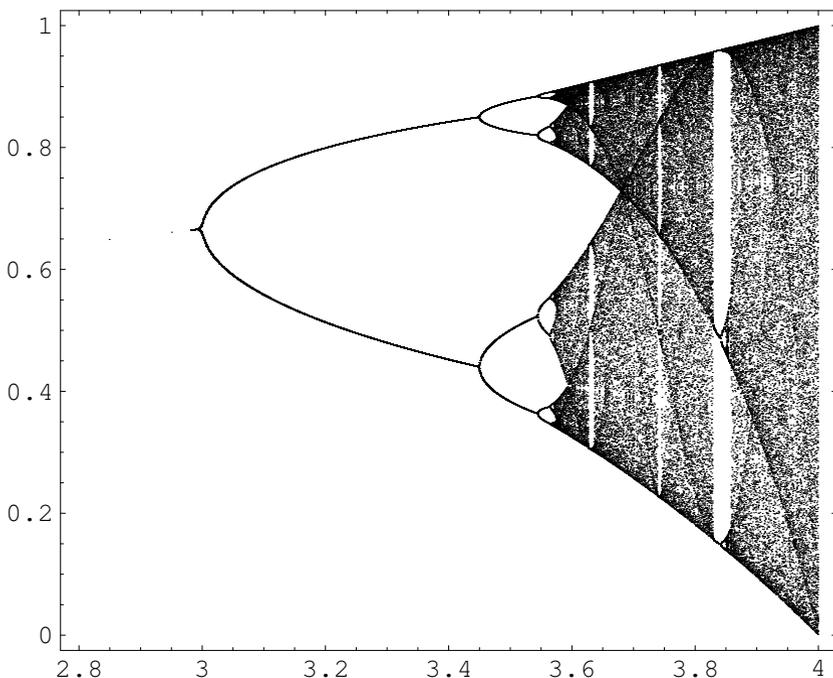
Die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt und nimmt Werte im abgeschlossenen Intervall  $[-1, 1]$  an. Obwohl sie nicht konvergiert, hat sie zumindest die zwei Häufungspunkte  $\xi_1 = -1$  und  $\xi_2 = 1$ . Die entsprechenden konvergenten Teilfolgen sind die konstanten Folgen  $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$  und  $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ .

### Beispiel

Wie viele Häufungspunkte die über die sogenannte logistische Gleichung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \text{ mit } x_0 = \frac{1}{4}$$

definierte Folge hat, hängt vom Parameter  $r \in [0, 4]$  ab.



Die Häufungspunkte von  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  in Abhängigkeit von  $r$

Die Folge ist in jedem Fall beschränkt:  $0 \leq x_n \leq 1$ . Für  $0 \leq r \leq 3$  ist  $(x_n)$  konvergent, und es gibt nur einen Häufungspunkt. Für  $3 < r < 3,44$  hat  $(x_n)$  zwei Häufungspunkte, zwischen  $r \approx 3,45$  und  $r \approx 3,54$  gibt es vier Häufungspunkte. Für  $r > 3,58$  zeigt die Folge für die meisten Parameterwerte ein Verhalten, das als chaotisch bezeichnet wird.

### Beispiel

Betrachten wir die Folge  $(a_n)$ , die für alle geraden  $n$  gleich  $n$  ist und sonst gleich null. Dann hat  $(a_n)$  zwar nur den Häufungspunkt 0, divergiert jedoch, da sie unbeschränkt ist.

### Erläuterung

Wir erläutern die Kraft des Häufungspunktprinzips noch in Bezug auf das Monotoniekriterium; hier für eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge  $(x_n)$ : Liegt ein Häufungspunkt  $\xi$  vor, dann ist  $\xi$  größer oder gleich jeder anderen Zahl der Folge. Wäre nämlich ein  $x_N$  größer als  $\xi$ , dann würde für alle  $x_n$  mit  $n \geq N$  gelten:  $x_n \geq x_N > \xi$ . Alle Elemente der Folge – höchstens mit Ausnahme von  $x_0, \dots, x_{N-1}$  – wären also außerhalb eines Intervalls der Länge  $2|\xi - x_N|$  um  $\xi$ , was allerdings im Widerspruch zur Eigenschaft von  $\xi$  steht, ein Häufungspunkt zu sein. Oberhalb von  $\xi$  sind daher Häufungspunkte ausgeschlossen. Existierte ein weiterer Häufungspunkt  $\zeta$ , müsste nun  $\zeta < \xi$  sein.

Durch die erneute Anwendung der vorigen Überlegung müsste dann aber  $\xi < \zeta$  sein, was ein Widerspruch ist.

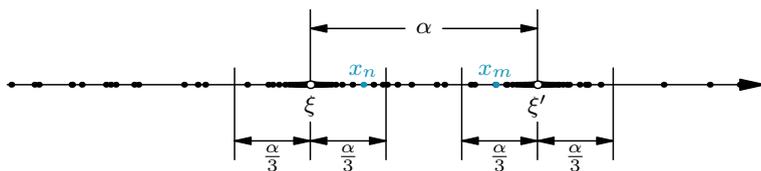
### ■ Satz

Eine Folge  $(x_n)$  konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N: |x_n - x_m| < \epsilon,$$

d. h. wenn  $(x_n)$  eine sogenannte Cauchy-Folge ist.

**Beweis:** Wir führen den Beweis für reelle Folgen. Zuerst zeigen wir die Richtung „ $\Leftarrow$ “: Liegt eine Cauchy-Folge vor, so erkennen wir sofort, dass ab einem bestimmten  $N \in \mathbb{N}$  alle Folgenglieder in einem Intervall liegen, welches (zur Not durch „Vergrößerung“) als abgeschlossenes gewählt werden kann. Nach dem Häufungspunktprinzip gibt es also einen Häufungspunkt  $\xi \in [a, b]$ . Wenn dieser der Einzige ist, so ist er zugleich der Grenzwert der Folge und  $(x_n)$  ist konvergent. Angenommen, es gäbe einen weiteren Häufungspunkt  $\xi' \in [a, b]$  mit  $\xi' \neq \xi$ . Dann setzen wir  $\alpha = |\xi - \xi'|$  und es gilt  $\alpha > 0$ . Da  $\xi$  und  $\xi'$  Häufungspunkte sind, befinden sich unendlich viele Folgenglieder in einer  $\frac{\alpha}{3}$ -Umgebung von  $\xi$  und  $\xi'$ . Anders ausgedrückt: Für alle  $N \in \mathbb{N}$  gibt es  $m, n \geq N$ , sodass gilt:  $|\xi - x_n| < \frac{\alpha}{3}$  und  $|x_m - \xi'| < \frac{\alpha}{3}$ .



Das Cauchy-Kriterium

Wir schließen daraus insgesamt:

$$\begin{aligned} \alpha &= |\xi - \xi'| \\ &= |\xi - x_n + x_m - \xi' + x_n - x_m| \\ &\leq |\xi - x_n| + |x_m - \xi'| + |x_n - x_m| \\ &< \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + |x_n - x_m| \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$|x_n - x_m| > \frac{\alpha}{3}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Nun die Richtung „ $\Rightarrow$ “: Sei  $\epsilon > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$  der Grenzwert von  $(x_n)$ . Sei nun  $N \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $m, n \geq N$  gilt:  $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  und  $|a - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$ . Dann gilt:

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} > |x_n - a| + |a - x_m| \geq |x_n - a + a - x_m| = |x_n - x_m| \quad \blacksquare$$

## Erläuterung

Eine Folge ist also genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Hierbei ist zu beachten, dass der Grenzwert in der Definition von Cauchy-Folge gar nicht vorkommt: Wir können also mit dem obigen Satz wie beim Monotoniekriterium die Konvergenz einer Folge beweisen, ohne ihren Grenzwert zu kennen – mit dem wesentlichen Unterschied, dass das obige Kriterium eine notwendige und hinreichende Bedingung ist, es heißt Cauchy-Kriterium.

## Beispiel

Für die Anwendung des Cauchy-Kriteriums betrachten wir – aus Gründen der Vergleichbarkeit mit der „üblichen“ Definition – wieder die Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{1}{n}$ . Wir betrachten

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right|.$$

Die letzten beiden Terme werden aber ab einem bestimmten  $N \in \mathbb{N}$  kleiner als jedes beliebige  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ , weshalb folgt:

$$\left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

## Ausblick

Folgen sind für sich ein interessantes Thema, wir haben sie allerdings nicht zum Selbstzweck eingeführt, sondern noch mehr mit ihnen vor. Denn da wir nun über den Begriff der Nähe etwas wissen, können wir doch auch fragen, was denn passiert, wenn Folgen abgebildet werden. Liefern dann die Bilder einer konvergenten Folge noch immer eine konvergente Folge? Wenn nicht allgemein, gibt es Kriterien dafür? Wozu eigentlich können wir den Begriff der Nähe noch verwenden? Antworten werden wir finden.

Folgen sind dann der Schlüssel zum Verständnis besonderer Eigenschaften von Funktionen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, mit denen Sie bereits in der Schule ersten Kontakt hatten.

Cauchy-Folgen spielen eine besondere Rolle. So ist ihre Konvergenz nicht immer garantiert, sondern wir müssen uns schon in „gutartigen“ Bereichen, wie beispielsweise  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , befinden.

Selbst sonderbar erscheinende Dinge wie die Fibonacci-Folge haben etwas mit der Natur zu tun. So weisen zahlreiche Pflanzen in ihrem Bauplan Spiralen auf, deren Anzahl durch Zahlen der Fibonacci-Folge gegeben sind, wie beispielsweise bei Samen in bestimmten Blütenständen.



Natur und Mathematik – ein Beispiel

Fibonacci (Leonardo da Pisa) selbst verwendete die Folge zur elementaren mathematischen Modellierung des Wachstums einer Population von Kaninchen nach einer bestimmten Vorschrift. Es gibt ferner einen Zusammenhang zum sogenannten goldenen Schnitt, der Ihnen vermutlich bereits aus Kunstkursen bekannt ist.

Wir behandelten an diversen Stellen auch komplexe Folgen. Dies wird im Folgenden wieder wichtig sein, z. B. bei den sogenannten unendlichen Reihen, dann allerdings erst wieder in einem der folgenden Bände. Der Grund dafür ist, dass es an vielen Stellen für die Untersuchungen keinen Unterschied macht, ob komplex oder reell gearbeitet wird. Sind beispielsweise Beträge im Spiel (wie bei der Definition der Folgenkonvergenz), so reduziert sich ohnehin alles auf reelle Zahlen. Dies ist allerdings nicht immer zu erwarten, denn die Analysis im Komplexen – auch als Funktionentheorie bezeichnet – birgt einige Besonderheiten, die keineswegs im Reellen (selbst bei Hinzunahme weiterer Dimensionen) zu erwarten sind.

## Selbsttest

**I.** Welche dieser Folgen sind konvergent?

(1)  $a_n = 23$

(4)  $d_n = \exp(-n)$

(2)  $b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

(5)  $e_n = (n+1)^2 - n^2$

(3)  $c_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}$

(6)  $f_n = (n+1) - n$

**II.** Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen sind richtig?

- (1) Jede monotone Folge ist konvergent.
- (2) Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.
- (3) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- (4) Jede monotone und beschränkte Folge ist eine Cauchy-Folge.
- (5) Es gibt Cauchy-Folgen, die divergieren.
- (6) Jede Folge besitzt einen Häufungspunkt.
- (7) Jede konvergente Folge besitzt einen Häufungspunkt.

**III.** Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend für die Konvergenz einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

- (1) Es gibt ein  $a \in \mathbb{C}$ , sodass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|a - a_n| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$ .
- (2) Es gibt ein  $z \in \mathbb{C}$ , sodass es für alle  $\delta > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|z - a_k| < \delta$  für alle  $k \geq n_0$ .
- (3) Für alle  $\delta > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_k - a_l| < \delta$  für alle  $k, l \geq N$ .
- (4) Es gibt ein  $a \in \mathbb{C}$ , sodass für alle  $\epsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  gilt: Es gibt ein  $n \geq N$  mit  $|a - a_n| < \epsilon$ .
- (5) Für alle  $\delta > 0$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt  $|a_m - a_n| < \delta$ .



# 16 Stetigkeit

## Einblick

Denken wir an den Begriff „Stetigkeit“, verbinden wir dies damit, dass es keine Brüche, Sprünge oder Risse gibt. Diese Vorstellung können wir auf den Verlauf von Funktionen übertragen: Der Funktionsgraph soll in einem Zug gezeichnet werden können.

Der nächste Schritt wird dann bei den differenzierbaren Funktionen vollzogen, die stets stetig sind, wie wir zeigen werden. Diese dürfen dann, im Gegensatz zu stetigen Funktionen, nicht einmal das haben, was wir uns allgemein als Ecken vorstellen.

Denken wir an ein Flugzeug und die Funktion, welche die Flughöhe in Abhängigkeit von der Flugzeit angibt. Diese Höhenfunktion sollte stetig sein (was würde sonst mit den Passagieren geschehen?). Der Begriff der Stetigkeit ist auch dazu geeignet, eine Funktion in gewissen Bereichen auf ihre Plausibilität in den Anwendungen zu prüfen.

Wir benötigen am Anfang noch einige Grundlagen, bei denen Folgen und Grenzwerte eine bedeutende Rolle spielen; dies rechtfertigt erneut unsere Bemühungen des letzten Kapitels.

## Grenzwerte von Funktionen

### ► Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und seien  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $f$  konvergiert an der Stelle  $\tilde{x}$  gegen  $\tilde{y}$ , falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $D \setminus \{\tilde{x}\}$  und  $x_n \rightarrow \tilde{x}$  gilt: Die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \tilde{y}.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y}. \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Verschiedene Sprechweisen sind im Zusammenhang mit obiger Definition üblich: Anstatt von Konvergenz an einer bestimmten Stelle zu sprechen, reden wir auch vom Grenzwert an der besagten Stelle.

Bitte beachten Sie, dass es sich bei der zuletzt genannten Schreibweise wirklich um eine Abkürzung handelt, denn hinter  $x \rightarrow \tilde{x}$  steht wirklich, dass wir alle Folgen  $(x_n)$  mit dem Grenzwert  $\tilde{x}$  betrachten. Dies ist natürlich ob der unendlichen Fülle solcher Folgen nur denkbar. Dennoch muss dies gefordert werden, denn nur so ist garantiert, dass die Art der Annäherung an  $\tilde{x}$  durch Folgen – die ja bei der Wahl nur spezieller Folgen eingeschränkt wäre – keine Rolle spielen darf.

Es kann vorkommen, dass gar keine Folge  $(x_n)$  mit Werten in  $D \setminus \{\tilde{x}\}$  existiert, welche gegen  $\tilde{x}$  konvergiert. Dies ist so z. B. für  $D = [0, 1]$  und  $\tilde{x} = 2$ . In diesem Fall ist die Konvergenz von  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle fraglichen Folgen (nämlich keine) gewährleistet. Dies hat die logische, wenn auch etwas seltsam anmutende Konsequenz, dass  $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x)$  existiert – jedoch keinen festen, eindeutigen Wert hat, sondern jeden beliebigen vorgegebenen Wert annimmt. Aus diesem Grunde sind solche Stellen auch nicht besonders interessant und im Folgenden kein Gegenstand der Betrachtungen.

### Beispiel

Für alle reellen Folgen  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot x_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Daraus folgern wir, dass der Grenzwert der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  an der Stelle  $\tilde{x} = 0$  existiert und gleich null ist:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

### Beispiel

Betrachten wir die Funktion

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

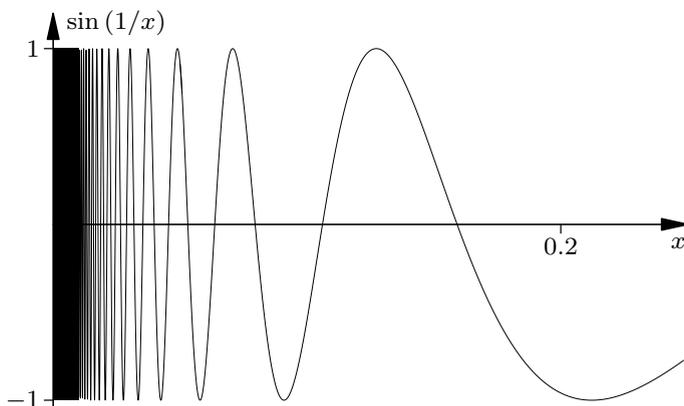
Die Folge

$$\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert zwar gegen  $\tilde{x} = 0$ , die entsprechende Folge von Funktionswerten ist jedoch divergent:

$$g(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  existiert also nicht; nachstehend ist der Graph der Funktion dargestellt.



Der Graph für  $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

### ■ Satz

Seien  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ). Sei außerdem  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  eine Stelle, an der  $f_1$  und  $f_2$  gegen den Grenzwert  $\tilde{y}_1$  bzw.  $\tilde{y}_2$  konvergieren:

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f_i(x) = \tilde{y}_i$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} (f_1(x) + f_2(x)) = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \tilde{y}_1 \cdot \tilde{y}_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \left( \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = \frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2}, \quad \text{falls } \tilde{y}_2 \neq 0,$$

dort, wo die zusammengesetzten Funktionen definiert sind.

**Beweis:** Hier ergeben sich die Aussagen wesentlich aus den Rechenregeln für Grenzwerte. ■

### Erläuterung

Wir können Funktionen mit verschiedenen Definitionsbereichen z. B. punktweise addieren oder multiplizieren und vereinbaren dann einfach, dass die Summe oder das Produkt auf dem Schnitt der Definitionsbereiche „lebt“. Bei der Division zweier Funktionen müssen wir den Definitionsbereich außerdem so einschränken, dass nicht durch null geteilt wird.

**Beispiel**

Sei

$$f_1: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

und

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x.$$

Dann gilt

$$f_1 \cdot f_2: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

**Beispiel**

Sei

$$g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{42} + 23$$

und

$$g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Dann gilt

$$\frac{g_1}{g_2}: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, x \mapsto \frac{x^{42} + 23}{x^2 - 1}.$$

**► Definition**

Sei wie oben  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $f$  konvergiert an der Stelle  $\tilde{x}$  von links gegen  $\tilde{y}$ , falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $D \setminus \{\tilde{x}\}$ ,  $x_n \rightarrow \tilde{x}$  und  $x_n < \tilde{x}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \tilde{y}.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x \nearrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y}.$$

Entsprechend wird der rechtsseitige Grenzwert über Folgen mit  $x_n > \tilde{x}$  definiert und wir schreiben

$$\lim_{x \searrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y}. \quad \blacktriangleleft$$

**Erläuterung**

Eine Funktion konvergiert genau dann an einer Stelle, wenn dort sowohl links- als auch rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{x \nearrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y} = \lim_{x \searrow \tilde{x}} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y}$$

„Linksseitig“ wird auch mit „von unten“ und „rechtsseitig“ mit „von oben“ assoziiert.

Existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert, stimmen diese jedoch nicht überein, so sprechen wir auch von einer Sprungstelle.

In der Literatur finden Sie auch die Bezeichnungen  $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}-} f(x)$  oder  $f(\tilde{x}-)$  für den linksseitigen bzw.  $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}+} f(x)$  oder  $f(\tilde{x}+)$  für den rechtsseitigen Grenzwert.

### Beispiel

Die sogenannte Dirichlet-Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgends stetig:

Sei  $x \notin \mathbb{Q}$  und  $(x_n) = (n_0, n_0 + n_1 10^{-1}, n_0 + n_1 10^{-1} + n_2 10^{-2}, \dots)$  die Folge rationaler Zahlen, die sich aus der Dezimaldarstellung

$$x = n_0 + n_1 10^{-1} + n_2 10^{-2} + \dots$$

ergibt. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x_n \in \mathbb{Q}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(x)$$

Sei nun  $x \in \mathbb{Q}$  und  $(x_n)$  die Folge mit  $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x_n \notin \mathbb{Q}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = f(x)$$

### Beispiel

Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

hat bei  $\tilde{x} = 0$  eine Sprungstelle, denn es gilt:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{|x|} = -1 \text{ und } \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{|x|} = 1$$

## Definition und Beispiele stetiger Funktionen

### ► Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig an der Stelle  $\tilde{x} \in D$ , falls der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $\tilde{x}$  existiert und mit dem entsprechenden Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$$

Ist  $f$  an jeder Stelle  $\tilde{x} \in D$  stetig, so sagen wir kurz:  $f$  ist stetig. ◀

### Erläuterung

Gilt obige Aussage nur für den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle  $\tilde{x}$ , so heißt es auch, die Funktion ist an dieser Stelle links- bzw. rechtsseitig stetig. Eine Funktion ist genau dann stetig an einer Stelle, wenn sie dort sowohl links- als auch rechtsseitig stetig ist.

### ■ Satz

Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen sind stetig.

**Beweis:** Der Beweis ergibt sich wesentlich aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen. ■

### ■ Satz

Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

**Beweis:** Seien  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) stetige Funktionen mit  $f_1(D_1) \subseteq D_2$ . Wir möchten zeigen, dass  $f_2 \circ f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Sei also  $\tilde{x} \in D_1$  und  $(x_n)$  eine Folge mit  $x_n \in D_1 \setminus \{\tilde{x}\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ . Da  $f_1$  stetig ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x_n) = f_1(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . Da  $f_2$  stetig ist, gilt insbesondere für die Folge  $y_n = f_1(x_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(y_n) = f_2(\tilde{y}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(f_1(x_n)) = f_2(f_1(\tilde{x})),$$

also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_2 \circ f_1)(x_n) = (f_2 \circ f_1)(\tilde{x})$ . Da  $x_n$  und  $\tilde{x}$  beliebig gewählt waren, bedeutet das die Stetigkeit von  $f_2 \circ f_1$ . ■

### Erläuterung

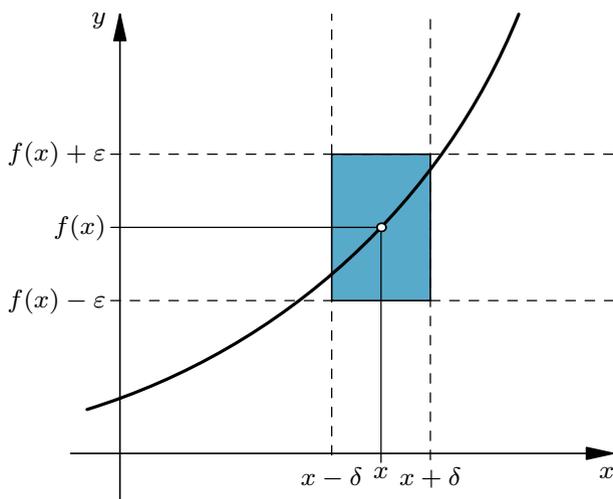
Es kann die Idee aufkommen, dass auch die Umkehrfunktion einer injektiven stetigen Funktion immer stetig ist. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es lässt sich

jedoch immerhin zeigen, dass eine auf einem Intervall definierte, streng monoton wachsende oder fallende stetige Funktion eine stetige Umkehrfunktion besitzt.

In vielen Lehrbüchern finden Sie die sogenannte  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $\tilde{x} \in D$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: (|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon)$$

Diese Definition ist äquivalent zu der von uns verwendeten Definition. Im Wesentlichen sagt das  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium anschaulich aus, dass benachbarte Urbilder auch benachbarte Bilder haben. Das hier vorkommende  $\delta$  ist bei genauer Betrachtung von  $\epsilon$  und  $\tilde{x}$  abhängig, es wird hier auch von punktwieser Stetigkeit gesprochen.



$\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit

### Beispiel

Seien  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $|x - x_0| < \delta$  mit  $\delta > 0$ . Wir haben dann

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leq |x - x_0||2(x_0 + \delta)| = |x - x_0||2x_0 + 2\delta| \leq 2\delta|x_0| + 2\delta^2,$$

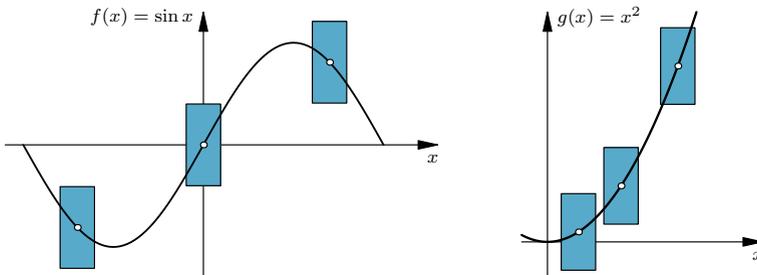
wobei der letzte Term beliebig klein, also auch kleiner als jedes  $\epsilon > 0$ , gemacht werden kann. Damit ist gezeigt, dass die betrachtete Funktion an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  das  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium für Stetigkeit erfüllt.

### ► Definition

Ist bei der  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit  $\delta$  nicht abhängig von  $\tilde{x}$ , so heißt die betrachtete Funktion gleichmäßig stetig. ◀

### Erläuterung

Die gleichmäßige Stetigkeit können wir uns so vorstellen: Zu jeder beliebig kleinen vertikalen Rechteckseite  $\epsilon$  kann eine hinreichend kleine horizontale Rechteckseite  $\delta$  gefunden werden, sodass, führen wir das Rechteck mit den Seiten  $\epsilon$  und  $\delta$  geeignet auf dem Funktionsgraphen entlang, dieser immer nur die vertikalen Rechtecksseiten schneidet. Für  $f(x) = \sin x$  klappt dies, bei  $g(x) = x^2$  jedoch nicht auf ganz  $\mathbb{R}$ :



Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt offensichtlich die punktweise.

### ■ Satz

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definierte stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Wir nehmen an, dass die Funktion  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist. Dann existieren Folgen  $(x_n)$  und  $(\tilde{x}_n)$  im Intervall  $[a, b]$ , sodass

$$|x_n - \tilde{x}_n| < \frac{1}{n}$$

gilt und ferner

$$|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \epsilon > 0.$$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß garantiert dann für  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit Grenzwert  $x$  in  $[a, b]$ . Dieser ist wegen

$$|x_{n_k} - \tilde{x}_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

gleichfalls Grenzwert der Folge  $(\tilde{x}_{n_k})$ . Da  $f$  stetig ist, folgt für  $n \rightarrow \infty$

$$|f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| \rightarrow |f(x) - f(x)| = 0,$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. ■

### Beispiel

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Funktion  $e_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$  stetig.

**Beispiel**

Konstante Funktionen und die Identität auf  $\mathbb{R}$ , nämlich  $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  sind stetig.

**Beispiel**

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig.

**Beispiel**

Die Funktion

$$\Theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig. ( $\Theta$  heißt auch Heaviside-Funktion oder schlicht Sprungfunktion.)

**Beispiel**

Die Betragsfunktion

$$|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist stetig.

**Erläuterung**

Da Produkte, Quotienten, Summen, Differenzen und Kompositionen stetiger Funktionen wieder stetig sind, gilt ganz allgemein: Polynome sind stetig, d. h., für reelle Zahlen  $a_0, \dots, a_n$  ist die Funktion  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  stetig.

Außerdem sind rationale Funktionen stetig, also Quotienten von Polynomen:

$$r: \mathbb{R} \setminus N \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0},$$

wobei  $N$  die Menge aller Nullstellen des Nenners bezeichnet.

**Beispiel**

Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, da der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x = 0$  nicht existiert.

### Beispiel

Die Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig: An jeder Stelle  $x \neq 0$  ist  $g$  als Komposition stetiger Funktionen stetig. An der Stelle  $x = 0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = g(0).$$

### Ausblick

Die Stetigkeit kann als eine der großen Errungenschaften der Analysis gelten. In gewisser Weise ist sie der erste Typ von „gutartigen“ Funktionen. In der Mathematik wird oft mehr gefordert, nämlich die bald behandelte Differenzierbarkeit. Dennoch genügt oft, auch für viele schöne Sätze, die Stetigkeit, denn durch diese haben wir eine gewisse Garantie dafür, dass die Funktionen keinen beliebigen Verlauf haben können.

Es gibt noch weitere Formen der Stetigkeit, etwa die Lipschitz-Stetigkeit, auf die wir hier allerdings nicht eingehen möchten.

Bitte überlegen Sie zum Abschluss noch kurz, welche Abläufe in der Natur stetig verlaufen, welche vielleicht nicht. Sie bekommen so ein gutes Gefühl für die Bedeutung der Stetigkeit in den Anwendungen.

## Selbsttest

I. Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$

(2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$

(3)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

(4)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$

(5)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - |x|x + 2\frac{|x|}{x}$

(6)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(7)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(8)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(9)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(10)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(11)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(12)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$



# 17 Der Zwischenwertsatz und Extrema stetiger Funktionen

## Einblick

Es ist zu erwarten, dass für stetige Funktionen bestimmte Sätze gelten, die gerade darauf basieren, dass solche Funktionen einen „gutartigen“ Verlauf haben und gerade keine Sprünge besitzen. Derartige Sätze werden wir behandeln. Ferner haben wir bereits alle Kenntnisse, um Funktionen auf „höchste“ und „tiefste“ angenommene Werte zu untersuchen; Maxima und Minima sind dabei wichtige Begriffe.

Unsere Überlegungen zu solchen Stellen werden hier nicht enden, jedoch gilt es, erstmals mit ihnen vertraut zu werden.

In verschiedensten Wissenschaften sind diese Begriffe von größter Bedeutung. Bei der Konstruktion von Verbrennungsmaschinen ist beispielsweise durchaus das Effizienz-Maximum von Interesse, beim Finden eines Weges das Minimum der benötigten Strecke. Teils wird ein solches nicht erreicht, dann bleibt zumindest ein möglicher größter bzw. kleinster Wert, den wir dann konkreter als Supremum kennenlernen werden; es handelt sich nämlich dabei um die kleinste der oberen Schranken, die eine Funktion nicht überschreitet.

## Der Zwischenwertsatz

### ► Definition

Für eine Folge reeller Zahlen  $(x_n)$  in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  kann durch fortgesetztes Unterteilen des Intervalls ein Häufungspunkt konstruiert werden, indem in jedem Schritt ein Intervall ausgewählt wird, das unendlich viele Folgenglieder enthält. Wählen wir dabei stets das auf der reellen Zahlengeraden am weitesten rechts liegende Intervall, so heißt der erhaltene Häufungspunkt der obere Häufungspunkt oder Limes superior der Folge:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Wählen wir immer das am weitesten links liegende Intervall, erhalten wir den unteren Häufungspunkt bzw. Limes inferior:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$



### Erläuterung

Dieselbe Konstruktion können wir nicht nur für Folgen, sondern auch für beliebige Teilmengen (mit unendlich vielen Elementen) des Intervalls durchführen: Ist  $M \subseteq [a, b]$  gegeben, dann teilen wir  $[a, b]$  in z. B. zehn Intervalle und wählen aus diesen jenes Intervall aus, welches am weitesten rechts auf der Zahlengeraden liegt und noch unendlich viele Punkte aus  $M$  enthält. Wiederholen wir das Verfahren mit diesem Intervall und so weiter ad infinitum, bekommen wir den oberen Häufungspunkt von  $M$  und analog den unteren Häufungspunkt von  $M$ .

### ■ Satz

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann hat  $f$  (mindestens) eine Nullstelle, d. h., es existiert ein  $\beta \in ]a, b[$  mit  $f(\beta) = 0$ .

**Beweis:** Die Beweisidee lautet wie folgt: Wir betrachten die Menge  $M$  der Punkte  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) < 0$ , d. h.

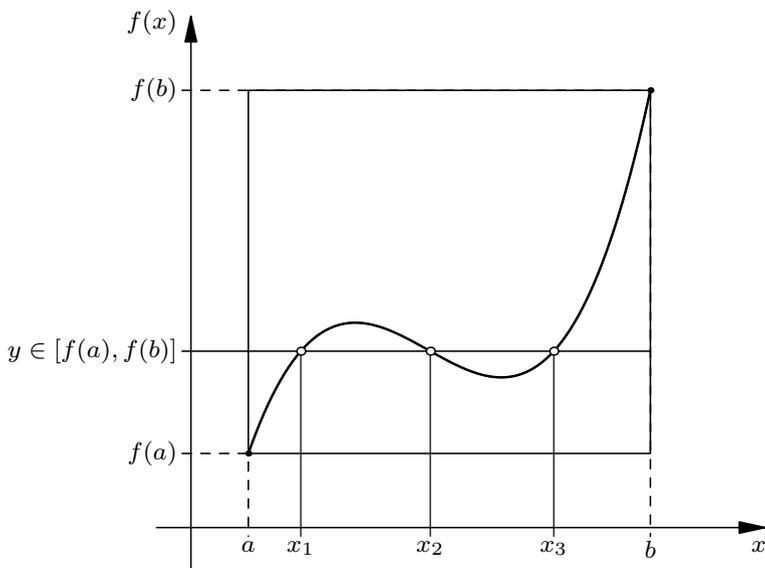
$$M = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\} \subseteq [a, b].$$

Dann existiert ein oberer Häufungspunkt  $\beta \in [a, b]$  von  $M$  mit  $f(\beta) \leq 0$ . Wir behaupten, dass  $\beta$  eine Nullstelle von  $f$  ist. Angenommen  $f(\beta) < 0$ , dann wäre  $f$  aufgrund der Stetigkeit auch in einer  $\epsilon$ -Umgebung um  $\beta$  kleiner als null, also auch für ein  $\tilde{x} > \beta$ . Dies widerspräche dann aber der Eigenschaft von  $\beta$ , oberer Häufungspunkt zu sein. ■

### ■ Satz

Eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

**Beweis:** Beim Fall  $f(a) = f(b)$  ist nichts zu zeigen. Sei daher o. B. d. A.  $f(b) > f(a)$  und  $c \in ]f(a), f(b)[$ . Dann hat die Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - c$  eine Nullstelle  $\beta$ , da  $g(a) = f(a) - c < 0$  und  $g(b) = f(b) - c > 0$ . Es gilt  $f(\beta) = c$ . ■



Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen: Für alle  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ist  $f^{-1}(\{y\})$  nicht leer.

## Bestimmte Divergenz

### ► Definition

Die formalen Symbole  $+\infty$  (auch nur  $\infty$  geschrieben) und  $-\infty$  seien so definiert, dass die Aussagen „ $x < +\infty$ “ und „ $x > -\infty$ “ für alle  $x \in \mathbb{R}$  wahr sind, während „ $x > +\infty$ “ und „ $x < -\infty$ “ für alle  $x \in \mathbb{R}$  jeweils falsch sind. Für eine Folge  $(x_n)$  schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty,$$

falls es zu jedem  $C \in \mathbb{R}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $x_n > C$  bzw.  $x_n < C$  für alle  $n \geq N$  gilt. ◀

### Erläuterung

Offensichtlich ist  $(x_n)$  in diesen Fällen divergent (da nichtbeschränkt); wir sprechen dann auch von bestimmter Divergenz.

Es gibt nichtbeschränkte und divergente Folgen, die jedoch nicht bestimmt divergieren. Ein Beispiel ist die Folge  $(y_n)$  mit  $y_n = (-1)^n n$ .

Entsprechend lässt sich über bestimmt divergente Folgen – analog zur Definition mit konvergenten Folgen – auch der Grenzwert von Funktionen „im Unendlichen“ definieren:

**Beispiel**

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \text{ und } \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Beispiel**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

**Beispiel**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{5}{2} \text{ und } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = \infty.$$

**Erläuterung**

Es muss beachtet werden, dass „ $\infty$ “ keine reelle oder sonst irgendwie geartete Zahl ist, mit der gerechnet werden kann. Es gibt zwar keine Widersprüche, wenn wir z. B. „ $\infty \cdot \infty = \infty$ “ definieren – der Ausdruck „ $\infty - \infty$ “ ist jedoch nicht erklärt: Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0,$$

aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1) - n) = 1$$

und sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^2 - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty.$$

**Maximum/Minimum und Supremum/Infimum****► Definition**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{x} \in D$  und  $\tilde{y} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} (= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ .

1. Wir sagen,  $f$  nimmt in  $\tilde{x}$  das (globale) Maximum  $\tilde{y}$  an, wenn gilt:

- a)  $f(x) \leq \tilde{y}$  für alle  $x \in D$ ,
- b)  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ ,

und schreiben dann  $\tilde{y} = \max_{x \in D} f(x)$ .

Gilt außerdem ausschließlich an der Stelle  $x = \tilde{x}$  die Gleichheit  $f(x) = \tilde{y}$ , so sprechen wir von einem strikten oder strengen Maximum.

2. Der Wert  $\tilde{y}$  heißt Supremum von  $f$ , wenn gilt:

- a)  $f(x) \leq \tilde{y}$  für alle  $x \in D$ ,
- b) es existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $D$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \tilde{y}$ .

Wir schreiben dann  $\tilde{y} = \sup_{x \in D} f(x)$ .

3. Wir sagen,  $f$  nimmt in  $\tilde{x}$  das lokale Maximum  $\tilde{y}$  an, falls  $\epsilon > 0$  existiert, sodass gilt:

- a)  $f(x) \leq \tilde{y}$  für alle  $x \in D$  mit  $|x - \tilde{x}| < \epsilon$ ,
- b)  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ .

Analog werden Minimum, Infimum und lokales Minimum von  $f$  definiert. ◀

### Erläuterung

Bei den obigen Definitionen können nur Supremum bzw. Infimum auch die Werte  $\tilde{y} = +\infty$  bzw.  $\tilde{y} = -\infty$  haben und wir sehen, dass tatsächlich das Supremum die kleinste obere und das Infimum die größte untere Schranke ist.

Jedes globale Maximum ist auch Supremum und lokales Maximum. Ein lokales Maximum muss jedoch kein globales Maximum sein.

Jede Funktion besitzt ein Supremum und ein Infimum. Das ist relativ leicht einzusehen, wenn wir bedenken, dass alle Funktionswerte kleiner oder größer als „ $\infty$ “ bzw. „ $-\infty$ “ sind.

### Beispiel

Nicht jede Funktion nimmt ein Maximum oder Minimum an. Die Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  und  $g: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \tan x$  sind beispielsweise nicht beschränkt und nehmen weder Maximum noch Minimum an. Die Funktion  $h: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sqrt{x}$  nimmt ebenfalls weder Maximum noch Minimum an, obwohl sie beschränkt ist. Allerdings gilt  $\sup_{x \in ]0, 1[} h(x) = 1$  und  $\inf_{x \in ]0, 1[} h(x) = 0$ .

## Maximum und Minimum stetiger Funktionen

### ■ Satz

Eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte, stetige Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum an.

**Beweis:** Wir zeigen nur den Beweis für das Maximum; der Beweis für das Minimum funktioniert analog. Sei also  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und

$$\tilde{y} = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Wenn wir ein  $\tilde{x} \in [a, b]$  mit  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$  konstruieren können, sind wir fertig, da  $f(x) \leq \tilde{y}$  für alle  $x \in [a, b]$ . Nach der Definition des Supremums existiert eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in [a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \tilde{y}.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $a \leq x_n \leq b$ , folglich ist  $(x_n)$  beschränkt. Nach dem Häufungspunktprinzip enthält  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(\tilde{x}_n)$  mit Grenzwert  $\tilde{x} \in [a, b]$ . Da  $f$  stetig ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(\tilde{x}) = \tilde{y} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Dieser Satz war sicher nicht zu erwarten und hat eine besondere Macht. An den verschiedensten Stellen findet er Verwendung und wird Sie sicher für ein gesamtes mathematisches Leben begleiten.

## Ausblick

Stetige Funktionen haben wunderbare Eigenschaften, von denen wir hier einige kennenlernten. Es sind solche, die nicht nur Selbstzweck sind, sondern an diversen Stellen wiederverwendet werden, und sei es nur in Beweisen.

Exemplarisch für die Bedeutung von Sätzen über stetige Funktionen wollen wir nochmals auf den letzten eingehen. Dieser garantiert nämlich auch, dass eine stetige Funktion auf einem Intervall beschränkt ist, denn wir kommen auf einem abgeschlossenen Intervall weder unter das Minimum noch über das Maximum hinaus. Er hat in mehreren Dimensionen (und gar bestimmten anderen Räumen) weiterhin seine Gültigkeit. Dann muss allerdings gesagt werden, was an die Stelle eines abgeschlossenen Intervalls treten wird: Sogenannte kompakte Mengen liefern später das Gewünschte.

## Selbsttest

I. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (1) Die Folge  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert.
- (2) Die Folge  $(f((-1)^n))_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f((-1)^n n) = \infty$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = \infty$
- (6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$
- (7)  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \infty$
- (8)  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \infty$
- (9)  $f$  nimmt alle Werte zwischen  $f(0)$  und  $f(1)$  an.
- (10)  $f$  nimmt alle Werte zwischen  $f(0)$  und  $f(\infty)$  an.
- (11)  $f$  nimmt alle Werte an, die größer sind als  $f(0)$ .
- (12) Es ist möglich, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ .
- (13) Es ist möglich, dass  $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \infty$ .
- (14) Es ist möglich, dass  $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$ .
- (15) Wenn  $f(0) > 0$  und  $f(1) < 0$  gilt, besitzt  $f$  eine Nullstelle im Intervall  $[0, 1]$ .
- (16) Wenn  $f(0) < 0$  gilt, besitzt  $f$  eine Nullstelle.
- (17) Die Einschränkung von  $f$  auf das Intervall  $[0, 1]$  (d. h. die Funktion  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}(x) := f(x)$ ) nimmt ihr Maximum an.
- (18) Die Einschränkung von  $f$  auf  $]0, 1]$  nimmt ihr Maximum an.



# 18 Differenzierbarkeit

## Einblick

Beschreibt eine Funktion  $f$  einen Prozess in Abhängigkeit von einer Variablen, wir denken in den Naturwissenschaften meist an die Zeit  $t$ , so bleibt  $f(t)$  nur dann konstant, wenn keine Veränderungen auftreten. Existieren solche jedoch, steigt oder fällt also die Funktion, so wissen wir durch deren Bestimmung auch, was für zukünftige Zeiten passiert: Die Änderungen sind es, die das Geschehen widerspiegeln. In der Mathematik heißt dies, dass die momentane Änderung von  $f(t)$  durch die Ableitung (anders gesagt: durch das Differenzieren) bestimmt wird.

Wir sehen, dass sich der Hauptgedanke des Differenzierens, nämlich das Bestimmen der Steigung einer Funktion in einem Punkt, fast von selbst motiviert.

## Grundlegendes zum Differenzieren

### ► Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $x \in D$  differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Wir nennen diesen Grenzwert die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ . Für die Ableitung gibt es eine Reihe verschiedener Schreibweisen, z. B.  $f'(x)$  und  $\frac{df}{dx}(x)$ .

Ist  $f$  an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt  $f$  differenzierbar. ◀

### Erläuterung

Ist in einer physikalischen Anwendung eine Funktion der Zeit gegeben, so hat sich insbesondere der Punkt als Schreibweise für die Ableitung durchgesetzt:

$$\frac{df}{dt}(t) = \dot{f}(t)$$

Die Bezeichnung  $\frac{df}{dx}(x)$  oder  $\frac{d}{dx}f(x)$  ist mit Vorsicht zu genießen, da „ $x$ “ in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkommt, nämlich als formales „ $x$ “ bei  $dx$

und als Bezeichnung der Stelle  $x \in \mathbb{R}$ , an der die Ableitung ausgewertet wird. So ergibt z. B. der Ausdruck  $\frac{df}{dt}(0)$  keinen Sinn. Diese Notation ist jedoch ideal, um das formale Ableiten eines explizit gegebenen Funktionsterms nach einer festen Variablen zu kennzeichnen, also z. B. gerade nach  $t$  (dann  $\frac{d}{dt}$ ) oder eben  $x$  (dann  $\frac{d}{dx}$ ), wobei natürlich auch jede beliebige andere Variable denkbar ist, die als Argument von  $f$  auftaucht.

Häufig wird das Argument einer Funktion unterdrückt, wenn klar ist, was als Argument überhaupt infrage kommen kann; wir schreiben dann also z. B.  $f'$  anstatt von  $f'(x)$ . Wenn das Argument allerdings eine wichtige Information beinhaltet, dann muss es aufgeführt werden. So ist nämlich  $\frac{d}{dx}f(y)$  die Ableitung einer Funktion, die gar nicht von der Variablen  $x$  abhängt. Dies wird in den folgenden Bänden noch bedeutsam sein.

### Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ . Dann ist  $f$  differenzierbar und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

### Beispiel

Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  die Betragsfunktion. An der Stelle  $\tilde{x} = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{g(\tilde{x}+h) - g(\tilde{x})}{h} &= \frac{g(h) - 0}{h} \\ &= \frac{|h|}{h} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{für } h < 0 \\ +1 & \text{für } h > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Folglich ist  $g$  an dieser Stelle nicht differenzierbar, da

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{g(\tilde{x}+h) - g(\tilde{x})}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{g(\tilde{x}+h) - g(\tilde{x})}{h},$$

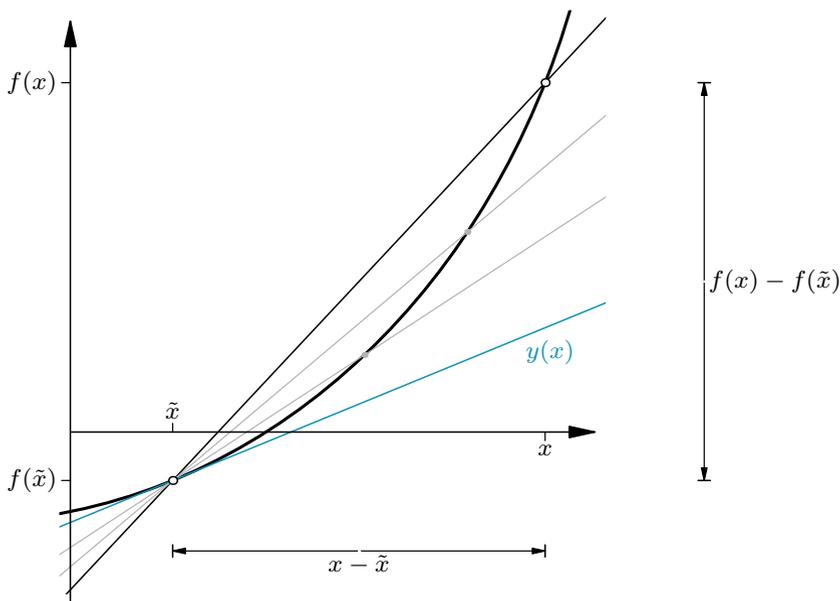
sodass der Grenzwert des Differenzenquotienten dort nicht erklärt ist. Wie wir sehen, gibt es also durchaus stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind.

**Erläuterung**

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion  $f$  an einer Stelle  $\tilde{x}$  kann äquivalent dargestellt werden als

$$f'(\tilde{x}) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x - \tilde{x}},$$

wobei dann einfach  $h = x - \tilde{x}$  ist. In dieser Form ist besonders leicht zu sehen, dass der Differenzenquotient die Steigung der Sekante ist, welche die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$  verbindet:



Sekante und Tangente am Graphen einer Funktion

Im Grenzwert  $x \rightarrow \tilde{x}$  kann die Ableitung dann interpretiert werden als die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion im Punkt  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ .

Heuristisch betrachtet ist dann „in der Nähe“ von  $\tilde{x}$  die Tangente eine „gute“ Näherung (lineare Approximation) an die Funktion:

$$f'(\tilde{x}) \approx \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} \Rightarrow f(x) \approx f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + f(\tilde{x}) = y(x).$$

Die Gleichung der Tangente ist hierbei gegeben durch:

$$y(x) = f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + f(\tilde{x}) = f'(\tilde{x})x + (f(\tilde{x}) - f'(\tilde{x})\tilde{x}) = mx + b$$

mit der Steigung  $m = f'(\tilde{x})$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $b = f(\tilde{x}) - f'(\tilde{x})\tilde{x}$ .

## Differenzierbare und stetige Funktionen

### ■ Satz

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

**Beweis:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle  $\tilde{x} \in D$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} (f(x) - f(\tilde{x})) &= \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} (x - \tilde{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} (x - \tilde{x}) \\ &= f'(\tilde{x}) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Folglich gilt  $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$  und somit ist  $f$  stetig. ■

### Erläuterung

Wir wissen bereits, dass stetige Funktionen nicht differenzierbar sein müssen, allerdings liegt Stetigkeit in jedem Fall für differenzierbare Funktionen vor. Oft wird in der Mathematik von stetig differenzierbaren Funktionen (bzw. auch allgemeiner von stetig differenzierbaren Abbildungen) gesprochen. Damit ist nichts Überflüssiges gesagt, denn differenzierbare Funktionen sind zwar stetig, allerdings muss die Ableitung einer solchen Funktion noch lange nicht wieder stetig sein. Es gibt auch Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ), die sogar mehrfach stetig differenzierbar sind – auf die mehrfache Differenzierbarkeit kommen wir später zurück. Solche Funktionen haben eine eigene Bezeichnung bekommen:  $C^k(I, \mathbb{R})$ ; dies beschreibt dann die Menge der  $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen von  $I$  nach  $\mathbb{R}$ .  $C^0(I, \mathbb{R})$  ist nach Definition die Menge der stetigen Funktionen,  $C^\infty(I, \mathbb{R})$  diejenige der beliebig („unendlich“) oft stetig differenzierbaren.

## Rechenregeln für Ableitungen

### ■ Satz

Seien  $f, g$  differenzierbare Funktionen. Dann sind – dort wo die zusammengesetzten Funktionen definiert sind – Summe, Produkt, Quotient und Komposition von  $f$  und  $g$  differenzierbar und es gilt:

1. a)  $(f + g)' = f' + g'$
- b)  $(c \cdot f)' = c \cdot f'$  für alle  $c \in \mathbb{R}$

$$2. (f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produktregel)}$$

$$3. \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ (Quotientenregel)}$$

$$4. (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \text{ (Kettenregel)}$$

**Beweis:** Wir beweisen exemplarisch eine kleine Auswahl, und zwar zuerst den Unterpunkt 1.b):

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

Nun die Kettenregel: Für jedes  $\tilde{y}$  im Definitionsbereich von  $f$  definieren wir die Funktion

$$F_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(\tilde{y})}{y - \tilde{y}} & \text{für } y \neq \tilde{y} \\ f'(\tilde{y}) & \text{für } y = \tilde{y}, \end{cases}$$

über die der Beweis recht einfach erfolgt. Da nämlich  $f$  in  $\tilde{y}$  differenzierbar ist, haben wir  $\lim_{y \rightarrow \tilde{y}} F_{\tilde{y}}(y) = f'(\tilde{y})$ , also ist  $F_{\tilde{y}}(y)$  an der Stelle  $y = \tilde{y}$  stetig. Ferner gilt für alle  $y$  im Definitionsbereich von  $f$  die Gleichung  $f(y) - f(\tilde{y}) = F_{\tilde{y}}(y) \cdot (y - \tilde{y})$  und es folgt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(\tilde{x}) &= \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{f(g(x)) - f(g(\tilde{x}))}{x - \tilde{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{F_{g(\tilde{x})}(g(x)) \cdot (g(x) - g(\tilde{x}))}{x - \tilde{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} F_{g(\tilde{x})}(g(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{g(x) - g(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} \\ &= f'(g(\tilde{x})) \cdot g'(\tilde{x}). \\ &= (f' \circ g)(\tilde{x}) \cdot g'(\tilde{x}) \\ &= ((f' \circ g) \cdot g')(\tilde{x}) \end{aligned}$$

### Erläuterung

Es hat sich für die Kettenregel der folgende Merksatz eingebürgert: „Äußere Ableitung (die von  $f$ ) mal innere Ableitung (die von  $g$ ).“

Die Rechenregeln unter 1. stellen eine Wiederholung der Tatsache dar, dass zum einen die Menge der differenzierbaren Funktionen einen Vektorraum bildet, zum anderen die Ableitung eine lineare Abbildung ist. Dabei ist natürlich nicht nur stur auf die Regeln zu verweisen, sondern auch die Voraussetzungen spielen – wie immer – eine prominente Rolle. Nur durch diese sehen wir

beispielsweise, dass die Summe differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar ist, was gerade ein Baustein der Vektorraumeigenschaft für die Menge der differenzierbaren Funktionen ist.

### ■ Satz

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und streng monotone Funktion und  $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  die Umkehrfunktion. Ist  $f$  in  $x \in I$  differenzierbar und gilt  $f'(x) \neq 0$ , so ist  $f^{-1}$  in  $y = f(x)$  ebenfalls differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Beweis:** Für alle  $y \in f(D)$  gilt vermöge der Kettenregel:

$$\begin{aligned} y &= f(f^{-1}(y)) \Rightarrow \\ 1 &= f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \Rightarrow \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{aligned}$$

Wir haben damit den für Berechnungen wichtigen Teil gezeigt. Auf den Beweis der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion möchten wir verzichten. ■

### Beispiel

Die Funktion

$$f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

ist injektiv und differenzierbar. Die Umkehrfunktion von  $f$  ist die Quadratwurzel

$$f^{-1}: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}.$$

Die Ableitung von  $f$  ist für alle  $x \in ]0, \infty[$  gegeben durch  $f'(x) = 2x \neq 0$ . Für die Ableitung von  $f^{-1}$  gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### Beispiel

Die folgende Tabelle stellt einige bekannte Ableitungen zusammen:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^s$	$sx^{s-1} \ (s \in \mathbb{R})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$	$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x = \sin x / \cos x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$

### Beispiel

Für die Ableitung der Funktion  $f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$  gilt:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^x) \\
 &= \frac{d}{dx}(e^{\ln(x^x)}) \\
 &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln x}) \\
 &= e^{x \ln x} \frac{d}{dx}(x \ln x) \\
 &= x^x \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\
 &= x^x (\ln x + 1)
 \end{aligned}$$

## Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

### ■ Satz

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $x_0$  ein innerer Punkt von  $D$ . Nimmt  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein lokales Minimum oder Maximum an, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

**Beweis:** Die Funktion nehme o. B. d. A. ein lokales Maximum an. Dann gibt es also eine  $\epsilon$ -Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit  $f(x_0) - f(x) \geq 0$  für alle  $x \in U$ . Da

$x_0$  ein innerer Punkt ist, gibt es Folgen in  $U$ , die von links bzw. von rechts gegen  $x_0$  konvergieren, sodass für den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0.$$

Folglich ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0. \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Dieser Satz gibt uns nur ein notwendiges Kriterium zur Untersuchung auf Maxima bzw. Minima. Später werden wir auch erfahren, wie der Rest bewerkstelligt wird. Wir können uns aber bereits an dieser Stelle merken, dass zuerst überhaupt einmal nach Kandidaten gesucht werden muss, die wir gerade durch das Auffinden der Punkte mit  $f'(x_0) = 0$  bekommen.

Der Satz findet aber auch sonst häufig Anwendung in verschiedenen Argumentationen.

## Der Mittelwertsatz

### ■ Satz

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Seien ferner  $a, b \in I$  mit  $a < b$ . Wenn  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und auf  $]a, b[$  differenzierbar ist, dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Beweis:** Der Beweis wird gewöhnlich über den sogenannten Satz von Rolle geführt: Eine Funktion  $f$ , die in  $[a, b]$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar ist und ferner  $f(a) = f(b)$  erfüllt, hat wenigstens an einer Stelle  $\xi \in ]a, b[$  eine verschwindende Ableitung. Der Beweis geht wie folgt: Für konstante Funktionen ist nichts zu zeigen. Ansonsten gibt es  $x \in ]a, b[$  mit  $f(x) > f(a)$  oder solche mit  $f(x) < f(a)$ . Da  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, nimmt  $f$  für wenigstens ein  $\xi \in [a, b]$  ein Maximum für  $f(x) > f(a)$  bzw. ein Minimum für  $f(x) < f(a)$  an. Weil  $a$  und  $b$  keine Maxima bzw. Minima sein können, gilt folglich  $a < \xi < b$ . Für  $\xi$  muss  $f'(\xi) = 0$  gelten, denn sonst könnte o. B. d. A. angenommen werden, dass  $f'(\xi) > 0$  ist. Für alle  $x$  aus einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $\xi$  gilt dann  $f(x) - f(\xi) < 0$ ,

wenn  $x < \xi$ , und  $f(x) - f(\xi) > 0$ , wenn  $x > \xi$  ist. Dann würde es in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $\xi$  sowohl Elemente mit  $f(x) > f(\xi)$ , als auch Elemente mit  $f(x) < f(\xi)$  geben. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass  $f$  in  $\xi$  ein Extremum hat.

Wir definieren nun eine Hilfsfunktion  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion ist stetig auf  $[a, b]$ , im offenen Intervall differenzierbar und es gilt  $h(a) = h(b)$ . Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $h'(\xi) = 0$  und

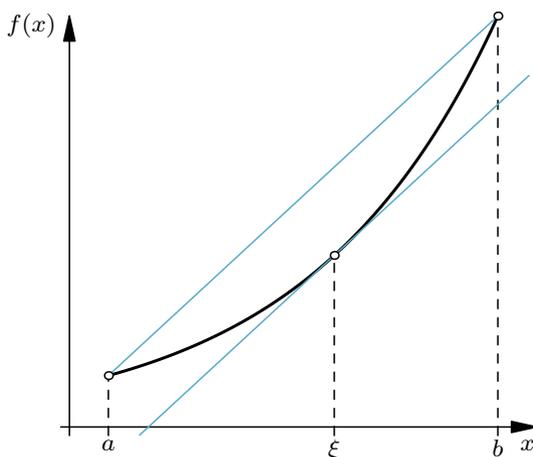
$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ergibt die Behauptung durch das Umstellen nach  $f'(\xi)$ . ■

### Erläuterung

Mit Intervall meinen wir im obigen Satz, welcher Mittelwertsatz der Differentialrechnung genannt wird, also ein abgeschlossenes, offenes oder halboffenes Intervall, ein uneigentliches Intervall der Form  $[a, \infty[$ ,  $]a, \infty[$  usw. oder auch ganz  $\mathbb{R}$ . Der Mittelwertsatz (oder z. B. auch das noch folgende Monotoniekriterium für Funktionen) ist falsch, wenn der Definitionsbereich der fraglichen Funktion kein Intervall ist.

Der Mittelwertsatz hat folgende Anschauung:



### ■ Satz

Wenn die Ableitung von  $f$  beschränkt ist, d. h., es gibt ein  $M \geq 0$  mit  $|f'(x)| \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann gilt:

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$$

**Beweis:** Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)| \cdot (b - a) \leq M(b - a) \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Dieser Satz kann auch wie folgt zusammengefasst werden: Aus Schranken für die Ableitung einer Funktion erhalten wir Schranken für den Abstand von Funktionswerten.

## Monotone Funktionen

### ► Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion;  $f$  heißt **monoton wachsend** (steigend), falls für alle  $a, b \in D$  mit  $a < b$  gilt:  $f(a) \leq f(b)$ .

Die Funktion heißt **streng monoton wachsend** (steigend), falls für alle  $a, b \in D$  mit  $a < b$  gilt:  $f(a) < f(b)$ .

Analog werden **monoton** und **streng monoton abnehmend** (fallend) definiert. ◀

### Beispiel

Denken wir an bijektive Funktionen auf einem Intervall und visualisieren uns mental mögliche Funktionsgraphen, so könnte die Vermutung aufkommen, dass solche Funktionen dort stets monoton sind. Dem ist allerdings nicht so. Betrachten wir dazu die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese ist bijektiv, und für die Umkehrfunktion gilt  $f^{-1} = f$ . Es gilt  $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$  und

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

jedoch ist  $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2}$  und

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Folglich ist  $f$  zwar bijektiv, jedoch nicht monoton. Stetige, bijektive und auf einem Intervall definierte Funktionen sind jedoch stets monoton. Die obige Beispielfunktion ist nicht stetig.

**■ Satz**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Falls  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$  gilt, dann ist  $f$  streng monoton steigend bzw. für  $f'(x) < 0$  streng monoton fallend.

**Beweis:** Seien  $a, b \in I$  mit  $a < b$ . Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) > 0,$$

da  $f'(\xi) > 0$  und  $b - a > 0$ . ■

**Erläuterung**

Der Satz gilt analog für monoton steigende ( $f'(x) \geq 0$ ) und monoton fallende Funktionen ( $f'(x) \leq 0$ ).

Im Fall von nichtstrenger Monotonie gilt auch der Umkehrschluss, wie wir sofort sehen: Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton steigend und differenzierbar, so haben wir für alle  $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

da aufgrund der Monotonie Zähler und Nenner des Differenzenquotienten stets gleiches Vorzeichen haben. Im Fall monoton fallender Funktionen haben Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen, sodass  $f'(x_0) \leq 0$  gilt. Es folgt jedoch aus strenger Monotonie nicht, dass stets  $f'(x) > 0$  oder  $f'(x) < 0$ , wie das Beispiel  $f(x) = x^3$  zeigt: Diese Funktion ist streng monoton steigend, besitzt jedoch an der Wendestelle  $x = 0$  eine verschwindende Ableitung.

**■ Satz**

Eine auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  definierte Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann konstant, wenn  $f$  differenzierbar ist und  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in I$  gilt.

**Beweis:** Der Beweis ist eine direkte Konsequenz des letzten Satzes und der zugehörigen Bemerkung. ■

**Erläuterung**

Das Konstanzkriterium wird häufig – auch für mathematische Argumentationen in den Naturwissenschaften – verwendet. Gibt es nämlich keine Änderungen (ist also stets  $f'(x) = 0$ ), so muss die Funktion einen konstanten Verlauf haben. Bitte betrachten Sie in diesem Zusammenhang auch einmal den Schrankensatz für Funktionen mit verschwindender Ableitung und stellen Sie fest, dass darin auch der Beweis des Konstanzkriteriums steckt, denn es kann  $M = 0$  gewählt werden.

## Die Regel von L'Hospital

### ■ Satz

Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Intervall  $I$  differenzierbar, und für ein  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  gelte entweder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}.$$

Ferner sei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

mit  $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

**Beweis:** Wir wollen uns den ersten Fall klarmachen: Nahe bei  $x_0$  werden  $f$  und  $g$  durch ihre Tangenten mit Steigungen  $f'(x_0)$  bzw.  $g'(x_0)$  approximiert. Je näher wir also an diesen Punkt  $x_0$  kommen, desto weniger Unterschied gibt es zwischen den Funktionen und ihrer jeweiligen Approximation. So können wir einsehen, dass auch das Verhältnis der Funktionen im Grenzwert dem Verhältnis ihrer Tangenten für den Punkt  $x_0$  entspricht. Die Tangentengleichungen sind

$$t_f(x) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{und} \quad t_g(x) = g'(x_0)(x - x_0),$$

denn die Ableitungen geben ja gerade die Steigungen der Funktionen in  $x_0$  an und nach unserer Voraussetzung haben beide Funktionen bei  $x_0$  eine Nullstelle. Für das Verhältnis der Tangenten folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{t_f(x)}{t_g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Damit haben wir eine praktische Regel zum Berechnen von Grenzwerten von Funktionen gesehen, welche Regel von L'Hospital (auch Regel von L'Hôpital geschrieben) heißt.

### Beispiel

Wir starten mit einem – immerhin lehrreichen – Standardbeispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

### Beispiel

Sei  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom. Wir behaupten, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)e^{-x} = 0.$$

Es genügt zu zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Der Nachweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für  $n = 0$  ist die Behauptung offensichtlich wahr, wir müssen nur das Schulwissen über das Grenzverhalten der Exponentialfunktion verwenden. Sei die Gleichung für beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gezeigt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+1} e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} \\ &= (n+1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

## Ausblick

Die Kenntnisse über das Differenzieren haben uns seit der Zeit von Newton und Leibniz weit gebracht. Es ist keine Übertreibung zu sagen, dass unsere moderne Welt ohne diese Leistung (zusammen mit den Kenntnissen über das sogenannte – und in Kürze behandelte – Integrieren) so nicht existieren würde. Darin scheint ein Geheimnis zu liegen, das der große Teil der Menschheit nicht entdeckt hat. Die Mathematik ist ein wesentlicher Motor des nicht nur technischen Fortschritts. Jedoch werden Mathematiker noch immer ob ihres vermeintlich unnützen Fachs belächelt, während die Lächelnden mit einem Mobiltelefon ein Gespräch aus der 42sten Etage eines Hochhauses führen. Und weder diese Etage noch das Telefon würde es wohl ohne Mathematik, insbesondere auch die Differenzial- und Integralrechnung, geben. Nur ist das leider nicht allgemein bekannt.

Der tiefe Nutzen des Differenzierens bei der Modellierung von Natur und Technik wird uns spätestens dann klar, wenn wir später insbesondere für das Modellieren Gleichungen verwenden werden, die Funktionen und ihre Ableitungen enthalten – sogenannte Differenzialgleichungen.

Wir müssen uns auch unbedingt merken, dass für differenzierbare Funktionen wunderbare Sätze gelten, die sonst nicht richtig sind. Ferner gelten für solche

auch alle Aussagen über stetige Funktionen (natürlich nicht umgekehrt), wir haben also das Tor zu einer Art Wunderland aufgestoßen.

## Selbsttest

I. Welche der folgenden Funktionen sind differenzierbar?

(1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$

(2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$

(3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$

(4)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

(5)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(6)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

II. Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1)  $f$  ist stetig.

(2)  $f$  nimmt Maximum und Minimum an.

(3)  $f$  nimmt alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

(4) Es gibt ein  $u \in [a, b]$  mit  $f'(u) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

(5) Wenn  $m \geq 0$  so ist, dass  $|f'(x)| \leq m$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann gilt  $|f(b) - f(a)| \leq m(b - a)$ .

(6) Wenn  $f$  monoton steigend ist, gilt  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .

(7) Wenn  $f$  streng monoton steigend ist, gilt  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .

(8) Wenn  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt, dann ist  $f$  monoton fallend.

(9) Wenn  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt, dann ist  $f$  konstant.



# 19 Das Taylor-Polynom und lokale Extrema

## Einblick

In der Mathematik selbst, aber auch in ihren Anwendungen gibt es häufig komplizierte Funktionen, mit denen das Arbeiten keine wahre Freude ist. Oft ist dann auch die numerische Behandlung schwierig. Besser wäre es daher, wenn sich zu derartigen Funktionen solche finden ließen, die einfach(er) sind, die Ursprungsfunktion jedoch sehr gut angenähert darstellen (approximieren). Dies ist häufig durch das sogenannte Taylor-Polynom möglich. Dieses stellt dann, sofern gewisse Voraussetzungen erfüllt sind, die Funktion als Polynom dar. Es bleibt allerdings ein Fehler, also eine Unterschied zwischen dem Taylor-Polynom und der Funktion, der nur in (eher uninteressanten) Spezialfällen verschwindet. Über den erwähnten Fehler lässt sich allerdings etwas sagen, denn seine Größe kann abgeschätzt werden.

Wir können allerdings nicht zu viel von einer Approximation durch einfache Polynome erwarten. Wie wir nämlich bereits bei der Ableitung gesehen haben, ist diese für eine Funktion die lineare Approximation – welche allerdings nur in einer Umgebung des betrachteten Punktes gut ist. Das Taylor-Polynom leistet mehr, allerdings ist die Güte der Annäherung auch hier dann besonders gut, wenn wir in der Nähe eines betrachteten Punktes bleiben, den wir als sogenannten Entwicklungspunkt kennenlernen werden.

Im Taylor-Polynom treten höhere Ableitungen auf. Solche sind z. B. in der Physik prominent, gibt es doch die Geschwindigkeit als erste und die Beschleunigung als zweite Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit. Auch eine dritte Ableitung hat hierbei eine physikalische Bedeutung, sie wird als Ruck bezeichnet und beschreibt die Änderung der Beschleunigung. Der Name scheint also klug gewählt.

Höhere Ableitungen treten weiterhin bei der Untersuchung auf Maxima und Minima einer Funktion auf. Tatsächlich spielt bei der theoretischen Analyse wieder die Approximation durch Taylor-Polynome eine Rolle, weshalb die Behandlung in einem Kapitel erfolgt.

## Höhere Ableitungen

### ► Definition

Ist eine Funktion  $f$  differenzierbar und ist deren Ableitung  $f'$  wiederum differenzierbar, so ergibt sich durch erneutes Differenzieren die sogenannte zweite Ableitung:

$$f'' = (f')' = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Ist auch die zweite Ableitung wieder differenzierbar, so können wir – falls die Funktion insgesamt  $k$ -mal differenzierbar ist – induktiv fortfahren und erhalten die  $k$ -te Ableitung

$$f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

Die nullte Ableitung wird als die Funktion selbst definiert:

$$f^{(0)} = f \quad \blacktriangleleft$$

### Beispiel

Wir kommen hier erneut auf die im Einblick erwähnte physikalische Bedeutung zu sprechen: Haben wir eine zweimal differenzierbare Funktion  $x(t)$ , die zu jeder Zeit  $t$  die Position eines Partikels (Idealisierung von z. B. Stein, Rakete, Fußball) angibt, so heißt die erste Ableitung die (momentane) Geschwindigkeit des Partikels:

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

Die zweite Ableitung heißt Beschleunigung:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Also beschreibt  $v(t)$  die Änderung des Ortes und  $a(t)$  die Änderung der Geschwindigkeit. Die standardmäßig verwendeten Zeichen  $v$  und  $a$  sind auf die entsprechenden Begriffe im Englischen zurückzuführen: „velocity“ und „acceleration“. Die Zeitvariable  $t$  kommt von „time“.

### Beispiel

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - x_0)^k$

beliebig oft differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x - x_0)^k \\
 f'(x) &= k(x - x_0)^{k-1} \\
 f''(x) &= k(k-1)(x - x_0)^{k-2} \\
 &\vdots \\
 f^{(k-1)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) \\
 f^{(k)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1 = k! \\
 f^{(k+1)}(x) &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

An der Stelle  $x = x_0$  gilt, dass alle Ableitungen bis auf  $f^{(k)}(x_0)$  verschwinden, d. h.

$$f^{(i)}(x_0) = \delta_{ik} k!$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

### Beispiel

Es ist keinesfalls so, dass differenzierbare Funktionen immer beliebig oft differenzierbar sind, wie das Beispiel  $f(x) = |x|x$  zeigt. Die Ableitung ist nämlich  $f'(x) = 2|x|$  und damit nicht weiter differenzierbar, denn wir wissen bereits um die Problematik bei der Ableitung der Betragsfunktion im Nullpunkt.

### Beispiel

Die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht einmal stetig. Wir haben nämlich im Fall  $x \neq 0$  für die Ableitung

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),
 \end{aligned}$$

was einfach mit den uns bekannten Regeln für die Ableitung berechenbar war. Wir sehen, dass aufgrund des „pathologischen“ Terms

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

der Grenzwert der Ableitungsfunktion  $f'$  für  $x \rightarrow 0$  nicht existiert, obwohl  $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $x \rightarrow 0$  gegen null konvergiert (bitte prüfen Sie dies). Für die Stelle  $x = 0$  berechnen wir direkt den Differenzialquotienten:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus dem relativ leicht zu beweisenden Satz, dass eine beschränkte Folge multipliziert mit einer Nullfolge eine Nullfolge ergibt. Es folgt damit insgesamt, dass die Ableitung im Nullpunkt nicht stetig ist.

## Das Taylor-Polynom

### ■ Satz

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion. Dann heißt das Polynom  $T_{n,x_0}(f): I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T_{n,x_0}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylor-Polynom  $n$ -ter Ordnung von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$ . Das sogenannte Restglied  $R_n$  gibt dabei den Fehler an, der bei dieser Approximation gemacht wird:

$$R_n(x) = f(x) - T_{n,x_0}(f)(x)$$

und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ist  $f$  außerdem  $n + 1$ -mal differenzierbar mit stetiger  $n + 1$ -ter Ableitung, so gibt es für jedes  $x \in I$  ein  $\xi \in I$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

(Dies ist die Lagrange'sche Darstellung des Restglieds.)

**Beweis:** Der Beweis soll hier nicht vollständig geführt werden, jedoch wollen wir plausibel machen, was die Idee ist. Wir betrachten dazu ein beliebiges Polynom der Form

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

mit  $a_0, \dots, a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ . Zuvor hatten wir bereits (im Abschnitt über höhere Ableitungen) die Ableitungen von  $(x - x_0)^k$  berechnet, und damit können wir leicht die  $i$ -te Ableitung von  $p$  an der Stelle  $x_0$  angeben ( $i \leq n$ ):

$$\begin{aligned} p^{(i)}(x_0) &= \frac{d^i}{dx^i} \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^i}{dx^i} (x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \delta_{ik} k! \\ &= a_i i! \end{aligned}$$

Damit erhalten wir (nach einer Umbenennung des Index)

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$$

und durch Einsetzen in unsere Ausgangsgleichung  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  schließlich

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Dies zeigt, dass sich das Polynom selbst in einer Form ausdrücken lässt, bei der die Auswertung der Ableitungen des Polynoms an einer bestimmten Stelle  $x_0$ , also  $p^{(k)}(x_0)$ , eine wichtige Rolle spielt. Der Satz verwendet die gerade angestellte Überlegung für beliebige,  $n$ -mal differenzierbare Funktionen. ■

### Erläuterung

Wir sehen durch den vorherigen Satz, dass die Taylor-Approximation wahrlich nicht wertlos ist, denn der Fehler ist klar durch das Restglied gegeben, und mit diesem lässt sich arbeiten.

Wenn wir das Taylor-Polynom der ersten Ordnung betrachten, so erhalten wir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{(1)!} (x - x_0)^1 + \text{Fehler}$$

Vereinfacht ergibt dies

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \text{Fehler}$$

oder

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0) + \text{Fehler}.$$

Ähnliches haben wir bereits beim Thema Ableitungen gesehen und erkennen hier erneut, dass eine differenzierbare Funktion durch ihre erste Ableitung – bis auf einen Fehler – dargestellt werden kann. Und dies steckt nun auch im Taylor-Polynom, das allerdings allgemein noch höhere Ableitungen zur Approximation der Funktion zur Verfügung hat.

Betrachten wir nun das Taylor-Polynom nullter Ordnung zusammen mit dem zugehörigen Restglied explizit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(\xi)}{(1)!} (x - x_0)^1$$

Vereinfacht ergibt dies:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Durch das Umstellen nach  $f'(\xi)$  erkennen wir sogleich den Mittelwertsatz.

Insgesamt haben wir die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x).$$

Es gilt in jedem Fall  $R_n(x_0) = 0$ . Hätten wir keine Kenntnis darüber, wie groß die Abweichung  $|R_n(x)|$  in der Nähe von  $x_0$  überhaupt werden kann, wäre die Taylor-Approximation wertlos.

### Beispiel

Wir berechnen das Taylor-Polynom von  $f(x) = \sin x$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ :

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0$$

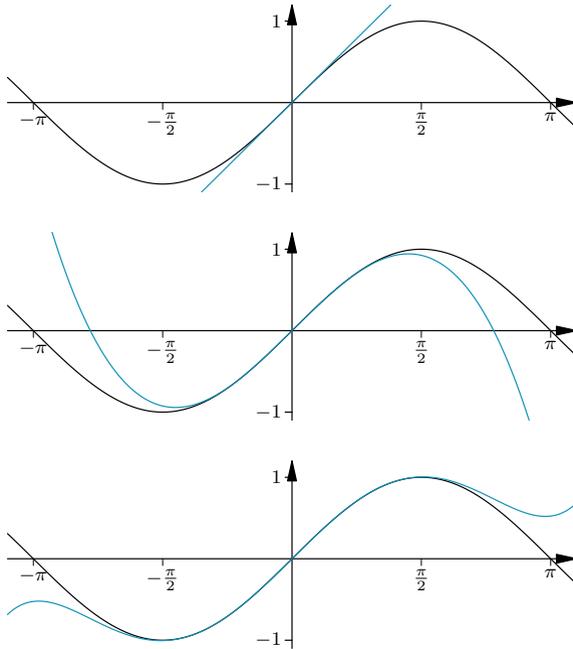
$$f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$

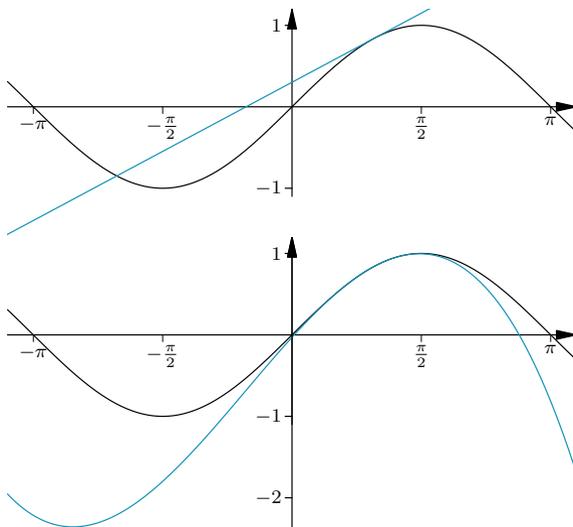
Bei weiteren Ableitungen wiederholt sich Obiges immer wieder, wir haben daher genaue Kenntnis über das Taylor-Polynom der  $n$ -ten Ordnung:

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \text{Fehler}$$

Betrachten wir nun dazu die folgenden Graphen zu den Berechnungen unseres Beispiels, und zwar (von oben nach unten) die Taylor-Polynome der ersten, dritten und fünften Ordnung mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , jeweils für die Sinus-Funktion:



Zur Veranschaulichung der Bedeutung des Entwicklungspunktes nochmals Grafiken für die Taylor-Polynome der ersten und dritten Ordnung für dieselbe Funktion, jedoch mit anderem Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ :



### Erläuterung

Wir haben beim letzten Beispiel den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  verwendet. Welche Bedeutung hat aber der Entwicklungspunkt genau? Es ist der Punkt, für den die Approximation gut funktioniert, denn das Restglied wird gerade in der Nähe von  $x_0$  verschwindend klein; entfernt davon ist dies allgemein nicht zu erwarten. Dies lässt sich gut an den Grafiken im Beispiel erkennen.

### Beispiel

Hier wollen wir das Taylor-Polynom verwenden, um Quadratwurzeln zu berechnen. Gleichfalls interessieren uns dabei entstehende Fehler.

Wir wählen also  $f(x) := \sqrt{x}$  mit der Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  und erhalten als Taylor-Polynom erster Ordnung (das soll hier genügen)

$$T_{1,x_0}(f)(x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) .$$

Um dies für unsere Rechnung zu nutzen, empfiehlt es sich natürlich, als Entwicklungspunkt  $x_0$  eine Zahl nahe  $x$  zu wählen, deren Wurzel wir kennen. Damit erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \sqrt{4,2} &\approx T_{1,4}(f)(4,2) = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4,2 - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 = 2,05 , \\ \sqrt{42} &\approx T_{1,36}(f)(42) = \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}(42 - 36) = 6 + \frac{1}{12} \cdot 6 = 6,5 . \end{aligned}$$

Zur Abschätzung des gemachten Fehlers benötigen wir die zweite Ableitung der betrachteten Funktion, also  $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ . Der Restterm lässt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 = -\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x - x_0)^2$$

Bei der Fehlerabschätzung ist interessant, wie weit wir schlimmstenfalls vom tatsächlichen Wert abweichen, egal ob nach oben oder nach unten. Wir suchen also eine obere Schranke für den Betrag des Restterms. Wegen des negativen Exponenten beim  $\xi$  wird unser berechnetes  $R_1(x)$  betraglich für kleines  $\xi$  besonders groß. In den beiden Beispielen ist dies

$$\begin{aligned} |R_1(4,2)| &= \frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(0,2)^2 \leq \frac{1}{8} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{200} = 0,005 , \\ |R_1(42)| &= \frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}6^2 \leq \frac{1}{8} \cdot 36^{-\frac{3}{2}} \cdot 6^2 = \frac{1}{48} < \frac{1}{40} = 0,025 . \end{aligned}$$

Da der Restterm negativ ist, wissen wir zudem, dass der tatsächliche Wert niedriger ist als unser berechneter. Wir können somit folgende Intervalle angeben, in denen die Wurzel liegt:

$$\begin{aligned} \sqrt{4,2} &\in [2,05 - 0,005, 2,05] = [2,045, 2,05] \\ \sqrt{42} &\in [6,5 - 0,025, 6,5] = [6,475, 6,5] \end{aligned}$$

## Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

### ► Definition

Sei  $D$  eine Teilmenge der reellen Zahlen;  $x \in D$  heißt innerer Punkt von  $D$ , wenn es eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$  gibt, die ganz in  $D$  enthalten ist. ◀

### Erläuterung

Diese Definition ist von großer Bedeutung für Untersuchungen in Bezug auf Extrema, was wie folgt verständlich wird: Wir haben bislang die Tatsache ignoriert, dass beim rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert von Funktionen unter Umständen gar keine Folge existiert, die gegen die fragliche Stelle im Definitionsbereich der Funktion konvergiert. Für innere Punkte ist die Existenz solcher Folgen jedoch garantiert, denn um  $x$  gibt es ja dann noch immer die  $\epsilon$ -Umgebung.

### Beispiel

Die Zahl  $x = \frac{1}{2}$  ist ein innerer Punkt von  $D = [0, 1]$ . Die Intervallgrenzen  $a = 0$  und  $b = 1$  sind keine inneren Punkte, da keine  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  bzw.  $b$  leeren Schnitt mit dem Komplement von  $D$  in  $\mathbb{R}$  haben kann. Die Menge  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$  hat gar keine inneren Punkte und ein offenes Intervall besteht ausschließlich aus inneren Punkten.

### ■ Satz

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion und  $x_0$  ein innerer Punkt von  $D$  mit

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gibt es folgende Fälle:

1. Ist  $n$  gerade, so gilt:
  - a)  $f$  nimmt an der Stelle  $x_0$  ein lokales Maximum an, falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .
  - b)  $f$  nimmt an der Stelle  $x_0$  ein lokales Minimum an, falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .
2. Ist  $n$  ungerade, so nimmt  $f$  an der Stelle  $x_0$  weder ein Minimum noch ein Maximum an.

**Beweis:** Sei  $f^{(n)}(x_0) < 0$  (für  $f^{(n)}(x_0) > 0$  geht der Beweis analog). Aus dem Konvergenzverhalten des Restglieds bei der Taylor-Approximation folgt nach den Voraussetzungen des Satzes (nur  $f^{(n)}(x_0)$  ist ja demnach ungleich null):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} < 0$$

1. Ist  $n$  gerade, so wird in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $x_0$  das Vorzeichen von  $f(x) - f(x_0)$  durch jenes von  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$  bestimmt, da stets  $(x - x_0)^n > 0$ ; d. h., es gilt  $f(x) - f(x_0) \leq 0$ , womit ein lokales Maximum vorliegt.
2. Ist  $n$  ungerade, muss  $f(x) - f(x_0)$  bei  $x_0$  ebenso wie  $(x - x_0)^n$  das Vorzeichen wechseln – andernfalls wäre  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$ . ■

### Erläuterung

In der Zusammenfassung der beiden letzten Sätze ergibt sich die folgende Strategie zum Berechnen von (lokalen) Extrema einer differenzierbaren Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

1. Berechnung der ersten Ableitung von  $f$  an den inneren Punkten des Definitionsbereichs  $D$ .
2. Dort, wo die erste Ableitung verschwindet, wird die erste nichtverschwindende Ableitung bestimmt und nach dem letzten Satz klassifiziert.
3. Stellen, die keine inneren Punkte sind oder an denen alle Ableitungen verschwinden, müssen gesondert betrachtet werden.

### Beispiel

Sei

$$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Für die Ableitung gilt  $f'(x) = 2x - 2$ , für die zweite  $f''(x) = 2$ . Die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion ist  $x = 1$ , dort gilt  $f''(1) = 2 > 0$ . Also liegt dort ein lokales Minimum vor, mit  $f(1) = 4$ .

An den Punkten  $x = \pm 2$  gilt  $f(-2) = 13$  und  $f(2) = 5$ . Da die Funktion auf dem Intervall  $[-2, 1[$  streng monoton fällt ( $f'(x) < 0$ ) und auf dem Intervall  $]1, 2]$  streng monoton steigt ( $f'(x) > 0$ ), muss die Funktion an den Stellen  $x = \pm 2$  ein lokales Maximum annehmen. Ein Vergleich der Funktionswerte liefert, dass die Funktion  $f$  bei  $x = 1$  das globale Minimum  $y = 4$  und bei  $x = -2$  das globale Maximum  $y = 13$  annimmt.

## Ausblick

Wir haben gesehen, dass die Taylor-Approximation ein mächtiges Werkzeug ist, da wir mit diesem komplizierte Funktionen einfacher darstellen können. Aber auch für theoretische Untersuchungen ist sie nützlich, wie bei den Extrema zu sehen war. Die Rolle als Beweismittel kommt ihr häufiger zu und z. B. in der theoretischen Physik wird bei vielen Gelegenheiten für eine gegebene Funktion

das Taylor-Polynom berechnet, um damit (anstatt der betrachteten Funktion direkt) weiter arbeiten zu können.

Das Taylor-Polynom führt ferner zur Taylor-Entwicklung, welche die Funktion als Potenzreihe darstellt. Dazu werden wir später mehr sehen, was auch die Möglichkeit für weitere Beispiele liefert.

Für das Restglied gibt es diverse weitere Darstellungen, die für uns wichtigste hatten wir jedoch aufgeführt.

Eine Frage liegt auf der Hand: Gibt es eventuell noch andere (gar in bestimmten Fällen bessere) Möglichkeiten, um Funktionen angenähert durch einen anderen Ausdruck darzustellen? Ja. Denken wir z. B. an periodische Funktionen (also solche Funktionen  $f$  mit  $f(x) = f(x + \text{Periode})$ ), so bietet sich eine Darstellung an, die gleichfalls periodische Funktionen enthält. Zugegeben, für die Sinusfunktion hat alles gut geklappt; es gibt jedoch andere Fälle, in denen die zuletzt genannte Idee zum Tragen kommt, und zwar in Form eines sogenannten trigonometrischen Polynoms, welches dann letztendlich zur sogenannten Fourier-Reihe führt. Ist dann  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion, so betrachten wir

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Die rechte Seite ist die  $f$  zugeordnete (nicht unbedingt gleich  $f(x)$ , daher das „ $\sim$ “) Fourier-Entwicklung mit den Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Bedeutsam ist, dass wir aus der Fourier-Reihe auch ein sogenanntes trigonometrisches Polynom erhalten, wenn wir die obere Grenze endlich ansetzen. Dann können wir unter bestimmten Voraussetzungen sogar Funktionen durch solche trigonometrischen Polynome geeignet approximieren, die nicht auf dem gesamten betrachteten Intervall stetig sind. Über diese Dinge muss aber noch genauer gesprochen werden, was in einem der folgenden Bände geschieht.

## Selbsttest

**I.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Wenn  $f'(x_0) = 0$  gilt, nimmt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum an.
- (2) Wenn  $f$  in  $x_0$  ein Extremum annimmt, gilt  $f'(x_0) = 0$ .
- (3) Wenn  $f''(x_0) > 0$  gilt, nimmt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum an.
- (4) Wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$  gilt, nimmt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum an.
- (5) Wenn  $f$  in  $x_0$  ein Minimum annimmt, gilt  $f''(x_0) > 0$ .
- (6) Wenn  $f$  in  $x_0$  kein Extremum annimmt, gilt  $f''(x_0) = 0$ .

**II.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Formeln für das Taylor-Polynom  $T$  von  $f$  der Ordnung  $n$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  sind korrekt?

- (1) 
$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$
- (2) 
$$T(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$
- (3) 
$$T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x - x_0)^k$$
- (4) 
$$T(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$
- (5) 
$$T(x) = \sum_{l=0}^{n+1} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!} (x - x_0)^l$$

**III.** Welche der folgenden Funktionen besitzen ein globales Maximum?

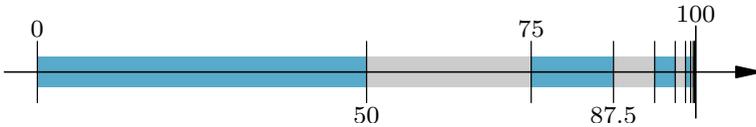
- (1)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$
- (2)  $f: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$
- (3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- (4)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$
- (5)  $f: [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{1}{x}$



# 20 Unendliche Reihen

## Einblick

Wie kann es sein, dass ein Läufer je die Ziellinie übertritt, wenn er doch stets immer wieder die Hälfte des vor ihm liegenden Weges zurücklegen muss? Wenn z. B. ein Hundertmeterläufer startet, so muss er zunächst die 50 m-Marke erreichen, daraufhin die 75 m-Marke, dann die 87,5 m-Marke – aber die Ziellinie bei 100 m wird er (in endlich vielen derartigen Schritten) nie erreichen. Die Idee zur mathematischen Lösung des Problems liegt in einer geeigneten Methode, um die unendlich vielen Wegstrecken aufzusummieren, sodass der Läufer „im Grenzwert“ sein Ziel erreicht.



Wir müssen also den Schritt von der Summe mit endlich vielen Summanden zur sogenannten unendlichen Reihe machen. Ferner werden wir Kriterien dafür finden, dass eine solche Reihe überhaupt einen endlichen Grenzwert hat.

## Definition und Beispiele von Reihen

### ► Definition

Sei  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine (reelle oder komplexe) Folge. Dann wird der formale Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots$$

eine (unendliche) Reihe genannt. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  heißt die Zahl  $c_n$  das  $n$ -te Reihenglied, und  $S_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$  heißt  $n$ -te Partialsumme der Reihe.

Falls die Folge der Partialsummen  $(S_n) = (c_0, c_0 + c_1, c_0 + c_1 + c_2, \dots)$  konvergiert, wird die Reihe konvergent genannt und ihr Grenzwert ist gegeben durch:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k$$

**Erläuterung**

Wir bezeichnen also sowohl die Reihe (unabhängig von der Konvergenzfrage) als auch ggf. ihren Grenzwert mit  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ , was nicht zu Verwirrungen führen sollte.

Jede Reihe der Form  $\sum_{k=m}^{\infty} c_k$  mit  $m > 0$  kann auch als  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  geschrieben werden, wenn wir einfach  $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$  setzen.

**■ Satz**

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergente Reihen und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann konvergieren auch  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k)$  und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad (20.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (20.2)$$

**Beweis:** Dies ergibt sich sofort aus den Rechenregeln für konvergente Folgen. ■

**Beispiel**

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

heißt harmonische Reihe; sie ist nicht konvergent. Dies wird klar, indem wir die Partialsummen der Form  $S_{2^{k+1}}$  betrachten:

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{1}{i}\right) \\ & > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k\text{-mal}} \\ & = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen ist folglich nicht beschränkt und kann damit nicht konvergent sein. Zu überlegen ist hier nur noch, warum die einzelnen Terme in den Klammern wirklich jeweils größer als  $\frac{1}{2}$  sind, was durch vollständige Induktion zu zeigen ist. Wir erkennen die Idee dazu bereits gut an den Summanden in der dritten Klammer der ersten Zeile, wo jeder der vier Summanden größer oder gleich  $\frac{1}{8}$  ist.

## Erläuterung

Die harmonische Reihe ist das Beispiel schlechthin für eine Reihe, bei der gewöhnlich von Konvergenz ausgegangen wird (leider auch in Prüfungen, egal wie viele Gegenargumente Dozenten auch immer vorbrachten). Es gibt diverse Möglichkeiten, um ihre Divergenz zu zeigen, sie sahen zuvor eine davon; eine weitere wird folgen.

### ■ Satz

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für alle  $s \in \mathbb{R}$  mit  $s > 1$ .

**Beweis:** Dies wird mit dem später diskutierten Integralvergleichskriterium bewiesen. ■

## Erläuterung

Die Funktion  $\zeta$  mit  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  wird für alle  $s \in \mathbb{C}$ , mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , Riemann'sche Zetafunktion genannt. Sie ist in der sogenannten analytischen Zahlentheorie von größtem Interesse. Ihre Bedeutung liegt darin, dass ihre Nullstellen im Komplexen u. a. Auskunft über die Verteilung von Primzahlen geben. Mit der Zetafunktion direkt verbunden ist die Riemann'sche Vermutung. Es handelt sich dabei um eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik.

## Die geometrische Reihe

### ■ Satz

Die Summe

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

heißt geometrische Summe. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $x \neq 1$ :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

**Beweis:** Wir beweisen die Behauptung per vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang  $n = 0$  ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x}$$

Sei die zu beweisende Formel nun für ein festes, aber beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  bereits gezeigt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Die geometrische Summe ist die Vorstufe zur geometrischen Reihe und wird selbst z. B. bei der Rentenberechnung verwendet. Der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe, also  $c_n = x^n$  und  $c_{n+1} = x^{n+1}$ , ist stets die gleiche Zahl  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = x$ . Sie finden auch leicht einen Zusammenhang zur eingangs in diesem Kapitel gegebenen Grafik und der damit verbundenen Aufsummation von Streckenabschnitten; hier wird dann der Grenzwert besonders interessant und wir wollen weiter unten nochmals den Fokus darauf richten.

### ■ Satz

Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

mit  $x \in \mathbb{C}$  konvergiert, wenn  $|x| < 1$  ist. In diesem Fall gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

**Beweis:** Für  $|x| < 1$  ist  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Zusammen mit obiger Gleichung für die geometrische Summe gilt deshalb:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Wir sehen sofort, dass die geometrische Reihe für  $|x| > 1$  divergiert, denn alleine  $\sum_{k=0}^{\infty} 1$  divergiert offensichtlich; wir werden dies sogleich als Minorante kennenlernen.

**Beispiel**

Es ist z. B.  $|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , sodass gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^n &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}} \\ &= \frac{2}{1 - i} \\ &= \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i \end{aligned}$$

**Beispiel**

Wir können nun zeigen, dass ein Hundertmeterläufer auch dann an sein Ziel kommt, wenn der Weg dorthin in immer wieder halbierte Stücke unterteilt wird:

$$\begin{aligned} 50 + 25 + 12,5 + \dots &= 50 + \frac{50}{2} + \frac{50}{4} + \frac{50}{8} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{50}{2^k} \\ &= 50 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 50 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &= 50 \cdot 2 = 100 \end{aligned}$$

**Beispiel**

Die Frage „Was ist eigentlich 0,9999999...?“ lässt sich mithilfe der geometrischen Reihe beantworten:

$$\begin{aligned} 0,9999999\dots &= 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\ &= 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k - 9 \\ &= 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) - 9 \\ &= 9 \cdot \frac{10}{9} - 9 = 1 \end{aligned}$$

### Erläuterung

Die Überlegungen in den letzten Beispielen sind tatsächlich wichtig und beantworteten Fragen, die teils kniffligen Gedankenexperimenten entspringen. Allerdings gehen die Anwendungen der geometrischen Reihe noch weiter, denn auf ihrer Basis können auch Kriterien für die Konvergenz unendlicher Reihen aufgestellt werden.

## Konvergenzkriterien für Reihen

### ■ Satz

Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ , dann ist  $(c_k)$  eine Nullfolge.

**Beweis:** Sei  $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$  die Folge der Partialsummen und  $C \in \mathbb{C}$  ihr Grenzwert. Dann ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C - C = 0$$

### Erläuterung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht; beispielsweise ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent. Wenn die  $c_k$  eine Nullfolge bilden, dann haben wir damit also nur ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz der Reihe.

### ► Definition

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  eine Reihe. Falls die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$  konvergiert, so heißt  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  absolut konvergent. ◀

### Erläuterung

Tatsächlich liefern uns die Kriterien für die Konvergenz, die sogleich behandelt werden, meist Bedingungen für die absolute Konvergenz. Sind sie nicht erfüllt, bleibt noch immer Ungewissheit bezüglich der nichtabsoluten Konvergenz.

### ■ Satz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

**Beweis:** Sei die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$  konvergent und sei  $(S_n)$  die Folge ihrer Partialsummen. Nach dem Cauchy-Kriterium – welches auch für komplexe Folgen gilt – gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n, p \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  gilt:

$$\epsilon > |S_{n+p} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k| = |c_{n+1}| + \dots + |c_{n+p}|$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt insbesondere

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| = |c_{n+1} + \dots + c_{n+p}| < |c_{n+1}| + \dots + |c_{n+p}| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Trotzdem gilt natürlich im Allgemeinen  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \neq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ ; der Satz macht keine Aussage über den Grenzwert.

### Beispiel

Die zuvor behandelte geometrische Reihe ist absolut konvergent für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < 1$ .

### Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!}$$

konvergiert absolut, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(2i)^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

konvergiert (was wir nach wenigen weiteren Zeilen dieses Buches zu prüfen in der Lage sind).

### ■ Satz

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  eine absolut konvergente Reihe. Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert ebenfalls absolut, falls für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $|a_k| \leq |b_k|$ .

**Beweis:** Sei  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $|a_k| \leq |b_k|$  für alle  $k \geq N$ . Zunächst stellen wir fest, dass die Folge der Partialsummen  $\sum_{k=N}^n |a_k|$  (mit  $n > N$ ) entweder konvergiert oder bestimmt divergiert, denn sie ist monoton steigend. Außerdem ist sie unter den Voraussetzungen des Satzes auch beschränkt:

$$|a_k| \leq |b_k| \Rightarrow \sum_{k=N}^n |a_k| \leq \sum_{k=N}^n |b_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| < \infty \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Dieser Satz wird Majorantenkriterium genannt, und zu obiger Bedingung wird auch gesagt:  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist eine Majorante von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Analog ist klar, was unter dem sogenannten Minorantenkriterium zum Nachweis der Divergenz einer Reihe zu verstehen ist: Wir benötigen nämlich nur eine divergente Reihe, deren Glieder vom Betrag her kleiner sind als diejenigen der untersuchten.

**Beispiel**

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n + \sin n)^2}$$

konvergiert nach dem Majorantenkriterium:

$$\frac{1}{(3n + \sin n)^2} \leq \frac{1}{(3n - 1)^2} \leq \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{n^2}$$

■ **Satz**

Sei eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  gegeben und  $N \in \mathbb{N}$ . Wenn es ein  $q \in ]0, 1[$  gibt, sodass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für alle  $n \geq N$ , dann ist die Reihe absolut konvergent.

**Beweis:** Wenn für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $|a_n| \leq q^n$  mit  $0 \leq q < 1$ , so ist die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  eine Majorante für  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . ■

**Erläuterung**

Dieses Konvergenzkriterium wird Wurzelkriterium genannt. Im Falle  $q = 0$  gilt für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , also gerade für diejenigen mit  $n \geq N$ :  $a_n = 0$ . Dies ist der triviale Fall, für den die Reihe eine endliche Summe ist.

■ **Satz**

Sei eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  gegeben und  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq N$ . Wenn es ein  $q \in ]0, 1[$  gibt, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle  $n \geq N$ , dann ist die Reihe absolut konvergent. ■

**Erläuterung**

Dieses Kriterium heißt Quotientenkriterium. Die beiden letzten Kriterien kommen oft zur Anwendung. Steht hinter dem Summenzeichen ein Term mit  $n$ -ter Potenz, so bietet sich vermeintlich stets das Wurzelkriterium an. Dies ist in vielen Fällen so, allerdings keine Garantie für seine Anwendbarkeit. Es bedarf einiger Übung – die durch keine Merkregel ersetzbar ist –, um das „richtige“ Kriterium zu wählen. Es gibt auch keine Garantie dafür, dass ein Kriterium (egal welches) die Frage „Konvergent oder nicht?“ für Reihen stets klar beantwortet.

**Beispiel**

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

konvergiert. Dies ergibt sich mithilfe des Quotientenkriteriums:

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

**Erläuterung**

Das Wurzel- bzw. Quotientenkriterium ist insbesondere erfüllt, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1;$$

vorausgesetzt natürlich, die Grenzwerte existieren. Beachten Sie, dass die Ungleichungen strikt sein müssen, um eine Aussage treffen zu können.

**Beispiel**

Die sogenannte Weierstraß-Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$$

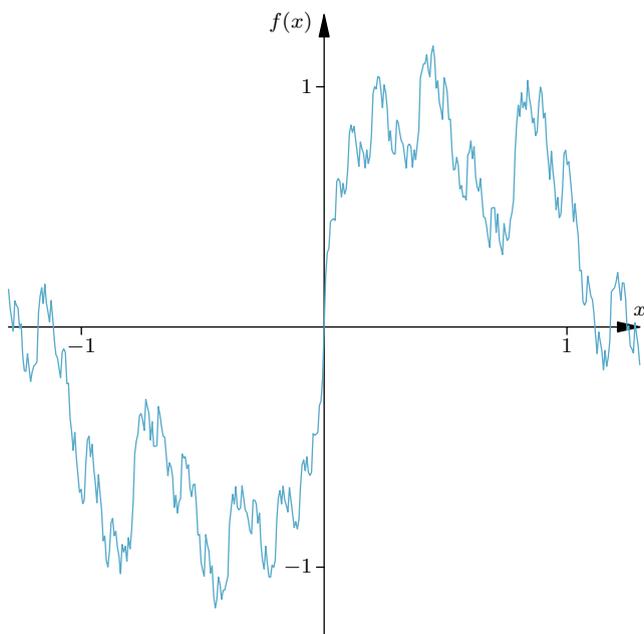
ist stetig, aber nirgends differenzierbar. Diese Eigenschaften sind nicht einfach zu zeigen; dass die Funktion jedoch wohldefiniert ist, folgt z. B. aus dem Wurzelkriterium, denn mit

$$a_n = \frac{2^n \sin(2^n x)}{3^n}$$

ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3} \sqrt[n]{|\sin(2^n x)|} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Nachstehend sehen Sie den Graphen der Funktion:



Die Weierstraß-Funktion

### ■ Satz

Sei  $(a_k)$  eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

■

**Beweis:** Betrachten wir zur Folge der Partialsummen  $(S_k)$  die Teilfolge  $(S_{2k})$ . Die Beträge der  $a_k$  bilden eine monoton fallende Folge, woraus für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt:

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq S_{2k}$$

Weiterhin gilt

$$S_{2k} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k} \geq a_{2k} \geq 0,$$

und insgesamt ist die Folge  $(S_{2k})$  monoton fallend und nach unten beschränkt, folglich konvergent. Analoge Betrachtung führt auf die Konvergenz der monoton wachsenden Folge  $(S_{2k+1})$  und es gilt sogar die Gleichheit der Grenzwerte:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - a_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} - \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$$

Insgesamt konvergiert also die aus den beiden Teilfolgen zusammengesetzte Folge der Partialsummen  $(S_k)$ . ■

### Erläuterung

Dies wird das Leibniz-Kriterium genannt. Wir sehen damit sofort, dass die sogenannte alternierende harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  konvergiert. Die Koeffizienten  $(-1)^n$  machen also den entscheidenden Unterschied zur harmonischen Reihe.

Es kann gezeigt werden, dass der Grenzwert von Reihen, die konvergieren, aber nicht absolut konvergieren, von der Reihenfolge der Reihenglieder abhängt. Solche Reihen werden auch bedingt konvergent genannt. Wir machen dies exemplarisch klar; wir wissen nach dem Leibniz-Kriterium, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert, sagen wir gegen den Wert  $a$ :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots = a$$

Wir ordnen nun Reihenglieder nach vorn, sodass immer zwei negative Reihenglieder aufeinanderfolgen, und fassen zusammen:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} \pm \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Tatsächlich besagt der sogenannte Riemann'sche Umordnungssatz sogar, dass bei gegebener bedingt konvergenter Reihe für jede reelle Zahl  $\sigma$  eine Umordnung gefunden werden kann, sodass die umgeordnete Reihe gegen  $\sigma$  konvergiert. Absolut konvergente Reihen konvergieren jedoch unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder gegen einen festen Wert.

## Ausblick

Bei tieferer Betrachtung haben wir zum Thema Reihen mathematisch wenig Neuland betreten, denn Überlegungen und Beweise basieren wesentlich auf dem, was wir bereits bei den Folgen behandelt hatten. Die Schnittstelle wird gerade durch die Partialsummen gegeben, welche eine Folge bilden. Dennoch erscheint vieles im neuen Gewand und wir erfahren eine Erweiterung des Rahmens, denn losgelöst vom beweistheoretischen Hintergrund sind Reihen für sich bedeutsam, was beispielsweise die Anwendungen gezeigt haben.

Die unendlichen Reihen führen uns auf direktem Wege auch zur Integration, die bald behandelt wird, denn sie beinhalten insbesondere das Aufsummieren unendlich vieler Glieder, die dann bei der Integration einfach Rechteckflächen sein werden.

Es drängt sich dir Frage auf, warum bisher nur beim Beispiel der geometrischen Reihe eine Variable  $x$  auftauchte? Sogleich werden wir uns mit Reihen befassen, die von einer Variablen abhängen, und merken, dass das hier Gelernte Grundlage für weiter gehende Untersuchungen ist.

Zum Ende möchten wir noch bemerken, wie schnell in der Mathematik das vermeintlich Einfache mit tiefen Problemen verbunden ist. So wagten wir einen Blick auf die Riemann'sche Vermutung, die wir dem Jahrtausendgenie Georg Friedrich Bernhard Riemann verdanken, der trotz eines viel zu kurzen Lebens von 39 Jahren die Welt (nicht nur die der Mathematik) mit seinem Wirken so unglaublich bereichert hat. Mit einer Lösung der Vermutung lässt sich viel mehr gewinnen als das ausgeschriebene Preisgeld von aktuell 1 Mio. Dollar des „Clay Mathematics Institute“.

## Selbsttest

I. Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} k$$

$$(6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$(7) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$(8) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k}$$

$$(4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-237}{2k^2}$$

$$(9) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

$$(5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

II. Sei  $(c_k)$  eine Folge reeller Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Wenn  $c_k$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .
- (2) Wenn  $c_k \rightarrow 0$  gilt, dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .
- (3) Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergiert, dann konvergiert auch  $(c_k)$ .
- (4) Wenn  $c_k < \frac{1}{k^3}$  gilt, dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .
- (5) Wenn  $|c_k| > \frac{1}{k^3}$  gilt, dann divergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .
- (6) Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergiert, konvergiert auch  $\sum_{k=2371}^{\infty} c_k$ .
- (7) Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 1$  gilt, dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .
- (8) Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k} < 1$  gilt, dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .
- (9) Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ .
- (10) Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k}$ .
- (11) Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .



# 21 Potenzreihen

## Einblick

In diesem Kapitel wollen wir erneut unendliche Reihen betrachten, allerdings werden hier Variablen wichtig sein, wie wir sie erstmals in diesem Zusammenhang bei der geometrischen Reihe sahen. An die Stelle von Reihen der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  tritt dann  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ . Im Allgemeinen sind  $a_n$ ,  $z$  und  $z_0$  komplexe Zahlen; von Interesse sind jedoch auch rein reelle Potenzreihen mit  $a_n, z, z_0 \in \mathbb{R}$ . Im reellen wie im komplexen Fall kann  $z_0$  auch null sein, sodass sich  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  ergibt.

Wichtig ist hier erneut die Frage nach der Konvergenz: Zur Untersuchung sind Kriterien des letzten Kapitels anwendbar, allerdings erwarten uns bestimmte Abhängigkeiten von  $z$  und  $z_0$ .

Die hier behandelten Potenzreihen (die  $n$ -te Potenz bei  $(z - z_0)^n$  führt auf den Namen) werden sich als wichtiges Mittel zur Darstellung bedeutender Funktionen präsentieren und wir werden den Schritt vom Taylor-Polynom zur sogenannten Taylor-Reihe vollziehen.

## Grundlegendes zu Potenzreihen

### ► Definition

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

heißt Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  (in der Variablen  $z \in \mathbb{C}$ ). Die Zahlen  $a_n \in \mathbb{C}$  werden die Koeffizienten der Potenzreihe genannt. ◀

### Erläuterung

Potenzreihen sind in gewissem Sinne „Polynome von unendlichem Grad“.

Für Beweis und Praxis genügt es oft, Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

zu betrachten, also Potenzreihen mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ .

Eine Potenzreihe definiert uns eine Funktion in  $z$ , die zumindest überall dort definiert ist, wo die Potenzreihe konvergiert (später mehr zur Konvergenz), was im Entwicklungspunkt immer der Fall ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0 - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 0^0 = a_0$$

Wir verwendeten hier, dass  $0^0 = 1$  ist.

### Beispiel

Die Exponentialfunktion kann über die Darstellung als Potenzreihe definiert werden:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium z. B. für alle  $x \in \mathbb{R}$ , denn mit  $c_n = \frac{x^n}{n!}$  ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! |x|^{n+1}}{(n+1)! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Hier ist der Entwicklungspunkt offensichtlich  $x_0 = 0$  und die Koeffizienten sind durch  $a_n = \frac{1}{n!}$  gegeben.

### Erläuterung

Es ist nicht zwingend, die Exponentialfunktion auf diese Weise zu definieren. Es geht auch darum, dass wir gerade die Funktion suchen, welche sich beim Ableiten selbst reproduziert, also die Gleichung

$$y - y' = 0$$

erfüllt, bei der es sich um eine sogenannte Differenzialgleichung handelt (was jedoch wesentlich Inhalt des zweiten Bandes ist). Durch Vorgabe eines sogenannten Anfangswerts, hier  $y(0) = 1$ , bekommen wir nach der dort behandelten Theorie eine eindeutige Lösungsfunktion des Anfangswertproblems, nämlich gerade

$$y(x) = \exp(x) = e^x.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit  $f(x) = e^x$  ist für positive reelle Zahlen der sogenannte natürliche Logarithmus  $f^{-1}(x) = \ln x$ , es gilt also  $e^{\ln x} = x$  und  $\ln e^x = x$ . Die allgemeine Potenz  $a^x$  mit  $a > 0$  wird über die Exponentialfunktion definiert:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Die Umkehrfunktion von  $a^x$  ist der aus der Schule bekannte Logarithmus zur Basis  $a$  und wird mit  $\log_a x$  notiert.

## Der Konvergenzradius einer Potenzreihe

### ■ Satz

Für jede Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  existiert ein  $R \in [0, \infty[\cup\{+\infty\}$ , sodass die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < R$  absolut konvergiert und für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > R$  divergiert.

**Beweis:** Es genügt, den Fall  $z_0 = 0$  zu betrachten. Zunächst zeigen wir: Wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$  konvergiert, dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$  absolut, falls  $|u| < |v|$ . Da  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$  konvergiert, ist die Folge  $(a_n v^n)$  der Summanden eine Nullfolge. Dies impliziert, dass  $|a_n v^n| < 1$  ab einem  $N \in \mathbb{N}$  gilt. Damit ergibt sich mit  $q = \frac{|u|}{|v|} < 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n u^n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n v^n| \left( \frac{|u|}{|v|} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n v^n| q^n \end{aligned}$$

Die letzte Reihe konvergiert genau dann, wenn die Reihe  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n v^n| q^n$  (mit  $N \in \mathbb{N}$  und  $N \geq 0$ ) konvergiert – auf endlich viele Summanden kommt es ja in Bezug auf die Konvergenz gerade nicht an. Es gilt ferner

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n v^n| q^n < \sum_{n=N}^{\infty} q^n < \infty.$$

Zurück zur ursprünglichen Behauptung: Die Reihe konvergiert wenigstens für  $z = 0$ , also auf einer nichtleeren Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Sei

$$R = \sup_{z \in D} |z|.$$

Nach Obigem konvergiert die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < R$  absolut. Nach Konstruktion von  $R$  divergiert die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > R$ . ■

### Erläuterung

Das Supremum einer auf  $D \subseteq \mathbb{C}$  definierten Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (in diesem Fall  $f: z \mapsto |z|$ ) ist analog zum reellen Fall definiert, d. h., es existiert eine Folge  $(z_n)$  mit Werten in  $D$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \sup_{z \in D} f(z)$ , sodass  $f(\xi) \leq \sup_{z \in D} f(z)$  für alle  $\xi \in D$  erfüllt ist.

Der obige Satz besagt, dass der maximale Bereich absoluter Konvergenz einer Potenzreihe durch eine Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt mit Radius  $R$  in der komplexen Zahlenebene gegeben ist. Wir nennen  $R$  den Konvergenzradius der Potenzreihe. Beschränken wir uns auf reelle Potenzreihen, so ist der Konvergenzbereich das Intervall  $] - R, R[$ .

### ■ Satz

Für den Konvergenzradius  $R$  einer Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  gilt

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

und ferner

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

falls diese Grenzwerte existieren oder bestimmte Divergenz vorliegt.

**Beweis:** Hier betrachten wir den allgemeinen Fall mit beliebigem  $z_0$  und erkennen, dass sich die Beweisführung nicht wesentlich schwieriger gestaltet als für  $z_0 = 0$ . Es ist nicht schwer zu sehen, dass die erste Gleichung mit dem Wurzelkriterium, die zweite mit dem Quotientenkriterium assoziiert ist. Wir zeigen, die Idee ist ja nun in beiden Fällen klar, die zweite Gleichung. Dafür setzen wir  $b_k = a_k(z - z_0)^k$ , womit gilt:

$$\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |z - z_0|$$

Folglich sind die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums für alle  $z$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |z - z_0| < 1,$$

also

$$|z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R$$

erfüllt. Ist hingegen  $|z - z_0| > R$ , so ist  $\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| > 1$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit können die  $b_k$  nicht einmal mehr eine Nullfolge bilden und die Reihe muss divergieren. ■

### Erläuterung

Als Ergänzung zu obigem Satz bemerken wir, dass stets

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

gilt, wie sich zeigen lässt, indem wir eine leichte Abwandlung des zuvor verwendeten Wurzelkriteriums verwenden, für welches gerade der Limes superior anstatt des gewöhnlichen Limes verwendet wird. Wir bekommen dadurch eine „stärkere“ Version. Dies liegt daran, dass wir beim zuvor behandelten Wurzelkriterium die Existenz eines Grenzwerts von  $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$  vorausgesetzt hatten. Setzen wir hier allerdings nur die Beschränktheit voraus, so ist natürlich gerade

der Limes superior das Mittel der Wahl. Weiterhin sei erwähnt, dass die zuletzt betrachtete Version des Wurzelkriteriums dem Quotientenkriterium überlegen ist, denn es kann gezeigt werden, dass für jede Folge positiver reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Die letzte Gleichung für den Konvergenzradius ist nun so zu verstehen, dass  $R = 0$  gilt, falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , und  $R = \infty$ , falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ . Für beide Gleichungen für  $R$  im letzten Satz ist natürlich auch ein endliches  $R$  möglich, wenn der jeweilige Grenzwert existiert, aber auch  $R = \infty$  ist willkommen und offensichtlich auch über die zweite Gleichung möglich. Selbstverständlich gibt es stets nur ein  $R$ , egal wie berechnet. Allerdings ist teils die eine, teils die andere Gleichung in der Anwendung angenehmer.

Sei die reelle Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch eine Potenzreihe gegeben, d. h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

für alle  $x \in I = ]x_0 - R, x_0 + R[$ , wobei  $R \in ]0, \infty[ \cup \{\infty\}$  der Konvergenzradius ist. Dann kann gezeigt werden, dass für alle  $x \in I$  gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

Im Konvergenzintervall können Potenzreihen also wie Polynome gliedweise differenziert werden und so ist z. B.

$$\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x).$$

### Beispiel

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$  konvergiert nirgends:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

### Beispiel

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  konvergiert in der ganzen komplexen Ebene:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

**Erläuterung**

In einigen Anwendungen kommt es vor, dass der Exponent nicht einfach  $n$  ist. In diesem Fall können wir uns mit Substitution helfen.

**Beispiel**

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{2n}$  geht durch die Substitution  $t = z^2$  über in den Ausdruck  $\sum_{n=0}^{\infty} e^n t^n$ . Der Konvergenzradius  $R_0$  dieser Potenzreihe in  $t$  ist gegeben durch

$$\frac{1}{R_0} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n} = e.$$

Der Konvergenzradius  $R$  der ursprünglichen Reihe ergibt sich durch Rücksubstitution:

$$R = \sqrt{R_0} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

**Erläuterung**

In den bisherigen Beispielen waren ohne Gefahr beide Gleichungen für den Konvergenzradius anwendbar. Das mithilfe des Limes superior formulierte Wurzelkriterium kann jedoch in bestimmten Fällen einen entscheidenden Vorteil bringen, da dieser stets definiert ist, während der entsprechende Grenzwert nicht zwangsläufig existieren muss.

**Beispiel**

Sei  $(a_n)$  die Folge mit

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Folge ist nicht konvergent, setzt sich jedoch offensichtlich aus genau zwei konvergenten Teilfolgen zusammen; Gleiches gilt für  $(\sqrt[n]{a_n})$ . Für den Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ergibt sich:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

Das Quotientenkriterium liefert kein brauchbares Ergebnis, denn der Grenzwert von

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \begin{cases} n+1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

existiert nicht.

**Beispiel**

Auf dem Rand des Konvergenzbereichs können keine allgemeingültigen Aussagen hinsichtlich der Konvergenz gemacht werden:

- Die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  hat den Konvergenzradius  $R = 1$ . Sie konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$ .
- Die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  hat den Konvergenzradius  $R = 1$ . Sie konvergiert für  $z = -1$  und divergiert für  $z = 1$ .
- Die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$  hat den Konvergenzradius  $R = 1$ . Sie konvergiert für  $z = \pm i$  und divergiert für  $z = \pm 1$ .

## Die Taylor-Reihe

### ► Definition

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Taylor-Reihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 \in I$  ist für alle  $x \in I$  gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$



### Erläuterung

Hier liegt eine Potenzreihe mit bestimmten Koeffizienten, nämlich  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ , vor und unsere vorherigen Überlegungen können folglich auch auf diesen Spezialfall angewendet werden. Die Taylor-Reihe muss nicht konvergieren. Und selbst wenn sie konvergiert, muss sie nicht unbedingt gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren.

Zum Beispiel wird bei Betrachtungen in der theoretischen Physik manchmal davon ausgegangen, dass das Taylor-Polynom auch „weiter entfernt“ vom Entwicklungspunkt eine „gute“ Näherung darstellt, wenn das Polynom nur in eine „entsprechend hohe“ Ordnung entwickelt wird. Diese Faustregel hält jedoch einer mathematischen Betrachtung im Allgemeinen nicht stand, wie wir sogleich sehen werden.

### Beispiel

Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  beliebig oft differenzierbar und es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Insbesondere verschwindet die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  identisch, d. h. an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R}$ . Dies kann wie folgt gezeigt werden:

Für  $x \neq 0$  ist die  $n$ -te Ableitung von  $f$  von der Form

$$f^{(n)}(x) = p_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mit einem Polynom  $p_n$ . Dies beweisen wir durch vollständige Induktion. Für  $n = 0$  ist mit  $p_0 = 1$  der Fall klar. Sei die Behauptung also für ein  $n \in \mathbb{N}$  bereits bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left( p_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} p_n' \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} p_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left( -\frac{1}{x^2} p_n' \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{2}{x^3} p_n \left( \frac{1}{x} \right) \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= p_{n+1} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

mit

$$p_{n+1}(t) = -t^2 p_n'(t) + 2t^3 p_n(t).$$

Wir interessieren uns jedoch für die Ableitungen an der Stelle  $x = 0$ , von denen wir behaupten, dass sie alle verschwinden. Auch hier arbeiten wir wieder mit vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang gilt  $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ . Sei  $f^{(n)}(0) = 0$  für beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$  bereits gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t p_n(t) e^{-t^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen kann mithilfe der Regel von L'Hospital gefolgt werden – die Exponentialfunktion „dominiert“ das Polynom.

### ► Definition

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wenn es für alle  $x_0 \in I$  ein offenes Intervall  $I_0 \subseteq I$  mit  $x_0 \in I_0$  und eine Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gibt, sodass für alle  $x \in I_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

gilt, dann wird  $f$  (reell-)analytisch genannt. ◀

### Erläuterung

Die analytischen Funktionen sind also genau diejenigen, die sich um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickeln lassen.

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Es kann gezeigt werden, dass eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann analytisch ist, wenn sie beliebig oft differenzierbar und an jedem Punkt durch ihre Taylor-Reihe darstellbar ist, d. h., für alle  $x_0 \in I$  gibt es ein offenes Intervall  $I_0 \subseteq I$  mit  $x_0 \in I_0$  und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für alle  $x \in I_0$ . Wenn eine Funktion in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, so ist diese also gerade durch die Taylor-Reihe gegeben. Damit ist insbesondere eine Funktion genau dann analytisch, wenn das Restglied der Taylor-Approximation mit steigender Ordnung beliebig klein wird, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

### Beispiel

Die Exponentialfunktion ist analytisch. Für die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  gilt:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

### Beispiel

Sinus und Kosinus sind analytische Funktionen, da all ihre Ableitungen beschränkt sind. Wir erhalten dadurch nämlich nach Abschätzung des Lagrange'schen Restglieds

$$\begin{aligned} |R_{n-1}(x)| &= \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} |x - x_0|^n \\ &\leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

**Beispiel**

Da wir nun wissen, dass Sinus und Kosinus durch ihre Taylor-Reihen dargestellt werden, können wir diese auch explizit berechnen und wählen  $x_0 = 0$  als Entwicklungspunkt:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(0) + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin'''(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots \\ &= \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 \pm \dots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \dots, \end{aligned}$$

und für den Kosinus entsprechend. Dies führt schließlich auf die Reihendarstellungen:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

**Erläuterung**

Derartige Darstellungen als Potenzreihe bieten einen großen Vorteil, nämlich die Verallgemeinerung bekannter reeller Funktionen auf komplexe Funktionen. So können wir in die Exponentialreihe auch beliebige komplexe Zahlen einsetzen, da wir wissen, dass der Konvergenzradius unendlich ist. Betrachten wir speziell die Einsetzung  $ix$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und trennen die Reihe in ungerade und gerade Indizes auf:

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (ix)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (ix)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Sinus- bzw. Kosinusreihe ergibt sich eine bemerkenswerte Aussage, welche als Euler-Formel oder auch Euler'sche Identität bezeichnet wird:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Speziell für  $x = \pi$  bekommen wir den folgenden bedeutenden Zusammenhang zwischen den mathematischen Konstanten  $0$ ,  $1$ ,  $e$ ,  $\pi$  und  $i$ :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

### Erläuterung

Ein Vergleich mit der trigonometrischen Darstellung  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  einer komplexen Zahl lässt erkennen, dass diese auch in der sogenannten Polardarstellung  $z = r e^{i\phi}$  geschrieben werden kann. Die Multiplikation komplexer Zahlen lässt sich damit final auf die übersichtliche Form

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

bringen. Die Beträge werden also multipliziert und die Winkel addiert. Auf diese Weise wird auch noch einmal offenbar, dass die Multiplikation komplexer Zahlen der Hintereinanderausführung von Drehstreckungen entspricht.

## Ausblick

Wir können abschließend sagen, dass sich uns die Potenzreihen als natürliche Fortführung der zuvor behandelten unendlichen Reihen darstellen. Was zuvor gemacht wurde, wir denken an die Konvergenzuntersuchungen, fand hier wieder Anwendung. Darüber hinaus lernten wir den wichtigen Begriff der analytischen Funktionen kennen, ferner bedeutende Beispiele für solche. Die ganze Tragweite dieser Funktionenklasse wird allerdings erst später klar, wenn wir uns im dritten Band mit der sogenannten Funktionentheorie befassen, in der gerade diese Funktionen im Komplexen die Hauptrollen besetzen.

Manchmal kennen wir, wie beispielsweise beim Sinus, die Potenzreihendarstellung. Aber es gibt auch Gründe dafür, mit der allgemeinen Darstellung zu beginnen. Dann zum Beispiel, wenn wir Differenzialgleichungen lösen möchten. Das Verfahren wird dann das folgende sein: Wir setzen eine Lösung als allgemeine Potenzreihe an. Die Differenzialgleichung, zusammen mit sogenannten Anfangswerten, kann natürlich nicht allgemein durch beliebige Funktionen gelöst werden: Die sonst unbestimmten Koeffizienten  $a_n$  werden zur Annahme einer bestimmten Form „gezwungen“ und es liegt dann eine Funktion als Lösung vor, sofern wirklich die Konvergenz der Potenzreihe gegeben ist und wir tatsächlich etwas mit dem dann erhaltenen Ausdruck anfangen können. Dies ist aber nicht selten der Fall, wie wir noch sehen werden.

## Selbsttest

**I.** Welche der folgenden Potenzreihen haben tatsächlich den Konvergenzradius  $R$ ?

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad R = 0$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad R = \infty$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad R = 1$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2}, \quad R = 2$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad R = 1$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}, \quad R = -1$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (x - 7)^k, \quad R = 8$$

**II.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine analytische Funktion. Welche der folgenden Formeln sind korrekt, wobei  $x \in ]-R, R[$  mit geeignetem  $R > 0$ ?

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

$$(3) \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(0)}{k!} x^k$$

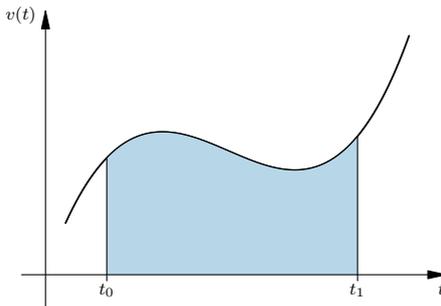
$$(4) \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1}$$



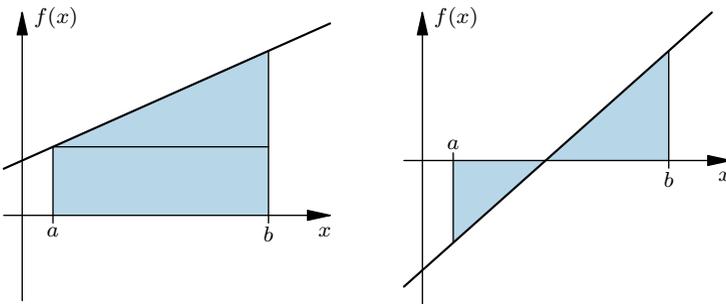
# 22 Das Riemann'sche Integral

## Einblick

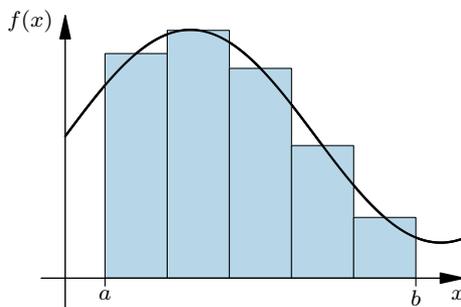
Die Frage nach der Fläche unter dem Graphen einer Funktion über einem gegebenen Intervall kann von rein theoretischer Bedeutung sein, aber auch von physikalischer Natur. Zeichnen wir beispielsweise die Geschwindigkeit eines Teilchens über einem Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  auf, ergibt die Fläche unter dem Graphen gerade die zurückgelegte Strecke des Teilchens:



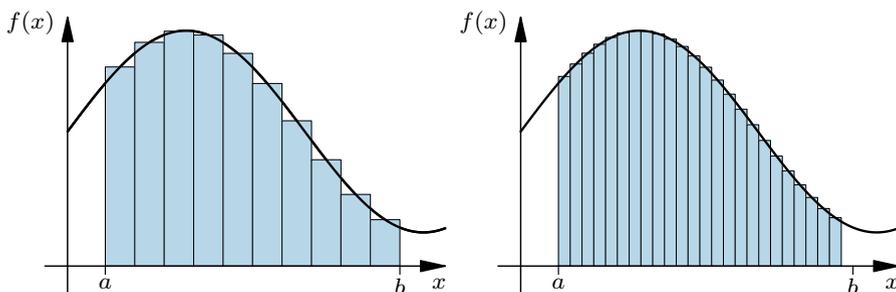
Ist der Graph der betrachteten Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Gerade, so lässt sich die Fläche einfach durch ein Rechteck und ein Dreieck bzw. durch zwei Dreiecke zusammensetzen:



Wie allerdings geht dies grundsätzlich? Die Beantwortung dieser Frage führt zu zahlreichen – auch deutlich abstrakteren – Überlegungen in diesem Kapitel. Die Grundidee ist allerdings einfach: Wir beschränken uns auf die Berechnung der Fläche von Rechtecken zwischen der  $x$ -Achse und dem Funktionsgraphen, deren Grundseite jeweils auf der  $x$ -Achse liegt:



Dann wird der „Fehler“ minimiert, indem wir die Rechtecke immer kleiner wählen:



In den letzten drei Bildern trifft jeweils die Mitte der oberen Kanten des jeweiligen Rechtecks den Graphen der Funktion. Dies muss allerdings nicht so sein und ist nur eine Möglichkeit der Approximation der Fläche zwischen Funktionsgraph und  $x$ -Achse unter Verwendung von Rechteckflächen.

## Riemann'sche Summen

### ► Definition

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine Unterteilung von  $[a, b]$  in  $n$  gleich große Teilintervalle mit Randpunkten

$$x_k = a + k\Delta x$$

( $k \in \{0, \dots, n\}$ ) heißt Zerlegung von  $[a, b]$ , wobei

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Wir nennen

$$R_f(n) = \sum_{k=1}^n \Delta x f(x_{k-1})$$

Riemann'sche Summe,

$$O_f(n) = \sum_{k=1}^n \Delta x \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

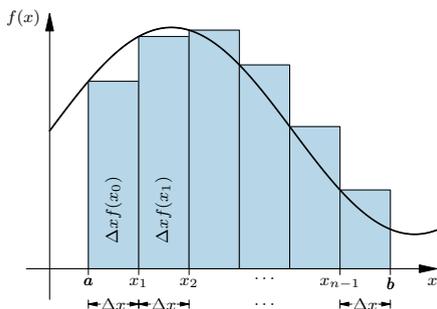
Obersumme und

$$U_f(n) = \sum_{k=1}^n \Delta x \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Untersumme. ◀

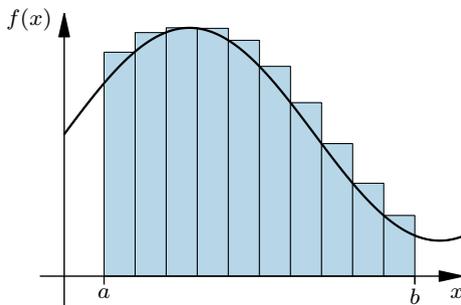
**Erläuterung**

Die oben gewählte Zerlegung erfolgt in gleich große Teile. Dies ist prinzipiell nicht nötig, jedoch in vielen Fällen praktisch bzw. besonders einfach. Wir betrachten die Riemann'sche Summe der Definition in einer Skizze:

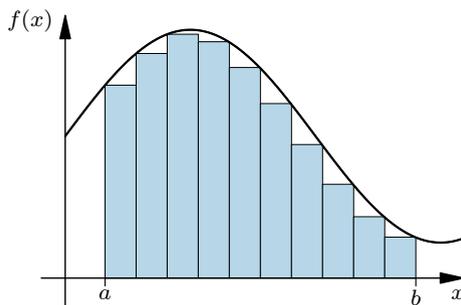


Für negative Funktionswerte würden die entsprechenden Rechtecke, dann unter der  $x$ -Achse liegend, einen negativen Beitrag liefern. Das ist unproblematisch für die Berechnung von Riemann'schen Summen (und dann auch Integralen). Allerdings können wir dann beim Berechnen Riemann'scher Summen als Ergebnis auch null erhalten, wenn sich die Rechteckflächen entsprechend „aufheben“, selbst wenn die sichtbare Fläche keinesfalls verschwindet. Für Flächenberechnungen tragen also die Bereiche unterhalb der  $x$ -Achse nur im Betrage zur Gesamtfläche bei.

Nachstehend erkennen wir die Umsetzung der Obersumme:



Hier die entsprechende Untersumme:



Im Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  sind  $O_f(n)$  und  $U_f(n)$  für stetige oder monotone Funktionen gleich und alles reduziert sich final auf den Fall der Riemann'schen Summen; dazu später mehr.

### ► Definition

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir nennen den Grenzwert der Folge Riemann'scher Summen ( $R_f(n)$ ) im Fall der Existenz das (bestimmte) Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_f(n).$$

Der Term  $f(x)$  heißt Integrand,  $a$  und  $b$  heißen Integrationsgrenzen und das Intervall  $[a, b]$  heißt Integrationsbereich. ◀

### Erläuterung

Mit unseren Überlegungen eng verknüpft ist der Begriff der Treppenfunktion. Eine solche ist eine Funktion  $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf den offenen Intervallen  $]x_{k-1}, x_k[$  der betrachteten Zerlegung jeweils gleich einer Konstanten  $C_k \in \mathbb{R}$  ist. Das Integral einer Treppenfunktion ist dann gerade die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke, wie wir sie in den Bildern zuvor bereits mehrfach gesehen haben. So gilt im einfachsten Fall einer konstanten Funktion  $f$  mit  $f(x) = c$ , dass diese durch die Treppenfunktion  $T = C_1 = c$  vollständig gegeben ist. Eine Riemann'sche Summe ist gerade das Integral über eine spezielle Treppenfunktion, wobei dort auf jedem  $]x_{k-1}, x_k[$  der Wert der Treppenfunktion gerade durch  $f(x_{k-1})$  gegeben ist.

### ■ Satz

Mit den Bezeichnungen obiger Definition gilt, dass für stetige Funktionen die Folge Riemann'scher Summen ( $R_f(n)$ ) konvergiert.

**Beweis:** Nach Konstruktion ist

$$U_f(n) \leq R_f(n) \leq O_f(n)$$

klar. Zu zeigen ist, dass  $(R_f(n))$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert, wobei es nach obiger Ungleichung genügt, dass Ober- und Untersumme gegen den gleichen Wert streben. Wenn die Zerlegung nun zu gegebenem  $\epsilon > 0$  so fein gewählt wird, dass

$$\left| \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right| < \epsilon$$

ist, dann gilt

$$0 \leq O_f(n) - U_f(n) = \sum_{k=1}^n \Delta x \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) < \epsilon(b-a).$$

Für  $n \rightarrow \infty$  wird folglich der Term  $O_f(n) - U_f(n)$  beliebig klein, denn durch die „unendliche“ Verfeinerung unterschreiten wir jedes noch so kleine  $\epsilon$ . Daher genügt es zu zeigen, dass  $U_f(n)$  oder  $O_f(n)$  konvergiert; wir wählen  $O_f(n)$ . Bitte beachten Sie, dass der Betrag der Differenz von  $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  und  $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  zuvor deshalb kleiner als jedes noch so kleine  $\epsilon$  gewählt werden konnte, weil wir seit dem Kapitel über stetige Funktionen wissen, dass  $f$  als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig ist.

Um nun die Konvergenz von  $(O_f(n))$  zu zeigen, beweisen wir, dass es sich dabei um eine Cauchy-Folge handelt, also ab einer gewissen Feinheit der Zerlegung für beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt, dass  $|O_f(n) - O_f(m)|$  beliebig klein wird. Diese Feinheit lässt sich dadurch charakterisieren, dass für die bezüglich  $m$  und  $n$  gegebenen Zerlegungen jeweils gilt, dass die Abweichung von  $f$  in jedem der Teilintervalle kleiner als  $\epsilon$  bleibt. Davon startend gehen wir zu einer Zerlegung über, in welcher sämtliche Punkte dieser Zerlegung zusammen betrachtet werden und diese dann aus  $i$  Teilpunkten bestehe. Es gilt

$$U_f(n) \leq O_f(i) \leq O_f(n)$$

und

$$U_f(m) \leq O_f(i) \leq O_f(m).$$

Wir machen uns die erste Ungleichungssequenz klar, indem wir das  $l$ -te Teilintervall bezüglich der durch  $n$  gegebenen Zerlegung betrachten. Diesem entspricht entweder das gleiche Teilintervall bezüglich der durch  $i$  gegebenen Zerlegung (dann ist alles klar) oder es liegen mehrere Teilintervalle vor. In diesem Fall haben wir jeweils eine Grundseite zu betrachten, die jeweils einen

Faktor hat, der durch  $\inf_{x \in [x_{l-1}, x_l]} f(x)$  und  $\sup_{x \in [x_{l-1}, x_l]} f(x)$  beschränkt ist. Die Summe der gerade verwendeten Grundseiten liefert die Grundseite  $\Delta x$  der durch  $n$  gegebenen Zerlegung. Damit folgt, dass der zu  $O_f(i)$  gehörende Beitrag durch  $\Delta x \inf_{x \in [x_{l-1}, x_l]} f(x)$  und  $\Delta x \sup_{x \in [x_{l-1}, x_l]} f(x)$  beschränkt ist. Summation über alle Teilintervalle liefert nun die erste Ungleichungssequenz, die zweite folgt analog.

Nun gilt

$$0 \leq O_f(n) - U_f(n) < \epsilon(b - a),$$

gleichfalls

$$0 \leq O_f(m) - U_f(m) < \epsilon(b - a)$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} |O_f(n) - O_f(m)| &= |(O_f(n) - O_f(i)) - (O_f(m) - O_f(i))| \\ &\leq |(O_f(n) - O_f(i)) + (O_f(m) - O_f(i))| \\ &\leq |O_f(n) - O_f(i)| + |O_f(m) - O_f(i)| \\ &< 2\epsilon(b - a); \end{aligned}$$

es handelt sich bei  $(O_f(n))$  daher tatsächlich um eine Cauchy-Folge. ■

### Erläuterung

Wir haben also gezeigt, dass das Integral für stetige Funktionen stets existiert und der Begriff des Riemann'schen Integrals daher nicht nur für „exotische“ Spezialfälle von Funktionen sinnvoll ist; bedeutende stetige Funktionen haben wir mannigfach gesehen. Auch für monotone Funktionen konvergieren die Riemann'schen Summen. Allerdings möchten wir bemerken, dass die stetigen Funktionen besonders bedeutende Vertreter der integrierbaren Funktionen sind, weshalb wir diese hier vorrangig betrachten.

### Beispiel

Wir betrachten in einer ersten Beispielrechnung eine Funktion  $f$  mit  $f(x) = c$ , wobei  $c$  eine positive reelle Zahl ist. Wir berechnen  $R_f(n)$  über dem Intervall  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned}
 R_f(n) &= \sum_{k=1}^n \Delta x f(x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \Delta x c \\
 &= c \sum_{k=1}^n \Delta x \\
 &= cn \frac{b-a}{n} \\
 &= c(b-a)
 \end{aligned}$$

für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ . Dies ist einfach die Fläche eines Rechtecks, was zu erwarten war. Bitte beachten Sie, dass hier keine Abhängigkeit von  $n$  besteht, wir haben also – ohne Grenzwertbetrachtung – das Integral  $\int_a^b c \, dx$  berechnet.

### Beispiel

Sein nun  $f(x) = x$ . Wir berechnen  $R_f(n)$  über dem Intervall  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned}
 R_f(n) &= \sum_{k=1}^n \Delta x f(x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \Delta x x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \Delta x (a + k\Delta x) \\
 &= \sum_{k=1}^n (a\Delta x + k(\Delta x)^2) \\
 &= na\Delta x + (\Delta x)^2(1 + \dots + n) \\
 &= na\Delta x + \frac{n(n+1)}{2} \Delta x \\
 &= na \frac{b-a}{n} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{(b-a)^2}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2}(b^2 - a^2),
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  gebildet haben. Auch dieses Ergebnis sollte nicht überraschen und wir haben damit explizit  $\int_a^b x \, dx$  berechnet.

### Erläuterung

Die letzten beiden Berechnungen waren nicht sehr schwer, allerdings sind immerhin einige Ergebnisse aus vorangehenden Kapitel nötig gewesen. Der Fall

$f(x) = x^2$  ist nicht von dramatischer Schwierigkeit, allerdings doch anspruchsvoller. Es kann daher nicht der Sinn sein, Integrale stets über Riemann'sche Summen zu berechnen; andere Methoden sind ebenfalls nötig.

Die Benennung der Integrationsvariablen spielt keine Rolle:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\chi) d\chi = \dots$$

Es genügt, wenn  $f$  nur stückweise stetig oder monoton ist – wenn  $f$  also bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig oder monoton ist, und diese Ausnahmestellen sind allenfalls Sprungstellen, d. h., rechts- und linksseitiger Grenzwert der Funktion existieren. Das Integral kann dann auf den Teilintervallen, auf denen  $f$  stetig oder monoton ist, separat berechnet und anschließend addiert werden. Alle diese Funktionen nennen wir integrierbar. Integrierbare Funktionen sind stets auf einem abgeschlossenen Intervall definiert und beschränkt.

## Rechenregeln der Integration

### ■ Satz

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall,  $a, b, c \in I$  mit  $a < b < c$  und  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen. Dann gilt:

1.  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
2. Linearität des Integrals:
  - a)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
  - b)  $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$
3.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
4.  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ , falls  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in ]a, b[$  (Monotonie)
5.  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ , falls  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in ]a, b[$  (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

**Beweis:** Die ersten vier Regeln folgen aus der Konstruktion des Integrals durch Riemann'sche Summen und den bereits bekannten Grenzwertsätzen für Folgen. Der Mittelwertsatz, von dem wir einen Spezialfall bereits im Beweis des Hauptsatzes behandelten, ist leicht einsehbar: Die Fläche unter dem Funktionsgraphen ist nach den Voraussetzungen offensichtlich größer oder gleich der Fläche des Rechtecks mit den vertikalen bzw. horizontalen Seiten der jeweiligen Länge  $m$  und  $|a - b|$ , allerdings kleiner oder gleich dem Rechteck mit den entsprechenden Seiten der jeweiligen Länge  $M$  und  $|a - b|$ . ■

**Erläuterung**

Neben den obigen Regeln legt man gewöhnlich noch fest:

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0$
2.  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

## Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

### ► Definition

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine differenzierbare Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , wenn gilt:

$$F' = f \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so auch  $F + c$  für eine beliebige Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , denn  $(F + c)' = F' + 0 = F'$ . Weitere Stammfunktionen gibt es allerdings nicht. Um sich nicht auf eine bestimmte Stammfunktion einigen zu müssen, wird auch

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

ohne Grenzen am Integralsymbol geschrieben; wir nennen  $\int f(x) dx$  unbestimmtes Integral von  $f$ . Anders ausgedrückt: Das unbestimmte Integral bezeichnet die Gesamtheit aller Stammfunktionen. Es kann gezeigt werden, dass für jede stetige Funktion immer eine Stammfunktion existiert.

Die Integrationskonstante wird nicht selten gleich null gesetzt, was ohne Schaden allerdings nur dann praktiziert werden sollte, wenn lediglich Interesse an einer möglichen Stammfunktion besteht. Für physikalische Anwendungen hat die Integrationskonstante allerdings eine große Bedeutung. Wir betrachten zur Erklärung die Bewegung eines Körpers mit konstanter Masse  $m$  unter dem Einfluss einer konstanten Kraft  $K$ . Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des zurückgelegten Weges nach der Zeit  $\ddot{x}(t)$ , und nach dem zweiten Newton'schen Gesetz („Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung“) gilt:

$$K = m\ddot{x}(t)$$

Durch Umstellen nach  $\ddot{x}(t)$  und Integration nach der Zeit  $t$  erhalten wir die Geschwindigkeit des Körpers zu jedem Zeitpunkt:

$$\dot{x}(t) = \frac{K}{m}t + v_0.$$

Eine weitere Integration liefert die Position bzw. die Ortsfunktion:

$$x(t) = \frac{K}{2m}t^2 + v_0t + x_0$$

Dabei liefert das Integrieren jeweils die Stammfunktionen, denn nach dem ersten Schritt erhalten wir aus der Beschleunigung die Geschwindigkeitsfunktion  $v$  (mit entsprechend bezeichneter Integrationskonstante  $v_0$ ) und danach aus dieser die Ortsfunktion  $x$  (mit der zugehörigen Integrationskonstante  $x_0$ ). Werden die Integrationskonstanten hier vergessen, verschwinden plötzlich Anfangsort und -geschwindigkeit des Körpers. Das ist mit der Beschreibung der physikalischen Realität allerdings unvereinbar.

### ■ Satz

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, dann ist für alle  $x_0 \in [a, b]$  die Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

differenzierbar und eine Stammfunktion zu  $f$ ; weiterhin gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Beweis:** Für den ersten Teil berechnen wir die Ableitung von  $F$ : Seien dazu  $x \in [a, b]$  und  $h \neq 0$  mit  $x + h \in [a, b]$ :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Da das Integral den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen angibt, können wir dieses folgendermaßen durch Rechteckflächen abschätzen:

$$h \cdot \min_{t \in [x, x+h]} f(t) \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq h \cdot \max_{t \in [x, x+h]} f(t)$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $\xi_h$  zwischen  $x$  und  $x + h$  mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = h \cdot f(\xi_h).$$

Der Index bei  $\xi_h$  verdeutlicht die Abhängigkeit vom Integrationsintervall, also von  $h$ . Es ist  $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$ , denn  $\xi_h$  ist ja gerade zwischen  $x$  und  $x + h$  „eingeklemmt“. Daher folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x).$$

Der zweite Teil ergibt sich einfach durch das Einsetzen der Definition von  $F$ :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_{x_0}^b f(t) dt - \int_{x_0}^a f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^b f(t) dt + \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Erläuterung

Für den Term  $F(b) - F(a)$  werden zumeist die abkürzenden Schreibweisen  $F(x)|_a^b$  bzw.  $[F(x)]_a^b$  verwendet.

Um Missverständnisse auszuschließen und die Integrationsvariable klarzustellen, werden wir zuweilen auch  $F(x)|_{x=a}^b$  bzw.  $[F(x)]_{x=a}^b$  schreiben.

### Beispiel

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + c - \left( \frac{-1}{3} + c \right) = \frac{2}{3} + c - c = \frac{2}{3}$$

Wir sehen, dass die Konstante der Stammfunktion bei der Berechnung keine Rolle spielt; das bestimmte Integral ist also unabhängig von der Wahl der Stammfunktion.

## Rechentechiken der Integration

### Die Substitutionsregel

#### ■ Satz

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Ferner sei  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt die sogenannte Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x(t)) \dot{x}(t) dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = F(x(b)) - F(x(a)).$$

**Beweis:** Es gilt die Kettenregel

$$(F \circ x)'(t) = F'(x(t)) \dot{x}(t) = f(x(t)) \dot{x}(t),$$

aus der wir durch Integration und die Anwendung des Hauptsatzes sofort

$$\int_a^b f(x(t))\dot{x}(t) dt = F(x(b)) - F(x(a)) = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx$$

erhalten. ■

### Beispiel

Zur Berechnung von  $\int_a^b f(3t+1) dt$  definieren wir  $x(t) = 3t+1$ . Damit ist  $\dot{x}(t) = 3$  und die Substitutionsregel führt auf

$$\int_a^b f(3t+1) dt = \frac{1}{3} \int_a^b f(x(t))\dot{x}(t) dt = \frac{1}{3} \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{3a+1}^{3b+1} f(x) dx.$$

Obiger Lösungsweg wurde direkt auf die Substitutionsregel zugeschnitten. Nun das gleiche Beispiel etwas anders: Wir wählen wieder  $x(t) = 3t+1$  und formen die Ableitung so um, als handele es sich um einen echten Bruch (und nicht lediglich um eine formale Schreibweise):

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{3} = dt$$

Natürlich ist diese Schreibweise nicht willkürlich, sondern mit der Integral-schreibweise abgestimmt, sodass wir die erhaltene Gleichung einfach nur in das Integral einsetzen und die Integralgrenzen anpassen müssen:

$$\int_a^b f(3t+1) dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) \frac{dx}{3} = \int_{3a+1}^{3b+1} \frac{f(x)}{3} dx$$

Diese Methode empfinden viele als angenehmer, wenn auch die Vorgehensweise etwas „gefährlich“ wirkt.

### Beispiel

Wir berechnen  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ , indem wir  $t(x) = \sin x$  substituieren. Zusammen mit

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \quad \text{bzw.} \quad dt = \cos x dx$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x} \cos x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \cos x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt, da der Kosinus im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  positiv ist. Der Sinus ist im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  injektiv und die Umkehrfunktion durch den Arkussinus

$$x: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x(t) = \arcsin t$$

gegeben. Mit dieser haben wir im ersten Rechenschritt die Integralgrenzen substituiert. Die Berechnung dieses Beispiels werden wir im nächsten Abschnitt fortführen, wenn uns die Methode der partiellen Integration zur Verfügung steht.

## Partielle Integration

### ■ Satz

Seien  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=a}^b = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

bzw.

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx,$$

was als partielle Integration bezeichnet wird.

**Beweis:** Nach der Produktregel ist

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

und der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung liefert

$$f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=a}^b = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx. \quad \blacksquare$$

### Beispiel

Bei der Integration von  $x \cdot e^x$  wählen wir  $f'(x) = e^x$  und  $g(x) = x$ . Demnach ist

$$\int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_{x=a}^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = (x-1)e^x \Big|_{x=a}^b.$$

### Erläuterung

Die Rechenregel der partiellen Integration wird beim Integrieren von Produkten oft angewendet. Wie wir sehen werden, sind Produkte allerdings nicht immer offensichtlich. Bei der Entscheidung, welcher Faktor als  $f'$  und welcher als  $g$

angesehen wird, sollten Sie sich überlegen, ob das Integral, mit dem Sie es nach der partiellen Integration zu tun haben – dort steht das Produkt aus der Stammfunktion des einen Faktors und der Ableitung des anderen Faktors –, einfacher zu berechnen ist. Hätten wir im vorigen Beispiel die Rollen von  $f$  und  $g$  vertauscht, hätten wir nach der partiellen Integration mit  $x^2 e^x$  rechnen müssen, was allerdings eine Verschlechterung wäre.

### Beispiel

Wir integrieren den (natürlichen) Logarithmus in den Grenzen von 1 bis 2 mithilfe der partiellen Integration. Dazu wählen wir  $g(x) = \ln x$  und  $f(x) = x$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x \, dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx \\ &= x \cdot \ln x \Big|_{x=1}^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= (x \ln x - x) \Big|_{x=1}^2 \\ &= 2 \cdot \ln 2 - 2 - (1 \cdot \ln 1 - 1) \\ &= 2 \cdot \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Indem wir die Integrationsgrenzen weglassen, haben wir sogleich eine Stammfunktion von  $\ln x$  gefunden:  $x \ln x - x$ .

### Beispiel

Wir verwenden partielle Integration, um die Berechnung des letzten Beispiels zur Substitutionsregel fortzuführen:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= \sin x \cos x \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x (-\sin x) \, dx \\ &= 0 - 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

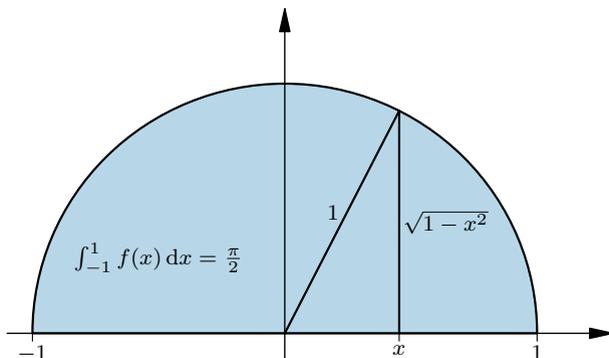
Das gesuchte Integral steht auf beiden Seiten der Gleichung; Auflösen liefert

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

und schließlich

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, denn die Fläche unter dem Graphen ist eine halbe Kreisscheibe mit Radius 1:



**Erläuterung**

Oft entstehen durch die Anwendung der Substitutionsregel oder der partiellen Integration rationale Funktionen, d. h., wir werden auf die Berechnung von Integralen der Form

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$$

mit Polynomen  $p$  und  $q$  geführt. Rationale Funktionen können stets durch Polynomdivision und anschließende Partialbruchzerlegung in ein Polynom und eine Summe (einfacherer) rationaler Funktionen zerlegt werden. Der Rest einer Polynomdivision ist nämlich gerade eine rationale Funktion  $r_1$  mit  $r_1(x) = \frac{p_1(x)}{q(x)}$ , deren Zählerpolynom  $p_1$  einen niedrigeren Grad aufweist als das Nennerpolynom  $q$ . Wir zerlegen dann  $q$  in seine Faktoren, indem wir dessen reelle Nullstellen  $a_1, \dots, a_m$  bestimmen. Es kann gezeigt werden (wir gehen hier nicht näher darauf ein), dass dann folgende Form erreichbar ist:

$$q(x) = a \cdot (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} \times \\ \times (x^2 + b_{m+1}x + c_{m+1})^{k_{m+1}} \dots (x^2 + b_nx + c_n)^{k_n},$$

wir begnügen uns allerdings mit der Beschreibung des weiteren praktischen Vorgehens.

Zu jedem Term der Form  $(x - a)^k$  in  $q(x)$  setzen wir dann die Brüche

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$$

an, und zu jedem Term der Form  $(x^2 + bx + c)^l$  machen wir den Ansatz

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_lx + C_l}{(x^2 + bx + c)^l}.$$

Letztlich wollen wir den Integranden in eine Summe von Termen der Form

$$x^k, \quad \frac{1}{(x - a)^k}, \quad \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k}$$

zerlegen. Die meisten dieser Terme sind sehr einfach zu integrieren. Die Lösung des letzten Terms ist etwas schwieriger, weshalb wir ihn als Teil des unten stehenden Satzes genauer untersuchen.

### Beispiel

Für  $r(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2}$  verwenden wir den Ansatz  $r(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$ . Diese Darstellungen für  $r$  setzen wir gleich und machen einen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x-2)^2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} = \frac{A_1(x-2) + A_2}{(x-2)^2} \\ \Rightarrow x+3 &= A_1(x-2) + A_2 = A_1x + (A_2 - 2A_1) \\ \Rightarrow 1 &= A_1 \quad \text{und} \quad 3 = A_2 - 2A_1 \\ \Rightarrow A_1 &= 1 \quad \text{und} \quad A_2 = 5 \end{aligned}$$

Somit ist  $r(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$ .

### Beispiel

Für  $r(x) = \frac{x^2+3}{(x^2+x+2)^2}$  verwenden wir den Ansatz  $r(x) = \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+2)^2}$ . Mit Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3}{(x^2+x+2)^2} &= \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+2)^2} \\ &= \frac{(B_1x+C_1)(x^2+x+2) + B_2x+C_2}{(x^2+x+2)^2} \\ \Rightarrow x^2+3 &= (B_1x+C_1)(x^2+x+2) + B_2x+C_2 \\ &= B_1x^3 + (B_1+C_1)x^2 + (2B_1+C_1+B_2)x + (2C_1+C_2) \\ \Rightarrow 0 &= B_1, \quad 1 = B_1+C_1, \quad 0 = 2B_1+C_1+B_2 \\ &\quad \text{und} \quad 3 = 2C_1+C_2 \\ \Rightarrow B_1 &= 0, \quad C_1 = 1, \quad B_2 = -1 \quad \text{und} \quad C_2 = 1 \end{aligned}$$

Somit ist  $r(x) = \frac{x^2+3}{(x^2+x+2)^2} = \frac{1}{x^2+x+2} + \frac{-x+1}{(x^2+x+2)^2}$ .

### ■ Satz

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$ . Dann gilt:

1.  $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \int (x-a)^{-k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$
2.  $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a|$
3.  $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} dx = -\frac{1}{(k-1)(x^2+bx+c)^{k-1}}$
4.  $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \ln |x^2+bx+c|$
5.  $\int \frac{1}{x^2+bx+c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan \left( \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \right)$ , falls  $c - \frac{b^2}{4} > 0$

**Beweis:** Die ersten vier Integrale sind von begrenzter Schwierigkeit, weshalb wir uns auf den letzten Punkt konzentrieren wollen. Dazu erinnern wir an die Ableitung des Arkustangens (der Umkehrfunktion des Tangens im Intervall  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ), die wir gleich als Stammfunktion verwenden:

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Wir betrachten den Fall, für welchen der Nenner  $x^2 + bx + c$  keine reellen Nullstellen hat, was genau dann vorliegt, wenn  $c - \frac{b^2}{4} > 0$  gilt; andernfalls könnten wir den Term weiter zerlegen. Wir gehen also davon aus, dass der Nenner ein komplex konjugiertes Paar  $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  an Nullstellen besitzt. Nun können wir  $x^2 + bx + c$  auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x - x_0)(x - \bar{x}_0) \\ &= x^2 - (x_0 + \bar{x}_0)x + x_0\bar{x}_0 \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2, \end{aligned}$$

also ist  $b = -2\operatorname{Re}(x_0)$  und  $c = |x_0|^2 = \operatorname{Re}(x_0)^2 + \operatorname{Im}(x_0)^2$ . Weiterhin formen wir den Nenner so um, dass er sich einfach zur Ableitung des Arkustangens hin substituieren lässt:

$$\begin{aligned} x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2 &= (x - \operatorname{Re}(x_0))^2 + \operatorname{Im}(x_0)^2 \\ &= \operatorname{Im}(x_0)^2 \left( \left( \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$y = \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)}$$

ist folglich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2} dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)} \arctan y \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)} \arctan \left( \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan \left( \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right). \end{aligned}$$

■

### Erläuterung

In obigem Satz haben wir den Fall

$$\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx, \quad k \geq 2$$

nicht abgedeckt. Der Vollständigkeit halber geben wir die folgende Rekursionsformel an, mit der solche Integrale nach geeigneter Substitution durch mehrfache Anwendung auf die Berechnung von  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$  zurückgeführt werden können:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^k} dx = \frac{1}{2k - 2} \frac{x}{(x^2 + 1)^{k-1}} + \frac{2k - 3}{2k - 2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{k-1}} dx$$

### Beispiel

Wir wollen

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

berechnen. Die einzige reelle Nullstelle des Nenners des Integranden ist  $x = -1$ , und nach Durchführen der Polynomdivision  $(x^3 + 1) : (x + 1)$  ergibt sich:

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx = \int \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} dx$$

Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung führt auf

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} &= \frac{A(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} &= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} &= \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
 \Leftrightarrow 1 &= (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C) \\
 \Leftrightarrow A+B=0, \quad -A+B+C=0, \quad A+C=1.
 \end{aligned}$$

Dies ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in den Variablen  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Anwenden des Gauß-Algorithmus auf die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix führt auf

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{II}+\text{I}, \text{III}-\text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{2 \cdot \text{III} + \text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{III}/3, \text{II}-\text{III}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{II}/2, \text{I}-\text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

also muss

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

gelten. Eingesetzt in das Ausgangsproblem ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{x^3+1} dx \\
 &= \int \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-4}{x^2-x+1} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \left( \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \int \frac{3}{x^2-x+1} dx \right) \\
&= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \arctan \left( \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{3} (2x-1) \right).
\end{aligned}$$

Wir wollen darüber hinaus das Beispiel noch durch Angabe von Integrationsgrenzen erweitern:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
&= \frac{1}{3} \ln 2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi
\end{aligned}$$

## Ausblick

Die Integration basiert auf einer einfachen Idee, die rein anschaulich verstanden werden kann, wie die Bilder zum Anfang des Kapitels belegen. Darüber hinaus, wir denken an den Hauptsatz, fanden wir in gewisser Weise auch das Gegenstück zur Differenziation. Es ist aber Vorsicht geboten, denn wir können durchaus sagen, dass das Differenzieren mit überschaubaren Regeln beherrscht werden kann, das Integrieren ist hingegen in vielen Fällen (vielleicht sogar den meisten) Kunst. Es hilft dabei sehr, wirklich zahlreiche Ableitungen von Funktionen parat zu haben – und zu üben.

Die Eigenschaft als „Gegenspieler“ zur Differenziation wird noch sehr nützlich sein, wenn wir uns mit Differenzialgleichungen befassen. Einen Vorgeschmack davon bekamen wir hier bereits im Zusammenhang mit dem zweiten Newton'schen Gesetz.

Es mag verwundern, dass selbst in der Überschrift zum Kapitel der Name „Riemann“ erwähnt wird. Der Grund liegt nicht alleine in den Leistungen dieses Mannes im behandelten Gebiet. Vielmehr gibt es einen weiteren Integralbegriff, nämlich den des Lebesgue-Integrals (in voller Wahrheit ist auch das nicht der Weisheit allerletzter Schluss). Dieses spielt u. a. dann eine besondere Rolle, wenn es um sogenannte Maßräume geht, die auch Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie sind. Der Unterschied zum Riemann'schen Integral besteht knapp gesagt darin, dass beim Riemann'schen Integral der Definitionsbereich und beim Lebesgue'schen Integral die Bildmenge der Funktion zerlegt

---

wird, was tatsächlich einen bedeutenden Unterschied machen kann. Die Begriffsbildung nach Riemann hat dadurch nicht an Bedeutung verloren, allerdings ist ihre Tragweite begrenzt.

## Selbsttest

**I.** Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen,  $c \in [a, b]$  und  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  für alle  $x \in [a, b]$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Es gilt  $f'(x) = F(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- (2)  $\int_a^b f(g'(t))g'(t) dt = F(b) - F(a)$
- (3)  $\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = F(b) - F(a)$
- (4)  $\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$
- (5)  $F(a) = 0$
- (6) Wenn  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt, dann ist  $F(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- (7) Wenn  $f(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt, dann ist  $F(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- (8)  $\int_a^b |f(x)| dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$
- (9)  $\int_a^b f(\lambda x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- (10)  $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$
- (11)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(c)$
- (12)  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
- (13)  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
- (14)  $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$
- (15)  $\int_a^b f(x)g(x) dx = F(x)g'(x)|_{x=a}^b - \int_a^b F(x)g(x) dx$
- (16)  $\int_a^b f(x)g(x) dx = F(x)g(x)|_{x=a}^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx$
- (17)  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$
- (18)  $\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$
- (19)  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f'(x)g(x)|_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$



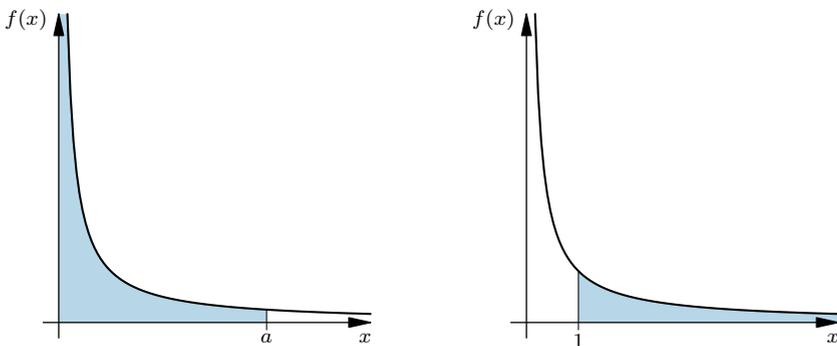
# 23 Uneigentliche Integrale

## Einblick

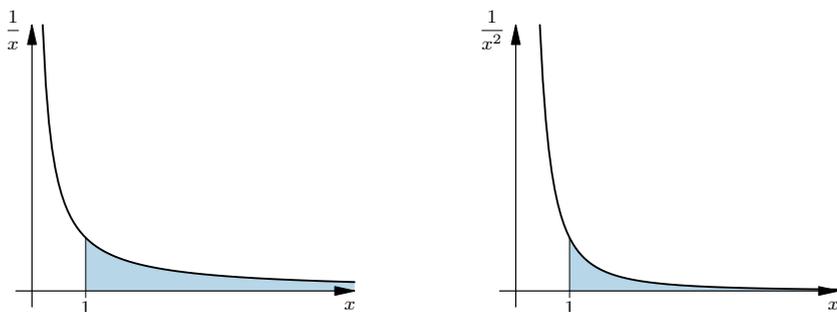
Bislang haben wir nur Integrale von Funktionen betrachtet, die auf einem abgeschlossenen Intervall definiert sind. Wollen wir hingegen über ein halboffenes oder offenes Intervall integrieren, so müssen wir den Grenzwertbegriff zurate ziehen, und selbst im Integrationsintervall kann es Probleme geben.

Das dann betrachtete sogenannte uneigentliche Integral kommt in vielen Anwendungen vor. Zur Behandlung wird wieder der Grenzwertbegriff nötig sein, denn solche Integrale müssen auf ihre Konvergenz hin untersucht werden.

Woher kommt aber die Notwendigkeit für diesen Integralbegriff? Neben den Anwendungen können wir dies recht einfach anhand der Frage beantworten, ob die Fläche unter einem Funktionsgraph, der sich ins Unendliche erstreckt, nicht unendlich groß wird. Wir sehen nachstehend den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Wenn wir die Fläche zur Null hin berechnen wollen, scheint diese unendlich groß zu werden, gleichfalls, wenn wir z. B. von 1 bis ins Unendliche integrieren:



Im nächsten Bild sehen wir die Graphen von  $\frac{1}{x}$  und  $\frac{1}{x^2}$ , beginnend bei  $x = 1$ :



Wenn wir hier von 1 bis ins Unendliche integrieren, so konvergiert die Fläche unter dem Graphen von  $\frac{1}{x^2}$ , nicht aber unter  $\frac{1}{x}$ , was diverse Fragen aufwirft, mit denen wir uns im Detail befassen werden.

## Kritische Stellen des Integrationsintervalls

### ► Definition

Sei  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf jedem Teilintervall  $[a + \epsilon, b]$  mit  $0 < \epsilon < b - a$  integrierbar ist. Existiert dann der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx,$$

so heißt das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

konvergent und wir definieren

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx,$$

wobei wir  $a$  eine kritische Stelle nennen. Analog für den Fall einer Funktion  $f: [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit kritischer Stelle  $b$ : Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \nearrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx. \quad \blacktriangleleft$$

### Erläuterung

Die explizite Verwendung eines  $\epsilon$  wirkt etwas konstruiert, ist jedoch nötig, da wir tatsächlich die Integration über jedes der Teilintervalle  $[a + \epsilon, b]$  bzw.  $[a, b - \epsilon]$  betrachten (müssen). Besteht allerdings Klarheit darüber, so können wir auch Folgendes schreiben:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \searrow a} \int_r^b f(x) dx$$

bzw.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x) dx,$$

wobei natürlich  $r$  jeweils zwischen  $a$  und  $b$  liegen muss und die Funktion stets für alle der betrachteten Integrationsintervalle definiert sei.

Es gibt zusätzlich den Fall, für welchen beide Integrationsgrenzen kritisch sind, der Definitionsbereich des Integranden also ein offenes Intervall  $]a, b[$  ist. Dann gehen wir wie folgt vor, wobei  $c \in ]a, b[$  beliebig ist:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r_1 \searrow a} \int_{r_1}^c f(x) dx + \lim_{r_2 \nearrow b} \int_c^{r_2} f(x) dx$$

Befindet sich eine kritische Stelle  $d$ , an welcher der Integrand nicht definiert ist, innerhalb der Integrationsgrenzen, teilen wir den Integrationsbereich in zwei Teilstücke auf:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \nearrow d} \int_a^r f(x) dx + \lim_{r \searrow d} \int_r^b f(x) dx$$

Bei mehreren kritischen Stellen zerlegen wir den Integrationsbereich entsprechend mehrfach.

### Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{r \searrow 0} \int_r^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{r \searrow 0} \ln x \Big|_{x=r}^1 \\ &= \lim_{r \searrow 0} (\ln 1 - \ln r) \\ &= \lim_{r \searrow 0} (-\ln r) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Somit existiert dieses uneigentliche Integral nicht.

**Beispiel**

Für  $0 < s < 1$  ist hingegen

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{r \searrow 0} \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_{x=r}^1 \\ &= \frac{1}{1-s} \lim_{r \searrow 0} (1 - r^{1-s}) \\ &= \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

**Unendliche Integrationsgrenzen****► Definition**

Sei  $f: [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf jedem Teilintervall  $[a, b]$  mit  $a < b < \infty$  integrierbar ist. Existiert dann der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

so heißt das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

konvergent und wir definieren

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Analog für den Fall einer Funktion  $f: ] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . ◀

**Erläuterung**

Auch hier ist klar, was zu unternehmen ist, wenn das Integral die Gestalt

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

hat; es muss nur wieder eine Zerlegung an einer Stelle  $c \in \mathbb{R}$  erfolgen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow -\infty} \int_{r_1}^c f(x) dx + \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \int_c^{r_2} f(x) dx \end{aligned}$$

Erst wenn beide Teilintegrale existieren, ist das gesamte Integral definiert. Der Wert des Integrals hängt dann nicht von  $c$  ab. Achten Sie auch darauf, dass Sie

über keine kritischen Stellen leichtfertig „hinwegintegrieren“, wie dies z. B. bei  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$  der Fall wäre.

Oft wird behauptet, dass beispielsweise das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$  sei, weil der Integrand eine ungerade Funktion ist und sich, vom Ursprung gleichermaßen in beide Richtungen ausgehend, positive und negative Integralanteile genau aufheben. Doch Vorsicht: Starten wir nicht genau vom Ursprung oder integrieren wir nicht „gleich schnell“ in positive und negative Richtung, können wir jeden beliebigen Wert erzeugen.

### Beispiel

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \ln x \Big|_{x=1}^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (\ln r - \ln 1) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \ln r \\ &= \infty, \end{aligned}$$

somit existiert dieses uneigentliche Integral nicht.

### Beispiel

Für  $s > 1$  ist

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-s)x^{s-1}} \Big|_{x=1}^r \\ &= \frac{1}{1-s} \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r^{s-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

## Das Integralvergleichskriterium für Reihen

### ■ Satz

**Integralvergleichskriterium.** Sei  $f: [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend. Dann gilt: Das uneigentliche Integral  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  existiert genau dann, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergiert.

**Beweis:** Wir zeigen nur die eine Implikation. Es existiere also  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ . Insbesondere ist dann  $F_n = \int_1^n f(x) dx$  eine konvergente und damit beschränkte Folge, sagen wir mit oberer Schranke  $C \in \mathbb{R}$ . Da  $f$  monoton fallend ist, gilt

für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 1$  und  $x \in [k, k+1]$ :  $f(k+1) \leq f(x)$ . Aufgrund der Monotonie des Integrals haben wir somit

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx$$

und durch Summation:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx + f(1) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \leq F_n + f(1) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \leq C + f(1) \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$  ist also beschränkt und, da die Reihenglieder  $f(k)$  zudem nicht negativ sind, auch monoton steigend. Also ist  $S_n$  und damit die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  konvergent. ■

### Beispiel

Wir sahen, dass

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

gilt. Die entsprechende Reihe ist die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

welche ebenfalls divergiert. Für  $s > 1$  existiert jedoch

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s},$$

und die entsprechende Reihe

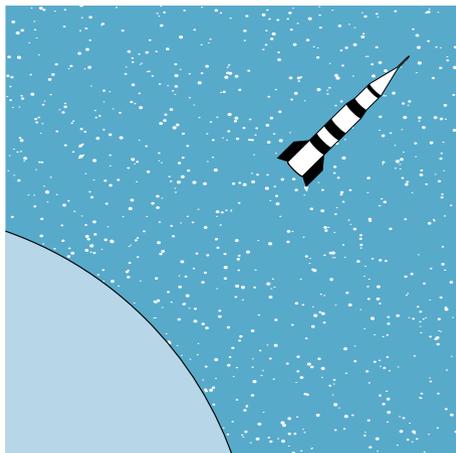
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.

## Ausblick

Die Frage nach der Konvergenz war, wie in vielen Kapitel zuvor, die wesentliche. So konnte der zentrale Begriff der Analysis letztlich auch hier seine Kraft

unter Beweis stellen, was ein schöner Schlussakkord ist. Vor dessen Verklingen wollen wir noch zeigen, wie sich interessante praktische Fragestellungen mit dem uneigentlichen Integral behandeln lassen und betrachten eine Rakete auf der Oberfläche eines Planeten mit dem Radius  $R$ .



Ist es möglich, dass eine solche Rakete mit einer endlichen Menge Treibstoff beliebig weit in das Weltall fliegen kann? Durch eine endliche Menge Treibstoff kann die Rakete über ihre Triebwerke nur eine endliche Arbeit gegen das Gravitationsfeld des Planeten verrichten, was nach einem Scheitern des Planes klingt.

Die durch den Planeten erzeugte Gravitationskraft auf die Rakete nimmt mit steigender Höhe quadratisch ab, da sich das Gravitationsfeld auf eine quadratisch größer werdende Kugeloberfläche verteilt, allerdings wird sie nie gleich null. Die Rakete soll von der Oberfläche des Planeten, also von einem Punkt mit der Entfernung  $R$  zum Planetenmittelpunkt, beliebig weit ins Weltall fliegen. Die auf die Rakete wirkende Kraft auf der Oberfläche des Planeten ist  $mg$ , wobei  $m$  die Masse der Rakete ist und  $g$  die Gravitationskonstante des Planeten. Die Kraft in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der Rakete zum Planetenmittelpunkt ist dann  $mg \frac{R^2}{r^2}$ .

Multiplizieren wir diese Kraft mit dem (infinitesimal kleinen) Weg  $dr$ , so haben wir die Arbeit, welche die Rakete auf diesem winzigen Stück  $dr$  verrichten muss, wenn sie den Planeten verlässt. Die gesamte von der Rakete zu verrichtende

Arbeit erhalten wir mittels folgender Berechnung:

$$\begin{aligned}\int_R^\infty mg \frac{R^2}{r^2} dr &= mgR^2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_R^\rho \frac{1}{r^2} dr \\ &= -mgR^2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \Big|_R^\rho \\ &= -mgR^2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) \\ &= mgR\end{aligned}$$

## Selbsttest

**I.** Sei  $f: [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- (1) Wenn  $f$  monoton fallend ist, dann existiert das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$ .
- (2) Wenn das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$  existiert, konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ .
- (3) Wenn  $f$  monoton fallend ist und das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$  existiert, konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ .
- (4) Wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  konvergiert, existiert das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$ .

**II.** Welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren (und haben einen endlichen Wert)?

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$        | (5) $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$ |
| (2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ | (6) $\int_0^\infty x dx$           |
| (3) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$   | (7) $\int_{-\infty}^\infty x dx$   |
| (4) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ |                                    |

# Aufgaben zur Analysis

**I.** Seien  $(a_n)$  eine beschränkte Folge und  $(b_n)$  eine Nullfolge. Beweisen Sie, dass dann  $(a_n \cdot b_n)$  eine Nullfolge ist.

**II.** Entscheiden Sie, welche dieser Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \frac{3n^2+n}{2n^2-3}$$

$$d_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$b_n = \frac{3n^3+n}{2n^2-3}$$

$$e_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$c_n = \frac{3(-1)^n n^3+n}{2n^2-3}$$

$$f_n = \left(\frac{3+4i}{10}\right)^n$$

**III.** Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Reihen konvergent sind:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+7n-13)}{n^2}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$(6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

**IV.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x}{2x^2-3}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{2x^2-3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x|}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{3x^2+x}{2x^2-3}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln|x|$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

**V.** Sei  $T: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion, die jedem Längengrad (im Bogenmaß) auf dem Erdäquator die aktuelle Temperatur (z. B. in Grad Celsius) zuordnet. Zeigen Sie mithilfe des Nullstellensatzes, dass es zu jedem Zeitpunkt zwei gegenüberliegende Punkte am Äquator geben muss, an denen die

gleiche Temperatur herrscht. (Hinweis: Zwei Punkte  $x, y \in [0, 2\pi]$  liegen genau dann „gegenüber“, wenn  $|x - y| = \pi$  gilt. Untersuchen Sie die Funktion  $\Delta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta(x) := T(x) - T(x + \pi)$ .)

**VI.** Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Funktionen monoton steigend sind.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x, \quad u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + \sin x, \quad v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, v(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

**VII.** Beweisen Sie anhand der Definition der Ableitung die Produktregel zum Ableiten von Funktionen.

**VIII.** Zeigen Sie mithilfe von Produkt- und Kettenregel die Quotientenregel zum Ableiten von Funktionen.

**IX.** Berechnen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  der Tangensfunktion, die wir uns auf das Intervall  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  eingeschränkt vorstellen.

Geben Sie mithilfe der Lagrange'schen Darstellung des Restglieds an, wie groß der Fehler dieser Approximation höchstens werden kann, solange  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$  gilt. Wie groß kann der Fehler werden, wenn  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  gilt?

Hinweis: Verwenden Sie die allgemein bekannten Eigenschaften der Tangensfunktion:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + (\tan x)^2, \quad \tan\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

**X.** Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}.$$

Berechnen Sie  $\lim_{x \searrow 0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von  $f$  an, oder verwenden Sie ein entsprechendes Computerprogramm, um den Graphen zu plotten. (Hinweis: Für alle  $x, y > 0$  gilt  $x^y = e^{y \ln x}$  und  $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,445$ .)

**XI.** Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Integrale:

$$(1) \int_0^\pi x \cdot \cos x \, dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$$

$$(2) \int_0^\pi \sin t \cdot e^{\cos t} \, dt$$

$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-v^2} \, dv$$

**XII.** Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert das uneigentliche Integral

$$f(n) := \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

und es gilt  $f(n) = n!$ . (Hinweis:  $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$  für  $n \geq 1$ ,  $0! = 0$ .  
Verwenden Sie das Beweisverfahren der vollständigen Induktion.)

# Lösungen der Selbsttests

## Kapitel 1:

- I. (2) (3) (5) (6) (8) (9) (10)
- II. (2) (3) (5) (7) (11) (12) (14)

## Kapitel 2:

- I. (2) (4) (5) (9)
- II. (2) (6)

## Kapitel 3:

- I. (2) (3) (4) (8) (10) (11)
- II. (1) (3) (6) (7) (8)

## Kapitel 4:

- I. (1) (6)
- II. (3) (5) (8) (11) (12) (14) (15) (16)

## Kapitel 5:

- I. (1) (4) (6)
- II. (1) (6)

## Kapitel 6:

- I. (1) (6) (7)
- II. (2)
- III. (1) (2) (4) (6) (8)

## Kapitel 7:

- I. (1) (4) (5) (6) (9) (10) (11)
- II. (2) (5) (6) (9) (10) (11) (13)

## Kapitel 8:

- I. Keine der Antworten ist richtig.
- II. (3) (5) (6) (7) (11) (12) (13) (16)

**Kapitel 9:**

- I. (1) (3) (5)
- II. (2) (6) (8) (9) (12) (13) (14)

**Kapitel 10:**

- I. (1)
- II. Alle Antworten sind richtig.

**Kapitel 11:**

- I. (3) (5) (7) (8) (10) (11) (13) (14)

**Kapitel 12:**

- I. (5) (10) (12) (15) (17) (18) (19) (21)
- II. (1)

**Kapitel 13:**

- I. (2) (4) (5) (7) (8) (10) (11) (12) (13) (15) (16) (17) (18) (21)

**Kapitel 14:**

- I. (1) (4) (5) (6)
- II. (3) (4) (6)
- III. (1) (4) (5)

**Kapitel 15:**

- I. (1) (3) (4) (6)
- II. (2) (3) (4) (7)
- III. (1) (2) (3) (5)

**Kapitel 16:**

- I. (1) (2) (3) (4) (5) (7) (9) (11)

**Kapitel 17:**

- I. (1) (3) (6) (7) (9) (11) (14) (15) (16) (17)

**Kapitel 18:**

- I. (1) (2) (4) (6)
- II. (1) (2) (3) (4) (5) (6) (8) (9)

**Kapitel 19:**

- I. (2) (4)
- II. Keine der Antworten ist richtig.
- III. (1) (4)

**Kapitel 20:**

- I. (2) (4) (5) (6) (7)
- II. (3) (6) (8) (10) (11)

**Kapitel 21:**

- I. (2) (3) (5)
- II. (1) (4)

**Kapitel 22:**

- I. (4) (5) (6) (11) (12) (13) (16) (17) (18)

**Kapitel 23:**

- I. (3)
- II. (2) (4)

# Lösungen der Aufgaben

## Grundlagen

I. Tautologie (1) ergibt sich aus der folgenden Wahrheitstafel:

$A$	$B$	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Mit den Abkürzungen  $P := (A \rightarrow (B \rightarrow C))$  und  $Q := ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$  ist die zu zeigende Tautologie (2) äquivalent zu  $P \rightarrow Q$ . Sie ergibt sich aus der folgenden Wahrheitstafel:

$A$	$B$	$C$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

II. Setzt man in die gegebene Formel  $n = 41$  ein, so ist das Resultat eine zusammengesetzte Zahl und daher keine Primzahl:

$$n^2 - n + 41 = 41 \cdot 41 - 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 1681.$$

Es gibt noch beliebig viele weitere Gegenbeispiele,  $n = 41$  ist jedoch die kleinste Zahl, mit welcher die Behauptung widerlegt werden kann.

III. Dass  $n$  durch  $p$  teilbar ist, ist gleichbedeutend damit, dass es eine natürliche Zahl  $k$  gibt, sodass  $n = p \cdot k$  gilt. Für das Quadrat von  $n$  gilt dann:  $n^2 = (p \cdot k)^2 = p \cdot (p \cdot k^2)$ . Folglich ist auch  $n^2$  durch  $p$  teilbar, denn  $n^2$  ist von der Form  $p \cdot K$  mit einer natürlichen Zahl  $K$ .

**IV.** Angenommen, es gäbe eine Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q > 0$ , welche kleiner als alle anderen positiven rationalen Zahlen ist. Sei  $r := \frac{1}{2} \cdot q$ . Dann ist  $r$  ebenfalls rational und positiv, zugleich aber auch kleiner als  $q$ . Das widerspricht der Annahme, dass  $q$  die kleinste solche Zahl sein soll.

**V.** Für  $n = 1$  ist die Formel richtig (Induktionsanfang), denn dann steht auf der linken Seite nur ein Summand,  $1^3 = 1$ , und auf der rechten Seite steht ebenfalls  $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$ . Sei die Behauptung nun für ein  $n$  bereits bewiesen. Dann ergibt sich im Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Das ist aber gerade die Behauptung für  $n+1$ .

**VI.** Für  $n = 0$  ist die Formel richtig, denn  $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$ . Sei die Behauptung nun für ein  $n$  bereits bewiesen. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

## VII.

- (1) Seien  $x, y \in A$  mit  $x \neq y$ . Da  $f$  injektiv ist, gilt  $f(x) \neq f(y)$ . Da  $g$  injektiv ist, gilt  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \neq g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ . Folglich ist  $g \circ f$  injektiv.
- (2) Sei  $z \in C$ . Da  $g$  surjektiv ist, gibt es ein  $y \in B$  mit  $g(y) = z$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$ . Für dieses  $x$  gilt außerdem  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ . Folglich ist  $g \circ f$  surjektiv.
- (3) Es kann die Kontraposition gezeigt werden. Sei also  $f$  nicht injektiv, d. h. es gibt  $x, y \in A$  mit  $x \neq y$  und  $f(x) = f(y)$ . Für diese gilt dann jedoch auch  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ . Folglich ist  $g \circ f$  nicht injektiv.

- (4) Es kann die Kontraposition gezeigt werden. Sei also  $g$  nicht surjektiv, d. h. es gibt ein  $z \in C$ , sodass für kein  $y \in B$  gilt, dass  $g(y) = z$ . Dann kann es aber auch kein  $x \in A$  geben, sodass  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ . Folglich ist  $g \circ f$  nicht surjektiv.

## VIII.

- (1) Seien  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- (a) Es gilt  $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ , also  $x \sim x$ .
  - (b) Es gilt  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \sim x$ .
  - (c) Sei  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , also  $x - y \in \mathbb{Z}$  und  $y - z \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$ , also  $x \sim z$ .
- (2) Seien  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
- (a) Es gilt  $x - x = 0$ . Null ist durch drei teilbar, folglich ist  $x \sim x$ .
  - (b) Wenn  $x - y = 3 \cdot k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ , dann ist  $y - x = 3 \cdot (-k)$ , und umgekehrt. Folglich gilt  $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ .
  - (c) Sei  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , also gibt es  $k, l \in \mathbb{Z}$  mit  $x - y = 3k$  und  $y - z = 3l$ . Dann ist  $x - z = (x - y) + (y - z) = 3k + 3l = 3(k + l)$ , also  $x \sim z$ .

**IX.** Angenommen, es gäbe eine surjektive Abbildung  $f: M \rightarrow P(M)$ . Sei  $U = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$  wie im Hinweis gegeben. Dann gilt  $U \subseteq M$ , also  $U \in P(M)$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es ein  $z \in M$  mit  $f(z) = U$ . Entweder ist  $z$  in  $U$  enthalten oder nicht:

1. Wenn  $z \in U$  ist, gilt nach Konstruktion von  $U$  auch  $z \notin f(z) = U$ . Das ist ein Widerspruch.
2. Wenn  $z \notin U$  ist, gilt nach Konstruktion von  $U$  auch  $z \in f(z) = U$ . Widerspruch.

Folglich ist die ursprüngliche Annahme falsch und die Behauptung damit bewiesen.

**X.** Die gesuchten Rechenoperationen sind wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

**XI.** Einerseits gilt  $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$ . Andererseits kann die linke Seite auch wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y + i^2 \sin x \sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteile müssen übereinstimmen, die Additionstheoreme folgen direkt aus diesem Vergleich.

**XII.** Zunächst kann gezeigt werden, dass  $f(H) \subseteq D$  gilt, also  $|f(z)| < 1$  für alle  $z$  mit  $\operatorname{Im} z > 0$  ist. Für alle  $z \in H$  gilt in der Tat:

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} \\ &= \frac{z\bar{z} - i\bar{z} + iz + 1}{z\bar{z} + i\bar{z} - iz + 1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im} z + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im} z + 1} < 1. \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt zuletzt aus der Tatsache, dass der Nenner größer als Null und größer als der Zähler ist: subtrahiert man den Zähler vom Nenner, so ergibt sich  $4\operatorname{Im} z > 0$ .

Um  $D \subseteq f(H)$  zu zeigen, wird zunächst explizit eine Bildungsvorschrift für die Umkehrfunktion von  $f$  bestimmt:

$$u = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow u(z+i) = z-i \Leftrightarrow (u-1)z = -i(u+1) \Leftrightarrow z = -i \frac{u+1}{u-1} = f^{-1}(u)$$

Es muss gezeigt werden, dass  $\operatorname{Im} f^{-1}(u) > 0$  für alle  $u$  mit  $|u| < 1$  gilt. Für alle  $u \in D$  ergibt sich in der Tat:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f^{-1}(u) &= \operatorname{Im} \left( -i \frac{u+1}{u-1} \right) = \frac{1}{2i} \left( -i \frac{u+1}{u-1} - i \frac{\bar{u}+1}{\bar{u}-1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{(u+1)(\bar{u}-1) + (\bar{u}+1)(u-1)}{(u-1)(\bar{u}-1)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{2u\bar{u} - 2}{u\bar{u} - \bar{u} - u + 1} \right) \\ &= \frac{1 - |u|^2}{|u|^2 - 2\operatorname{Re} u + 1} > 0 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ergibt sich zuletzt daraus, dass Zähler und Nenner positiv sind. Beim Zähler ist das wegen  $|u| < 1$  offensichtlich. Beim Nenner sieht man den Sachverhalt durch Einsetzen von  $u = x + iy$  (wobei  $x, y \in \mathbb{R}$ ):

$$|u|^2 - 2\operatorname{Re} u + 1 = x^2 + y^2 - 2x + 1 = x^2 + (y-1)^2 > 0.$$

## Lineare Algebra

**I.** Seien  $f, g \in C(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\delta(f + g) = (f + g)(0) = f(0) + g(0) = \delta(f) + \delta(g).$$

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\delta(\lambda f) = (\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \delta(f).$$

Folglich ist  $\delta$  linear. Das Bild ist durch ganz  $\mathbb{R}$  gegeben, da bereits z. B. der Teilraum aller konstanten Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  abgebildet wird: Für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt für die konstante Funktion  $f(x) = c$ , dass  $\delta(f) = c$ .

Ein Polynom der Form  $p(x) = ax^2 + bx + c$  ist genau dann im Kern von  $\delta$  enthalten, wenn  $0 = \delta(p) = p(0) = c$ . Also gilt

$$\text{Kern } \delta = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = ax^2 + bx \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Eine mögliche Basis ist z. B. gegeben durch die Polynome  $p_1(x) = x$  und  $p_2(x) = x^2$ . Folglich ist  $\dim \text{Kern } \delta = 2$ . Da die konstanten Funktionen in  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  enthalten sind, gilt wieder  $\dim \text{Bild } \delta = \dim \mathbb{R} = 1$ . Somit ergibt sich wie erwartet  $\dim \text{Kern } \delta + \dim \text{Bild } \delta = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ .

**II.** Es gilt für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}.$$

Wenn  $A$  und  $B$  invertierbar sind, gilt:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_n A^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

Folglich ist  $B^{-1}A^{-1}$  die Inverse von  $AB$ , und  $AB$  ist invertierbar.

**III.** Es gilt, z. B. nach der allgemeinen Formel für die Determinante von  $2 \times 2$ -Matrizen:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \alpha\bar{\alpha} - (-\bar{\beta})\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

Die Rang von  $A$  ist genau dann maximal, wenn  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  gilt. Im Fall  $(\alpha, \beta) = 0$  ist  $A$  die Nullmatrix. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\text{Rang } A = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha, \beta = 0 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da  $B$  keine quadratische Matrix ist, kann eine Determinante von  $B$  nicht berechnet werden.

Im Fall  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  gilt offensichtlich  $\text{Rang } B = 1$ , denn nur eine Spalte ist dann verschieden vom Nullvektor. Im Fall  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  ergibt sich eine Zeilenstufenform von  $B$  durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I-II}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können ablesen, dass der Rang maximal ist, denn die erste Spalte (falls  $\alpha \neq 0$ ) oder die zweite Spalte (falls  $\beta \neq 0$ ) bilden zusammen mit der letzten Spalte eine linear unabhängige Menge. Zusammengefasst gilt also:

$$\text{Rang } B = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha, \beta = 0 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Spalten von  $C$  sind offensichtlich linear abhängig, und der Rang daher nicht maximal. Mithin gilt  $\det C = 0$  für alle Werte von  $\alpha, \beta$ . (Die Determinante kann natürlich auch explizit berechnet werden.) Genau dann, wenn  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  gilt, ist  $C$  die Nullmatrix. Zusammengefasst gilt also:

$$\text{Rang } C = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha, \beta = 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Determinante von  $D$  kann z. B. durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnet werden:

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 0 & -\bar{\beta} & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ -1 & 0 & \bar{\alpha}\beta \end{vmatrix} = -(-\bar{\beta}) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & \bar{\alpha}\beta \end{vmatrix} \\ &= \bar{\beta}(\alpha\bar{\alpha}\beta - (-1) \cdot \beta) = |\beta|^2(1 + |\alpha|^2) \end{aligned}$$

Der Rang von  $D$  ist genau dann maximal, wenn  $\det D \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0$  gilt. Falls  $\beta = 0$  gilt, sieht die Matrix wie folgt aus:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann offensichtlich  $\text{Rang } D = 1$ , denn nur eine Spalte ist verschieden vom Nullvektor. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\text{Rang } D = \begin{cases} 1 & \text{falls } \beta = 0 \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**IV.** Seien  $x_1$  der Preis für den Schläger und  $x_2$  der Preis für den Ball. Der Aufgabentext lässt sich in das folgende lineare Gleichungssystem übersetzen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1,1 \\ x_1 - x_2 &= 1,0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1,1 \\ 1 & -1 & 1,0 \end{array} \right).$$

Das Gleichungssystem kann wie folgt äquivalent umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1,1 \\ 1 & -1 & 1,0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1,1 \\ 0 & -2 & -0,1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{II}/(-2)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1,1 \\ 0 & 1 & 0,05 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1,05 \\ 0 & 1 & 0,05 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis kann abgelesen werden: Der Tennisschläger kostet 1,05 EUR, der Ball kostet 0,05 EUR.

**V.** Gilt sowohl  $\alpha \neq 0$  als auch  $\beta \neq 0$ , so können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II} \cdot \alpha - \text{I} \cdot \beta} \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{I} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) + \text{II} \cdot \beta} \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha(\alpha^2 + \beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{I}/(\alpha(\alpha^2 + \beta^2)), \text{II}/(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \beta} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Falls  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{I}/\beta, \text{II}/(-\beta)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Falls  $\alpha \neq 0, \beta = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right) \xrightarrow{I/\alpha, II/\alpha} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 + \beta^2 \end{array} \right)$$

In allen diesen Fällen ist die eindeutig bestimmte Lösung  $x = (0, 0, \alpha^2 + \beta^2)$ . Im Fall  $\alpha, \beta = 0$  liegt das Gleichungssystem faktisch bereits in normierter Zeilenstufenform vor:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Alle Lösungen sind dann von der Form  $x = (s, t, 0)$  mit beliebigen  $s, t \in \mathbb{R}$ . Zusammengefasst ist der Lösungsraum damit wie folgt gegeben:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & \text{falls } \alpha, \beta = 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \right\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

**VI.** Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$p_A(z) = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ -1 & -z \end{vmatrix} = z^2 + 1.$$

$p$  hat die beiden Nullstellen  $\lambda_{1/2} = \pm i$ . Die Koeffizientenmatrix der entsprechenden Eigenwertgleichungen kann wie folgt auf normierte Zeilenstufenform gebracht werden:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc} \mp i & 1 \\ -1 & \mp i \end{array} \right) & \xrightarrow{II \cdot (\mp i) + I} \left( \begin{array}{cc} \mp i & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{I \cdot (\pm i)} \left( \begin{array}{cc} 1 & \pm i \\ 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Folglich sind die zugehörigen Eigenräume

$$V_{\lambda_{1/2}} = \{(x, y)^T \in \mathbb{C}^2 \mid x = \mp iy\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und eine mögliche Transformationsmatrix ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von  $S^{-1}$  kann mithilfe des Gauß-Algorithmus berechnet werden:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} -i & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II} \cdot i + \text{I}} \left( \begin{array}{cc|cc} -i & i & 1 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{I} \cdot (-2) + \text{II}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2i & 0 & -1 & i \\ 0 & 2i & 1 & i \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\cdot (-\frac{1}{2}i)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

und die Diagonalmatrix ist gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $f(x, y) = (y, -x)$ . Dies entspricht einer Drehung um  $-\frac{\pi}{2}$  (um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn). Jeder von Null verschiedene Vektor ändert unter dieser Abbildung seine Richtung und kann damit nicht parallel zu seinem Bildvektor sein.

**VII.** Seien  $v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Die Linearität von  $f$  folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Eingang:

$$\begin{aligned} f(v+w) &= \langle b_1, v+w \rangle b_1 = (\langle b_1, v \rangle + \langle b_1, w \rangle) b_1 \\ &= \langle b_1, v \rangle b_1 + \langle b_1, w \rangle b_1 = f(v) + f(w) \end{aligned}$$

bzw.

$$f(\lambda v) = \langle b_1, \lambda v \rangle b_1 = \lambda \langle b_1, v \rangle b_1 = \lambda f(v).$$

Die  $i$ -te Spalte der darstellenden Matrix  $f_B$  von  $f$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} f_B \cdot e_i &= (K_B \circ f \circ K_B^{-1})(e_i) = (K_B \circ f)(b_i) \\ &= K_B(\langle b_1, b_i \rangle b_1) = K_B(\delta_{1i} b_1) \\ &= \begin{cases} e_1 & \text{falls } i = 1 \\ 0 & \text{falls } i = 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist  $f_B$  durch die folgende Matrix vom Format  $n \times n$  gegeben:

$$f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**VIII.** Sei  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $L$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\langle v, v \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle.$$

Da  $v$  nicht der Nullvektor ist, muss  $|\lambda| = 1$  gelten.

**IX.**

(1) Der Nullvektor in  $V^*$  ist gegeben durch die Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $v \mapsto 0$ .

Seien  $f, g \in V^*$ . Wir müssen zum einen zeigen, dass  $f + g$  wieder eine lineare Abbildung ist. In der Tat gilt für alle  $v, w \in V$ :

$$\begin{aligned} (f + g)(v + w) &= f(v + w) + g(v + w) \\ &= f(v) + f(w) + g(v) + g(w) \\ &= (f(v) + g(v)) + (f(w) + g(w)) \\ &= (f + g)(v) + (f + g)(w). \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen, dass für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  auch  $\lambda f$  eine lineare Abbildung ist. Tatsächlich gilt für alle  $\mu \in \mathbb{K}$  und  $v \in V$ :

$$(\lambda f)(\mu v) = \lambda f(\mu v) = \lambda \mu f(v) = \mu \lambda f(v) = \mu (\lambda f)(v).$$

(2) (a) Die Kovektoren  $b_i^*$  sind eindeutig bestimmt, wenn  $b_i^*(v)$  für jeden Vektor  $v \in V$  eindeutig festgelegt ist. Stellt man  $v \in V$  als eine Linearkombination der Basisvektoren dar, ergibt sich dies wie folgt:

$$\begin{aligned} b_i^*(v) &= b_i^* \left( \sum_{j=1}^n v_j b_j \right) = \sum_{j=1}^n v_j b_i^*(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j b_i^*(b_j) = \sum_{j=1}^n v_j \delta_{ij} = v_i. \end{aligned}$$

Die  $b_i^*$  bilden einen Vektor also einfach auf seine  $i$ -te Komponente ab.

(b) Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  so, dass  $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^* = 0$ . Dann gilt für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^* = 0 &\Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^* \right) (b_j) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*(b_j) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0. \end{aligned}$$

Folglich sind die  $b_i^*$  linear unabhängig.

- (c) Wir müssen zeigen, dass  $f - \sum_{i=1}^n f(b_i)b_i^* = 0$ . Setzen wir also einen beliebigen Vektor  $v = \sum_{j=1}^n v_j b_j \in V$  in die linke Seite ein:

$$\begin{aligned}
 \left( f - \sum_{i=1}^n f(b_i)b_i^* \right) (v) &= f(v) - \sum_{i=1}^n f(b_i)b_i^*(v) \\
 &= f\left( \sum_{j=1}^n v_j b_j \right) - \sum_{i=1}^n f(b_i)b_i^* \left( \sum_{j=1}^n v_j b_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n v_j f(b_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i f(b_i)b_i^*(b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n v_j f(b_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i f(b_i)\delta_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n v_j f(b_j) - \sum_{i=1}^n v_i f(b_i) = 0.
 \end{aligned}$$

- (3) (a) Seien  $v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Die Linearität von  $u^*$  folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Eingang:

$$u^*(v + w) = \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = u^*(v) + u^*(w)$$

bzw.

$$u^*(\lambda v) = \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \lambda u^*(v).$$

- (b) Seien  $u, v \in V$  so, dass  $T(u) = T(v)$ . Dann gilt also für alle  $x \in V$ , dass

$$\begin{aligned}
 \langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle &\Rightarrow \overline{\langle x, u \rangle} = \overline{\langle x, v \rangle} \\
 &\Rightarrow \langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle \\
 &\Rightarrow \langle x, u \rangle - \langle x, v \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle x, u - v \rangle = 0
 \end{aligned}$$

Die Differenz  $u - v$  steht also senkrecht auf allen Vektoren – das kann aber nur sein, wenn  $u - v$  der Nullvektor ist. Davon kann man sich z. B. überzeugen, indem man für  $x$  die Vektoren einer beliebig gewählten Orthonormalbasis einsetzt. Alternativ kann man die positive Definitheit des Skalarprodukts direkt ausnutzen, indem man beobachtet, dass die Gleichung insbesondere auch für  $x = u - v$  gelten muss:  $\langle u - v, u - v \rangle = 0 \Rightarrow u - v = 0$ .

Jedenfalls folgt  $u - v = 0$ , also  $u = v$ .

## Analysis

**I.** Da  $(a_n)$  beschränkt ist, gibt es ein  $C > 0$  so, dass  $|a_n| < C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei außerdem  $\epsilon > 0$  beliebig. Da  $(b_n)$  eine Nullfolge ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $|b_n| < \tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{C}$  für alle  $n \geq N$ . Darüber hinaus gilt für alle  $n \geq N$ :

$$|b_n| < \tilde{\epsilon} \Rightarrow C|b_n| < C \frac{\epsilon}{C} \Rightarrow |a_n||b_n| < \epsilon \Rightarrow |a_n b_n| < \epsilon.$$

Da  $\epsilon$  beliebig gewählt war, ist  $(a_n \cdot b_n)$  eine Nullfolge.

## II.

$$a_n = \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 3} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(2 - \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$$

$$b_n = \frac{3n^3 + n}{2n^2 - 3} = \frac{n^2 \left(3n + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(2 - \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{3n + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$c_n = \frac{3(-1)^n n^3 + n}{2n^2 - 3} = \frac{3(-1)^n n + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n^2}}; \text{ divergiert nicht bestimmt.}$$

$$d_n = \frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ da Produkt aus beschränkter Folge und Nullfolge.}$$

$$e_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$|f_n| = \left| \left( \frac{3+4i}{10} \right)^n \right| = \frac{|3+4i|^n}{10^n} = \frac{5^n}{10^n} = \left( \frac{1}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ also } f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## III.

(1) Quotientenkriterium. Mit  $c_n = \frac{n}{3^n}$  gilt

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} < 1,$$

folglich konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

(2) Leibniz-Kriterium.  $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  stellt eine alternierende Nullfolge dar. Folglich konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

(3) Notwendiges Kriterium für Konvergenz. Es gilt  $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$ , folglich divergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ .

(4) Majorantenkriterium. Es gilt

$$\left| \frac{\sin(n^{42} + 7n - 13)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert (nach Integralvergleichskriterium), konvergiert folglich auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{42} + 7n - 13)}{n^2}$ .

- (5) Wurzelkriterium. Mit  $c_n = \frac{1}{n^n}$  ergibt sich

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1,$$

folglich konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ .

- (6) Integralvergleichskriterium. Es folgt mithilfe der Substitution  $u = \ln x$ :

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(\beta)} \frac{du}{u^2} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{u} \right|_{u=\ln(2)}^{\ln \beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln \beta} + \frac{1}{\ln(2)} \right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} < \infty. \end{aligned}$$

Folglich konvergiert  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ .

#### IV.

- (1) Der Grenzwert ergibt sich beispielsweise durch Umformung:

$$\frac{3x^2 + x}{2x^2 - 3} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$$

Man kann aber auch mehrfach die Regel von L'Hospital anwenden, um zum Ergebnis zu gelangen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x}{2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 1}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

- (2) In diese stetige Funktion kann einfach  $x = 0$  eingesetzt werden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{2x^2 - 3} = 0.$$

- (3) Der Grenzwert existiert nicht, denn  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  ist eine Nullstelle des Nenners, bei der ein Vorzeichenwechsel stattfindet, während der Zähler beschränkt bleibt:

$$\lim_{x \nearrow \sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{3x^2 + x}{2x^2 - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \searrow \sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{3x^2 + x}{2x^2 - 3} = \infty.$$

- (4) Es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$ , denn für alle Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  ist  $\frac{\sin(x_n^2)}{x_n}$  das Produkt der beschränkten Folge  $a_n := \sin(x_n^2)$  und der Nullfolge  $b_n := \frac{1}{x_n}$ .

Die übrigen Grenzwerte können mit der Regel von L'Hospital berechnet werden:

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x}{1} = 0$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} x^2 = 0$$

**V.** Da  $T$  als stetig vorausgesetzt wird, ist auch  $\Delta$  eine stetige Funktion. Da  $T(0)$  und  $T(2\pi)$  demselben Punkt auf dem Äquator entsprechen, muss  $T(0) = T(2\pi)$  gelten, folglich gilt

$$\Delta(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0) = -(T(0) - T(\pi)) = -\Delta(0).$$

Somit sind  $\Delta(0)$  und  $\Delta(\pi)$  beide gleich Null, oder die Werte haben verschiedene Vorzeichen:

- (1) Gilt  $\Delta(0) = \Delta(\pi) = 0$ , so folgt daraus  $T(\pi) - T(2\pi) = 0 \Rightarrow T(\pi) = T(2\pi)$ , sodass  $x = \pi$  und  $y = 2\pi$  die gesuchten Punkte mit gleicher Temperatur sind.
- (2) Gilt  $\Delta(0) > \Delta(\pi)$  oder  $\Delta(0) < \Delta(\pi)$ , so muss es nach dem Nullstellensatz einen Punkt  $\beta \in [0, \pi]$  mit  $0 = \Delta(\beta) = T(\beta) - T(\beta + \pi) \Rightarrow T(\beta) = T(\beta + \pi)$  geben. Damit sind  $x = \beta$  und  $y = \beta + \pi$  die gesuchten Punkte mit gleicher Temperatur.

**VI.** Die Funktion  $f$  ist differenzierbar und auf einem Intervall definiert, und es gilt  $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$ . Die Ableitung von  $f$  wechselt das Vorzeichen, z. B. gilt  $f'(0) = \frac{3}{2} > 0$  und  $f'(\pi) = -\frac{1}{2} < 0$ . Daher kann  $f$  nicht monoton steigend sein.

Für  $g$  gilt hingegen  $g'(x) = 1 + \cos x \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Daher ist  $g$  monoton steigend.

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann ist es nicht möglich, dass  $a > 0$  und  $b \leq 0$ , sodass nur noch die folgenden Fälle verbleiben:

$$u(b) - u(a) = \begin{cases} b - a & \text{falls } a > 0, b > 0 \\ b & \text{falls } a \leq 0, b > 0 \\ 0 & \text{falls } a \leq 0, b \leq 0 \end{cases} \geq 0.$$

Folglich ist  $u$  monoton steigend.

Die Funktion  $v$  ist nicht monoton steigend, wie man z. B. an  $v\left(\frac{1}{2}\right) - v\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$  sieht.

**VII.** Seien  $f, g$  differenzierbare Funktionen und  $x$  ein Punkt im gemeinsamen Definitionsbereich. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) + g'(x)f(x) &= g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \\ &\quad f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right) \cdot \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= (f \cdot g)'(x). \end{aligned}$$

**VIII.** Seien  $f, g$  differenzierbare Funktionen und  $k(y) = \frac{1}{y}$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y \neq 0$ . Dann ergibt sich aus Produkt- und Kettenregel sowie  $k'(y) = -\frac{1}{y^2}$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= (f \cdot (k \circ g))' = f' \cdot (k \circ g) + (k \circ g)' \cdot f \\ &= f' \cdot \frac{1}{g} + (k' \circ g) \cdot g' \cdot f = \frac{f'}{g} - \frac{1}{g^2} \cdot g' \cdot f = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \end{aligned}$$

**IX.** Die ersten vier Ableitungen der Tangensfunktion ergeben sich (über die

Kettenregel) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \tan' &= 1 + \tan^2 \\
 \tan'' &= 2 \tan' \tan \\
 &= 2(1 + \tan^2) \tan \\
 &= 2 \tan + 2 \tan^3 \\
 \tan''' &= 2 \tan' + 6 \tan' \tan^2 \\
 &= 2(1 + \tan^2) + 6(1 + \tan^2) \tan^2 \\
 &= 2 + 8 \tan^2 + 6 \tan^4 \\
 \tan^{(4)} &= 16 \tan' \tan + 24 \tan' \tan^3 \\
 &= 16(1 + \tan^2) \tan + 24(1 + \tan^2) \tan^3 \\
 &= 16 \tan + 40 \tan^3 + 24 \tan^5.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich  $\tan(0) = 0$ ,  $\tan'(0) = 1$ ,  $\tan''(0) = 0$ ,  $\tan'''(0) = 2$ , und damit das gesuchte Taylor-Polynom:

$$T_{3,0}(\tan)(x) = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2}x^2 + \frac{\tan'''(0)}{6}x^3 = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Die Tangensfunktion ist (streng) monoton steigend, denn

$$\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2 > 0$$

für alle  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$  nimmt sie ihre Extrema also an den Rändern an und wird damit vom Betrage her dort nicht größer als  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Damit ergibt sich eine Abschätzung für das Restglied in diesem Intervall:

$$\begin{aligned}
 |R_3(x)| &= \left| \frac{\tan^{(4)}(\xi)}{24} x^4 \right| = \frac{|16 \tan \xi + 40 \tan^3 \xi + 24 \tan^5 \xi|}{24} \cdot x^4 \\
 &\leq \frac{16 \frac{\sqrt{3}}{3} + 40 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 24 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5}{24} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{16 + 40 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 24 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4}{24} \cdot \frac{\pi^4}{1296} \\
 &= \frac{\sqrt{3}\pi^4}{93312} \cdot \left(16 + 40 \cdot \frac{1}{3} + 24 \cdot \frac{1}{9}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}\pi^4}{2916}.
 \end{aligned}$$

(Das ergibt numerisch eine obere Schranke von 0,058.)

Das Taylor-Polynom bleibt auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  beschränkt, die Tangensfunktion divergiert an den Rändern  $x = \pm\frac{\pi}{2}$  des Intervalls jedoch. Damit

ergibt sich:  $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} |R_3(x)| = \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} |\tan x - T_{3,0}(\tan)(x)| = \infty$ . Das Restglied kann, auf dem gesamten Definitionsbereich betrachtet, also beliebig groß werden.

**X.** Die Definitionsmenge von  $f$  ist ein offenes Intervall und enthält dementsprechend nur innere Punkte. Folglich sind die Extrema unter den Stellen zu suchen, an denen die erste Ableitung verschwindet. Diese kann mit dem Hinweis sowie Ketten- und Produktregel berechnet werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left( x^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( e^{\frac{1}{x} \ln x} \right) \\ &= e^{\frac{1}{x} \ln x} \left( -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x). \end{aligned}$$

Die Ableitung ist nur null an der Stelle  $x_0 = e$ . Für die zweite Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x) \right) \\ &= -\frac{2}{x^3} x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x) + \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x) \right) \\ &= -\frac{2}{x^3} x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x) + \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} (1 - \ln x)(1 - \ln x) - \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x} \right) \\ &= x^{\frac{1}{x}} \left( -\frac{2}{x^3} (1 - \ln x) + \frac{1}{x^4} (1 - \ln x)^2 - \frac{1}{x^3} \right). \end{aligned}$$

Somit gilt  $f''(x_0) = f''(e) = -\frac{e^{-\frac{1}{e}}}{e^3} < 0$ , sodass bei  $x_0 = e$  ein lokales Maximum vorliegt.

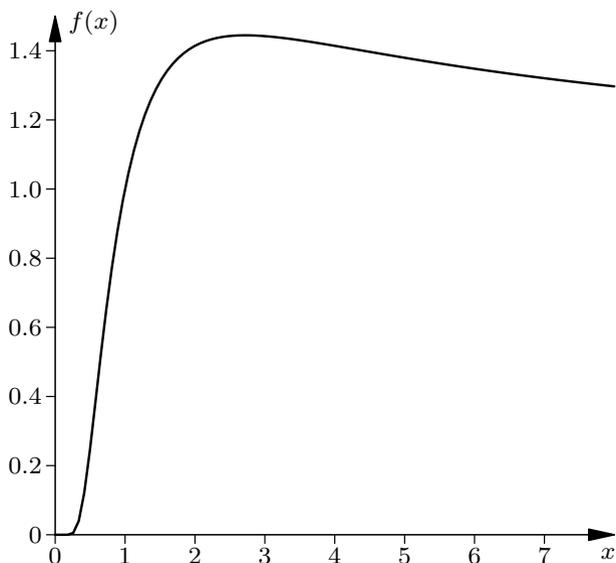
Nach bekannter Asymptotik der Logarithmusfunktion sowie nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

und deshalb

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = 1.$$

Da  $f(x_0) \approx 1,445 > 1 > 0$  gilt, ist an der Stelle  $x_0 = e$  sogar ein globales Maximum. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ :



## XI.

(1) Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx &= x \sin x \Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= (\pi \sin \pi - 0 \cdot \sin 0) - (-\cos x) \Big|_{x=0}^{\pi} \\ &= \cos \pi - \cos 0 = -2. \end{aligned}$$

(2) Substitution von  $z = \cos t \Rightarrow dz = -\sin t \, dt$ :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{\cos t} \, dt = - \int_1^{-1} e^z \, dz = \int_{-1}^1 e^z \, dz = e^z \Big|_{z=-1}^1 = e - e^{-1}.$$

(3) Substitution von  $z = 1 - u^2 \Rightarrow dz = -2u \, du$ :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \, du = - \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{z}} \, dz = \sqrt{z} \Big|_{z=\frac{1}{4}}^1 = \sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

(4) Der Ansatz der Partialbruchzerlegung führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-v^2} &= \frac{1}{(1-v)(1+v)} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v} \\ &= \frac{A(1+v) + B(1-v)}{1-v^2} = \frac{(A-B)v + A+B}{1-v^2} \\ &\Leftrightarrow A-B=0, A+B=1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daher berechnet sich das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-v^2} dv &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2(1-v)} + \frac{1}{2(1+v)} \right) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{v-1} + \frac{1}{v+1} \right) dv \\
 &= \frac{1}{2} (-\ln|v-1| + \ln|v+1|) \Big|_{v=0}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| \Big|_{v=0}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}.
 \end{aligned}$$

**XII.** Für den Induktionsanfang  $n = 0$  existiert das Integral und ergibt den gewünschten Wert:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_{t=0}^\beta \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} (-e^{-\beta} - (-e^0)) \\
 &= 1 = 0!.
 \end{aligned}$$

Sei bereits gezeigt, dass das Integral für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$  existiert und den Wert  $f(n) = n!$  hat. Dann ergibt sich im Induktionsschritt mithilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 f(n+1) &= \int_0^\infty t^{n+1} e^{-t} dt \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -t^{n+1} e^{-t} \Big|_{t=0}^\beta + \int_0^\beta (n+1)t^n e^{-t} dt \right) \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\beta^{n+1} e^{-\beta} + (n+1) \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta t^n e^{-t} dt \\
 &= 0 + (n+1)f(n) \\
 &= (n+1)n! = (n+1)!.
 \end{aligned}$$

# Literatur und Ausklang

Wohl kein neues Buch zu den hier behandelten Themen kann und sollte vom mathematischen Inhalt her etwas Neues bieten: Es handelt sich in großen Teilen um Folklore. Definitionen sollten nicht neu erfunden werden (sofern die alten allgemein akzeptiert sind) und es gibt Beweise, die können nicht mit gutem Gewissen verändert werden. Aufgabe der Autoren ist es, das Ganze geschickt zu präsentieren, gegebenenfalls neu zu beleuchten und allem einen eigenen Stil zu geben; das haben wir nach Kräften getan. Wir lernten dabei von anderen Autoren, von den Dozenten unserer eigenen Vorlesungen, von Diskussionen mit anderen Studierenden unserer jeweiligen Studienzeit und aus den vielen Gesprächen über die Inhalte des Buches, die wir (Matthias und Mike) teils kämpferisch führten.

Einige der Bücher unten sind Standardwerke, aus anderen lernten wir selbst, andere sollten Sie vielleicht gesehen haben. Wir wollen Ihnen beim weiteren bzw. parallelen Studium Bemerkungen auf den Weg geben (die wirklich nicht vollständig sind, aber etwas Orientierung liefern):

- **M. Barner, F. Flohr, Analysis 1** (de Gruyter, 2000).  
Ein klassisches Werk mit viel Inhalt, das besonders für Mathematiker empfehlenswert ist. Es enthält einige Konzepte und interessante Beispiele, die man nicht in jedem Analysis-Kurs kennenlernt. Es gehört zu Matthias' liebster Buchreihe über Analysis.
- **A. Beutelspacher, Lineare Algebra** (Vieweg+Teubner, 2006).  
Ein Buch, das Matthias besonders mag und welches einen verbindlichen und freundlichen Stil hat.
- **„Der Bronstein“**.  
Sagen Sie nichts. Uns ist klar, dass sich dies nicht wirklich als vollständige Literaturempfehlung verwenden lässt. Aber begeben Sie sich bitte selbst auf die Suche. Das Buch gab es über die Jahre von vielen Verlagen, in vielen Sprachen und abenteuerlichen Papierqualitäten. Aber der Ingenieur muss es haben, alle anderen sollten. Jeder Mitarbeiter einer wissenschaftlichen Buchhandlung müsste es aus dem Ärmel ziehen können. Leider ist im Jargon der Nutzer dieses Buches der Name des zweiten Autors verloren gegangen: K. A. Semendjajew.
- **R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1** (Springer, 1969).

Ein Klassiker. Es halten sich Gerüchte, nach denen dieses Buch zu großen Teilen von Studenten geschrieben wurde. Wie auch immer, der auf dem Titel genannte Mathematiker ist einer der großen seines Faches gewesen, dem die Mathematik und Physik viel zu verdanken haben. Es liest sich eher wie ein Roman als wie ein Lehrbuch. Ein Favorit von Mike.

- **G. Fischer, Lineare Algebra** (Vieweg+Teubner, 2005).  
Ein absolutes Standardwerk. Nüchtern, wie Mathematik nun einmal sein kann. Aber lehrreich!
- **O. Forster, Analysis 1** (Vieweg+Teubner, 2006).  
Ein absolutes Standardwerk. Nüchtern, wie Mathematik nun einmal sein kann. Aber lehrreich, wenn es auch teils an eine Definition-Satz-Beweis-Sammlung erinnert, dem Buch von Fischer nicht ganz unähnlich.
- **H. Heuser, Lehrbuch der Analysis 1** (Vieweg+Teubner, 2006).  
Mike findet es wunderbar! Ein wenig die moderne Variante des Courant. Mit vielen Anwendungsbeispielen.
- **K. Jänich, Lineare Algebra** (Springer, 2002).  
Ein Buch mit Teilen für Mathematiker und Physiker, das teils pfiffige Erklärungen bietet.
- **F. Reinhardt, H. Soeder, dtv-Atlas Mathematik, Bd. 1 & 2** (dtv-Verlag, 1998).  
Matthias blättert gerne einmal auch in diesem Buch. Es ist nicht immer auf dem neuesten Stand, was z. B. Bezeichnungen angeht. Allerdings ist es ein kleines Rätsel, wie so viel wichtige Mathematik hübsch präsentiert in zwei so kleine Bände passt.
- **R. Wüst, Mathematik für Physiker und Mathematiker, Bd. 1** (Wiley-VCH, 2003).  
Ein schönes Buch eines Kollegen, das viel Wert auf Vollständigkeit legt und mit sicherer Hand geschrieben wurde.

Nun möchte einer der Autoren – der andere, M. P., kann die Lobgesänge nicht mehr hören – die „Grundzüge der Analysis“ von J. A. Dieudonné den Experten ans Herz legen, die sich durch dieses Buch gekämpft haben. Einige bezeichnen dieses (leider in Deutsch aktuell nicht mehr im Druck befindliche) Werk als unlesbar und „extrapur“. Wer sich allerdings auf das (entspannte neun Bände umfassende) Werk eingelassen hat, der kann nicht nur diverse Prüfer verängstigen, sondern lernt auch Dinge über Mathematik (es geht primär um die Analysis im weitesten Sinne), die nach Monaten der Entsagung plötzlich in helles Leuchten übergehen.

Eine weitere Empfehlung ist das Buch „Raum-Zeit-Materie“ von H. Weyl. Dieser geniale Mathematiker verstand es nicht nur in diesem Buch, schwierige Themen in faszinierendem Stil zu präsentieren. Das genannte Buch, nach den Wirren des 1. Weltkrieges entstanden, klingt nicht nach der Thematik dieses Buches (es ist tatsächlich eines über die Relativitätstheorie). Dennoch hält es eine Überraschung parat: In ihm findet sich erstmals eine Darstellung wesentlicher Teile der linearen Algebra, wie sie heute noch gelehrt wird. Schön hier zu sehen, welche wunderbaren Grundlagen wir hier im Buch lernten; sie führen weit.

M. P. möchte schließlich noch auf das Buch „Fraktale Geometrie“ von K. T. Falconer aufmerksam machen, in welchem man Näheres zu so „monströsen“ Gebilden wie der Weierstraß-Funktion und der Mandelbrot-Menge finden kann.

# Index

- $\pm\infty$ , 199
- $\sqrt{2}$ , 24
- Abbildung, 33
  - bijektive, 35
  - identische, 84
  - injektive, 35
  - lineare, 75
  - orthogonale, 153
  - surjektive, 35
  - Umkehr-, 37
- Abel'sch, 43, 57
- Ableitung, 205
  - der Umkehrfunktion, 210
  - höhere, 222
  - Kettenregel, 209
  - Produktregel, 209
  - Quotientenregel, 209
- Abstand, 142
- Approximation
  - durch Taylor-Polynom, 224
- Aussage, 3
- Axiom, 21
- Basis, 68
- Basisdarstellung, 70
- Basiswechsel, 126
- Beschleunigung, 222
- Betrag
  - einer komplexen Zahl, 45
- Beweis, 21
  - direkter, 23
  - durch vollständige Induktion, 28
  - indirekter, 23
  - konstruktiver, 25
  - nichtkonstruktiver, 25
- Bijektivität, 35
- Bild
  - einer linearen Abbildung, 77
  - einer Matrix, 108
- Bildmenge, 34
- Binomialkoeffizient, 173
- Blockdiagonalform, 138
- $C^0([0, 1])$ , 149
- $C^0(\mathbb{R})$ ,  $C^1(\mathbb{R})$ , 78
- $\mathbb{C}$ , 12
- Cauchy-Folge, 180
- charakteristisches Polynom, 116
- $\delta_{ij}$ , 149
- Definitionsbereich, 33
- Determinante, 103
  - einer  $2 \times 2$ -Matrix, 107
  - Multiplikationssatz, 110
  - Rechenregeln, 110
- Diagonalisierung, 133
- Diagramm
  - kommutatives, 128
  - Venn-, 15
- Differenzialgleichungen, 217
- Differenzierbarkeit, 205
- Dimension, 68
- Dimensionsatz
  - für lineare Abbildungen, 79
  - für Untervektorräume, 80
- Dirichlet-Funktion, 189
- Divergenz
  - bestimmte, 199
  - von Folgen, 171
- Drehmatrix, 154
- Dreiecksungleichung, 142

- $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium, 191
- $\epsilon$ -Umgebung, 169, 177
- Eigenraum, 115
- Eigenvektor, 113
- Eigenwert, 113
- Eigenwertgleichung, 113
- Einheitsmatrix, 84
- elementare Zeilenoperationen, 95
- Entwicklungspunkt, 224
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 94
- Erzeugendensystem, 67
- Euler'sche Identität, 256
- Euler'sche Winkel, 156
- Euler-Formel, 48, 256
- Exponentialfunktion, 248
  
- Fakultät, 173
- fast alle, 169
- Fibonacci-Folge, 168
- Folge, 168
  - beschränkte, 174
  - monotone, 176
  - Null-, 170
- Fourier-Reihe, 231
- Fundamentalsatz der Algebra, 135
- Funktion
  - analytische, 255
  - differenzierbare, 205
  - integrierbare, 266
  - monotone, 214
  - stetige, 190
  
- Gauß'sche Zahlenebene, 46
- Gauß-Algorithmus, 95
- Gegenbeispiel, 28
- genau dann, wenn, 4
- geometrische Reihe, 236
- geometrische Summe, 235
- Geschwindigkeit, 222
- Gödel, Kurt, 17
- Gram-Schmidt-Verfahren, 151
- Grenzwert
  - links- und rechtsseitiger, 188
  - von Folgen, 168
    - Rechenregeln, 171
  - von Funktionen, 185
    - Rechenregeln, 187
- griechisches Alphabet, 17
- Gruppe, 43, 57
  
- Häufungspunkt
  - oberer und unterer, 198
- Häufungspunktprinzip, 177
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung., 268
- Hauptvektoren, 120
- Hauptvektorgleichung, 120
- hinreichend, 4
  
- Identität, 84
- Imaginärteil, 45
- Induktionsanfang, 29
- Induktionsschritt, 29
- Infimum, 200
- Injektivität, 35
- innerer Punkt, 229
- Integral
  - bestimmtes, 262
  - unbestimmtes, 267
  - uneigentliches, 281
- Integralvergleichskriterium, 285
- Integrand, 262
- Integration
  - partielle, 271
- Integrationsbereich, 262
- Integrationsgrenzen, 262
- Integrierbarkeit, 266
- Inverse
  - einer Abbildung, 37
  - einer Matrix, 90
- irrationale Zahl, 14
  
- Jordan'sche Normalform, 122, 138
- Junktork, 4
- Junktoren, 3
  
- $\mathbb{K}^n$ , 61

- Kalkül, 6
- kartesisches Produkt, 16
- Kern
  - einer linearen Abbildung, 77
  - einer Matrix, 108
- Kettenregel, 209
- Komplement, 14
- Komposition, 37
  - stetiger Funktionen, 190
- Konjugierte
  - einer komplexen Zahl, 45
- Konstanzkriterium, 215
- Kontraosition, 5
- Konvergenz
  - absolute, 238
  - von Folgen, 168
  - von Funktionen, 185
- Koordinatenabbildung, 125
- Korollar, 21
- Körper, 41
  - der komplexen Zahlen, 44
  - der rationalen Zahlen, 43
  - der reellen Zahlen, 43
- Körperaxiome, 41
- Kronecker-Delta, 149
  
- L'Hospital
  - Regel von, 216
- Laplace'scher Entwicklungssatz, 103
- Leibniz-Formel, 104
- Leibniz-Kriterium, 242
- Lemma, 21
- Limes superior und inferior, 198
- lineare Abhängigkeit, 67
- lineare Hülle, 66
- lineare Unabhängigkeit, 68
- lineares Gleichungssystem, 93
- Linearkombination, 65
- Lipschitz-Stetigkeit, 194
- Logarithmus
  - natürlicher, 248
- Logik, 4
  
- Lösungsraum
  - eines hom. lin. Gleichungssystems, 96
  
- Majorantenkriterium, 239
- Mandelbrot-Menge, 175
- Matrix, 83
  - adjungierte, 90
  - darstellende, 85
  - Diagonal-, 90
  - diagonalisierbare, 133
  - hermitesche, 90
  - invertierbare, 90
  - quadratische, 90
  - selbstadjungierte, 90
  - symmetrische, 90
  - transponierte, 90
- Matrizenprodukt, 87
  - Rechenregeln, 88
- Maximum, 200
  - differenzierbarer Funktionen, 229
  - stetiger Funktionen, 201
- Maximumsnorm, 143
- Menge, 10
  - leere, 10
- Mengen
  - disjunkte, 14
  - Komplement von, 14
  - Schnitt von, 14
  - Vereinigung von, 14
- Minimum, 200
  - differenzierbarer Funktionen, 229
  - stetiger Funktionen, 201
- Minorantenkriterium, 239
- Mittelwertsatz
  - der Differenzialrechnung, 212
- Mittelwertsatz der Integralrechnung, 266
- Monotonie
  - bei Folgen, 176
  - bei Funktionen, 214
  - stückweise, 266
- Monotoniekriterium

- für diff.-bare Funktionen, 215
- für Folgen, 177
- $\mathbb{N}$ , 12
- Norm, 141
  - induzierte, 147
- normierte Zeilenstufenform, 95
- notwendig, 4
- Nullfolge, 170
- Nullraum, 77
- Nullstellensatz, 198
- o. B. d. A., 145
- Obersumme, 261
- orthogonale Projektion, 151
- Orthogonalität
  - bei linearen Abbildungen, 153
  - bei Matrizen, 154
  - bei Vektoren, 147
- Orthonormalbasis, 149, 150
- Orthonormalisierung, 151
- paarweise verschieden, 136
- parallel, 68
- Partialbruchzerlegung, 273
- partielle Integration, 271
- Polardarstellung, 257
- Polarkoordinatendarstellung, 47
- Polynomdivision, 273
- Positive Definitheit
  - einer Norm, 141
  - eines Skalarprodukts, 144
- Potenz
  - allgemeine, 248
- Potenzmenge, 11
- Potenzreihe, 247
- Prädikat, 7
- Primzahl, 24
- Produktregel, 209
- $\mathbb{Q}$ , 12
- Quantor, 9
- Quaternionen, 18, 49
- Quotientenkriterium, 240
- Quotientenregel, 209
- $\mathbb{R}$ , 12
- $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ , 70
- Rang, 87
- RangsatZ, 98
- Raum, 18
- Realteil, 45
- Rechenregeln
  - für Ableitungen, 208
  - für das Matrizenprodukt, 88
  - für Determinanten, 110
  - für Grenzwerte von Folgen, 171
  - für Grenzwerte von Funktionen, 187
  - für Integrale, 266
- Reihe, 233
  - alternierende harmonische, 243
  - harmonische, 234
  - Potenz-, 247
  - Taylor-, 253
- Restglied, 224
  - Lagrange'sche Darstellung, 224
- Riemann'sche Summe, 260
- Riemann'sche Zetafunktion, 235
- Ringschluss, 26
- Sarrus
  - Regel von, 107
- Satz des Pythagoras, 24
- Satz von Bolzano-Weierstraß, 178
- Schlussregel, 6
- Schnitt, 14
- Schrankensatz, 213
- Sekante, 207
- Skalar, 55
- Skalarprodukt, 144
  - stetiger Funktionen, 149
- Spann, 66
- Sprungstelle, 189
- Stammfunktion, 267
- Standardbasis von  $\mathbb{K}^n$ , 69

- Standardnorm  
   von  $\mathbb{R}^n$ , 142  
 Standardskalarprodukt  
   von  $\mathbb{C}^n$ , 146  
   von  $\mathbb{R}^n$ , 145  
 stetig differenzierbar, 78  
 Stetigkeit, 190  
   gleichmäßige, 191  
   punktweise, 191  
   stückweise, 266  
 Streichungsmatrix, 103  
 Summe  
   von Untervektorräumen, 79  
 Summenzeichen, 65  
 Supremum, 200  
 Surjektivität, 35  
  
 Tangente, 207  
 Tautologie, 5  
 Taylor-Polynom, 224  
 Taylor-Reihe, 253  
 Teilfolge, 178  
 Teilmenge, 11  
   echte, 11  
 Teilraum, 71  
 Transformationsmatrix, 127  
 Treppenfunktion, 262  
 trigonometrische Darstellung, 47  
 trigonometrisches Polynom, 231  
 Tupel, 16  
   leeres, 16, 62  
  
 Umkehrabbildung, 37  
   einer differenzierbaren Funktion,  
     210  
   einer stetigen Funktion, 191  
 Ungleichung  
   von Cauchy-Schwarz, 146  
 Untersumme, 261  
 Untervektorraum, 71  
 Urbildmenge, 34  
  
 Vektor, 56  
  
 Vektorraum, 56  
   der Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , 62  
   der Matrizen, 84  
   der Polynome, 70  
   der Spalten- und Zeilenvektoren,  
     61  
   der stetig differenzierbaren Funk-  
     tionen, 78  
   der stetigen Funktionen, 78  
   euklidischer, 144  
   normierter, 142  
   unitärer, 144  
 Vektorraumaxiome, 56  
 Venn-Diagramm, 15  
 Vereinigung, 14  
 Vielfachheit  
   algebraische, 118  
   geometrische, 118  
 vollständige Induktion, 28  
  
 Wahrheitstafel, 4  
 Wahrheitswert, 3  
 Weierstraß-Funktion, 241  
 Wertebereich, 33  
 Winkel, 147  
 wohldefiniert, 22  
 Wurzelkriterium, 240  
  
 $\mathbb{Z}$ , 12  
 Zahlen, 12  
   komplexe, 44  
   natürliche, 8, 12  
   reelle, 12  
 Zerlegung, 260  
 Zwischenwertsatz, 198



# Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt  
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:  
aktuell \*\*\* kostenlos \*\*\* passgenau \*\*\* flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/die über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Information zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: [springer.com/alert](http://springer.com/alert)