

Springer Studium Mathematik – Bachelor

LEHRBUCH

Martin Aigner

# Graphentheorie

Eine Einführung aus dem 4-Farben Problem

*2. Auflage*



Springer Spektrum

---

# Springer Studium Mathematik – Bachelor

## Herausgegeben von

Martin Aigner, Freie Universität Berlin

Heike Faßbender, Technische Universität Braunschweig

Barbara Gentz, Universität Bielefeld

Daniel Grieser, Universität Oldenburg

Peter Gritzmann, Technische Universität München

Jürg Kramer, Humboldt Universität zu Berlin

Volker Mehrmann, Technische Universität Berlin

Gisbert Wüstholtz, ETH Zürich

Die Reihe „Springer Studium Mathematik“ richtet sich an Studierende aller mathematischen Studiengänge und an Studierende, die sich mit Mathematik in Verbindung mit einem anderen Studienfach intensiv beschäftigen, wie auch an Personen, die in der Anwendung oder der Vermittlung von Mathematik tätig sind. Sie bietet Studierenden während des gesamten Studiums einen schnellen Zugang zu den wichtigsten mathematischen Teilgebieten entsprechend den gängigen Modulen. Die Reihe vermittelt neben einer soliden Grundausbildung in Mathematik auch fachübergreifende Kompetenzen. Insbesondere im Bachelorstudium möchte die Reihe die Studierenden für die Prinzipien und Arbeitsweisen der Mathematik begeistern. Die Lehr- und Übungsbücher unterstützen bei der Klausurvorbereitung und enthalten neben vielen Beispielen und Übungsaufgaben auch Grundlagen und Hilfen, die beim Übergang von der Schule zur Hochschule am Anfang des Studiums benötigt werden. Weiter begleitet die Reihe die Studierenden im fortgeschrittenen Bachelorstudium und zu Beginn des Masterstudiums bei der Vertiefung und Spezialisierung in einzelnen mathematischen Gebieten mit den passenden Lehrbüchern. Für den Master in Mathematik stellt die Reihe zur fachlichen Expertise Bände zu weiterführenden Themen mit forschungsnahen Einblicken in die moderne Mathematik zur Verfügung. Die Bücher können dem Angebot der Hochschulen entsprechend auch in englischer Sprache abgefasst sein.

---

Martin Aigner

# Graphentheorie

Eine Einführung aus dem  
4-Farben Problem

2., überarbeitete Auflage

 Springer Spektrum

Martin Aigner  
Institut für Mathematik  
Freie Universität Berlin  
Berlin, Deutschland

ISSN 2364-2378                      ISSN 2364-2386 (electronic)  
Springer Studium Mathematik – Bachelor  
ISBN 978-3-658-10322-4                      ISBN 978-3-658-10323-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-658-10323-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

1. Auflage 1984: B.G.Teubner, Stuttgart

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
([www.springer.com](http://www.springer.com))

## Vorwort zur ersten Auflage

In den letzten Jahren wurde ich immer häufiger von Studenten gefragt, warum sich ein mathematisches Gebiet gerade in dieser (meist in der Vorlesung vorgestellten) Weise entwickelt hat und nicht anders, was die hauptsächlichen Triebfedern waren, und wie es weitergeht. Insbesondere interessierte, neben anderen Faktoren wie Anwendbarkeit oder Querverbindungen zu anderen Gebieten, die Rolle, welche die großen klassischen Probleme bei der Entwicklung einer Theorie spielten.

Die kürzlich erfolgte ungewöhnliche Lösung des 4-Farben Problems war mir ein willkommener Anlass, den genauen Einfluss zu studieren, den dieses universell bekannte Problem vornehmlich auf die Graphentheorie hatte. Vielleicht schärfer als anderswo scheiden sich am 4-Farben Problem die Geister. Die einen sagen, die Mathematik, die das 4-Farben Problem hervorgebracht hat, ist eine Marginalie und die Lösung mit ihrem enormen Computer Einsatz ist vom ästhetischen Standpunkt aus geradezu abschreckend. Die anderen wiederum meinen, dass das 4-Farben Problem fast im Alleingang eine ganze Disziplin hat entstehen lassen, eben die Graphentheorie, wie es in diesem Umfang höchst selten vorkommt, und dass die Lösung mit ihren vielfältigen Aspekten inner- und außermathematischer Art weit in die Zukunft weist. Die Arbeit an diesem Buch hat mich überzeugt, dass die zweite Auffassung eher zutrifft – und es ist meine Hoffnung, dass mir in der Darstellung hinreichende Argumente dafür gelungen sind.

Das vorliegende Buch will zweierlei sein: Erstens eine Einführung in die Graphentheorie, welche nahezu alle wichtigen Begriffsbildungen und Resultate enthält, und zweitens eine Darstellung der Rolle, die das 4-Farben Problem in der Entwicklung der Graphentheorie spielte. Um dies zu bewerkstelligen, wurde das Buch in drei Teile gegliedert: Teil I (Introduktion), Teil II (Thema) und Teil III (Finale).

Teil I schildert den Ursprung des 4-Farben Problems, die frühen Versuche und die ersten theoretischen Ansätze, die zur Lösung entwickelt wurden. Großer Wert wird auf die Darstellung der Schwierigkeiten gelegt, die die Forscher der Frühzeit hatten, und der Sackgassen, in die sie gerieten. Dies geschah nicht so sehr, um die historische Neugier zu befriedigen, sondern um den Lesern anhand dieser Schwierigkeiten auch Wege aufzuzeigen, wie man in der eigenen mathematischen Arbeit vorankommt. Teil II ist das Kernstück des Buches. Ausgehend von den theoretischen Ansätzen der frühen Periode werden fünf wesentliche Kapitel der Graphentheorie entwickelt, die in ihrer Gesamtheit die erwähnte Einführung in die Graphentheorie darstellen. Teil III bringt schließlich eine Darstellung der endgültigen Lösung des 4-Farben Problems und eine Diskussion der dadurch aufgeworfenen Fragen. Da es sich hierbei um eine riesige Fülle von Einzelergebnissen handelt, muss diese Schilderung notgedrungen skizzenhaft ausfallen. Es ist meine Hoffnung, dass dennoch die zugrundeliegenden Ideen klar heraustreten. Wenn auch das Buch schon aus Gründen der Lesbarkeit nicht chronologisch aufgebaut ist, so lassen sich die Daten ungefähr so abstecken: Teil I umfasst etwa den Zeitraum 1850–1930, Teil II die Spanne 1930–1965 und Teil III die Jahre von 1965 an.

Soweit der Inhalt. Wie schon angedeutet wurde, lässt sich der Mittelteil nach Erläuterung der Grundbegriffe als 1-semesterige Einführung in die Graphentheorie verwenden. Jedem Kapitel sind eine Anzahl von Übungen nachgestellt. Übungen, deren Bearbeitung besonders empfohlen werden, sind mit einem ◦ gekennzeichnet, schwierigere

Aufgaben mit einem \*. Am Ende findet der Leser eine nach Kapiteln gegliederte Literaturliste mit Hinweisen auf begleitende Lektüre.

Mein besonderer Dank geht an meine Kollegen T. Andreae und R.-H. Schulz, die die verschiedenen Kapitel in allen Phasen der Entstehung gelesen und wesentlich verbessert haben. Ferner danke ich Frau Barrett vom II. Mathematischen Institut der Freien Universität für die sorgfältige Abfassung des Manuskriptes und dem Teubner Verlag für die angenehme Zusammenarbeit.

Berlin, im Oktober 1983

Martin Aigner

## Vorwort zur zweiten Auflage

Es ist eher ungewöhnlich, ein Buch nach 30 Jahren wieder aufzulegen. Im Wesentlichen gab es dafür zwei Gründe. Das Buch ist schon lange vergriffen, wird aber erfreulicherweise immer wieder nachgefragt. Zum Anderen scheint mir die Entwicklung einer Theorie aus ihren historischen Quellen, mit ihren Problemen, Ideen, Irrtümern und Erfolgen, mehr denn je eine sinnvolle und notwendige Ergänzung zum Standardkanon des Bachelorstudiums. Vielleicht war dieser letzte Punkt meine stärkste Motivation, den Text und das Konzept des Buches noch einmal zu durchdenken. Ich habe mich schließlich entschieden, den Aufbau beizubehalten und nur einige der bedeutendsten, seither gefundenen, Ergebnisse einzubauen. Viele Leser der ersten Auflage haben mir versichert, dass gerade die Ausarbeitung des Dreiklangs „Problem–Theorie–Lösung“ den 4-Farben Satz für sie so faszinierend und spannend gemacht hatte. Und genau diese Faszination wollte ich dem manchmal etwas normiert erscheinenden Bachelor-Studiengang hinzufügen, um Mathematik von Anfang als spannende Herausforderung voller Ideen und Schönheit zu vermitteln.

Das Buch ist wie in der ersten Auflage in drei Teile gegliedert: Teil I mit der Einführung in das Problem und die frühen Versuche, Teil II mit der Ausarbeitung der Graphentheorie, und Teil III mit der endgültigen Lösung. Das letzte Kapitel hat eine etwas veränderte Form. Der ursprüngliche Text wurde gestrafft, dafür enthält das Kapitel Bemerkungen zum Nachfolgebeweis des 4-Farben Satzes aus dem Jahr 1996 und einige neuere Entwicklungen. Die neue Auflage bot außerdem eine willkommene Gelegenheit, inhaltliche Passagen zu verbessern, die Notation den heute gängigen Graphen-Bezeichnungen anzupassen und die Literaturliste zu aktualisieren. Es gibt einige zusätzliche Übungen, besonders empfohlene sind mit einem Stern gekennzeichnet.

Da an mathematischer Vorbildung nur das Grundlagenstudium vorausgesetzt wird, eignet sich der Text als einsemestrige Einführung in die Graphentheorie und ebenso als Proseminar zu einer fundierten Diskussion des 4-Farben Problems. Eine 4+2-stündige Veranstaltung von 14 Wochen wurde nach folgendem Plan gehalten und hat sich bewährt:

- |   |           |
|---|-----------|
| 1. Auszüge aus Teil I, insbesondere Grundbegriffe | 3 Wochen  |
| 2. Teil II, etwa 2 Wochen für jedes Kapitel       | 10 Wochen |
| 3. Etwas zu den Ideen aus Teil III                | 1 Woche   |

Die auffälligste Veränderung betrifft das Schriftbild (der Originaltext 1983 war noch mit Schreibmaschine verfasst worden!) und Layout, Fotos und Figuren. Mein herzlicher Dank geht an Margrit Barrett für die sorgfältige Abfassung des Manuskriptes und an Günter M. Ziegler für wunderbare kollegiale Unterstützung. Christina Schulz und vor allem Marie-Sophie Litz danke ich für die Erstellung der Figuren, Christoph Eyrich für die Endredaktion und Ulrike Schmickler-Hirzebruch von Springer Spektrum für die wie immer angenehme Zusammenarbeit.

Es würde mich freuen, wenn die neue Ausgabe auch fast 40 Jahre nach dem Beweis etwas von der Schönheit und ungebrochenen Faszination des 4-Farben Problems vermittelt und die daraus entstandene Graphentheorie als spannende Herausforderung, aber auch als intellektuelles Vergnügen darstellt.

Berlin, Frühling 2015

Martin Aigner

## **Bildernachweis**

Die Portraits von Francis Guthrie auf Seite 4, von Percy John Heawood auf Seite 22, von George David Birkhoff auf Seite 39 und von Dénes König auf Seite 102 sind aus dem *MacTutor History Archive*.

Die Fotos von Peter Guthrie Tait auf Seite 44 und von William Thomas Tutte auf Seite 121 sind in *Wikipedia* enthalten, das Foto von Kasimierz Kuratowski auf Seite 57 und das Foto von Heinrich Heesch auf Seite 160 sind aus *Wikimedia Commons*.

Aus der Website der *Deutschen Mathematiker Vereinigung* ([mathematik.de](http://mathematik.de)) stammt das Bild von Hassler Whitney auf Seite 135. Das Portrait von Gerhard Ringel auf Seite 27 stammt aus dem Nachruf der University of California at Santa Cruz ([news.ucsc.edu](http://news.ucsc.edu)), und das gemeinsame Portrait von Kenneth Appel und Wolfgang Haken auf Seite 179 findet sich im Newsletter No 46 (2002) der *European Mathematical Society*.



# Inhalt

<b>Vorwort</b>	v
<b>I Einführung</b>	
<b>1 Problem und „Lösung“</b>	3
4-Farben Problem   Graph   Landkarte   Färbung   Euler Formel   die falsche „Lösung“ von Kempe   Tait's 3-Farbensatz	
<b>2 Irrtum und Hoffnung</b>	17
Kempes Fehler   5-Farbensatz   geschlossene Flächen   Euler-Poincaré Formel   Heawoodscher Farbensatz   Dualität von Graphen und Landkarten	
<b>3 Beginn der Graphentheorie</b>	31
Arithmetisierung des Problems durch Heawood   die geometrischen Ideen von Veblen   Eulersche Graphen   Birkhoff und das Abzählen von Färbungen   Faktorisierung von Graphen   Hamiltonsche Kreise   polyedrische Graphen	
<b>II Thema</b>	
<b>4 Plättbarkeit</b>	53
Zusammenhang von Graphen   Satz von Menger   die Charakterisierungen plättbarer Graphen durch Kuratowski, Whitney und MacLane   Dualität   Geschlecht von Graphen   Kreuzungszahl	
<b>5 Färbung</b>	75
Chromatische Zahl und chromatischer Index   die Sätze von Brooks und Vizing   kritische Graphen   Hadwigers Vermutung   chromatisches Polynom   Triangulierungen	
<b>6 Faktorisierung</b>	99
Matching in bipartiten Graphen   die Sätze von König und Hall   Transversalen von Mengensystemen   doppelt-stochastische Matrizen   Lateinische Quadrate   der Tutte'sche Satz über die Existenz von 1-Faktoren	
<b>7 Hamiltonsche Kreise</b>	117
Sätze von Whitney und Tutte über Hamiltonsche ebene Graphen   notwendige Bedingungen   Hamiltonscher Abschluss und der Satz von Chvátal   Extremalprobleme in Graphen   die Sätze von Turán und Ramsey	
<b>8 Matroide</b>	133
Axiomatische Beschreibungen   Dualität   Polygonmatroid und Bondmatroid von Graphen   Satz von Edmonds   Zyklen und Cozyklen   Kettengruppen   Minoren   irreduzible Gruppen   die geometrischen Ideen von Tutte	

<b>III</b>	<b>Finale</b>	
<b>9</b>	<b>Zurück zum Anfang</b>	159
	Zwei Ideen: Reduzierbarkeit und Unvermeidbarkeit   die Sätze von Birkhoff   <i>D</i> -Reduzierbarkeit   Obstruktionen   unvermeidbare Mengen und die Methode der Entladung	
<b>10</b>	<b>Lösung und „Problem“</b>	175
	Geographisch gute Konfigurationen   Reduzibilitätsvermutung   Plausibilitätsüberlegungen zur Unvermeidbarkeit   die endgültigen Programme von Appel und Haken und die Lösung   Kritik und Ausblick   Sätze von Penrose und Kauffman	
	<b>Literatur</b>	189
	<b>Symbolverzeichnis</b>	191
	<b>Sachverzeichnis</b>	193

# I Einführung

# 1 Problem und „Lösung“

Am 23. Oktober 1852 schrieb Augustus de Morgan, Professor am University College in London, an seinen Kollegen Sir William Hamilton:

Ein Student fragte mich heute, ob es stimmt, dass die Länder jeder Landkarte stets mit höchstens 4 Farben gefärbt werden können, unter der Maßgabe, dass angrenzende Länder verschiedene Farben erhalten.

De Morgan führte sogleich ein Beispiel an, in dem 4 Farben notwendig sind (Figur 1.1) und fügte hinzu:

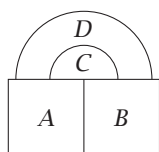
Ich habe das Gefühl, dass im Fall von 4 Ländern, von denen je zwei stets eine gemeinsame Grenze haben, immer eines von den drei anderen eingeschlossen wird, so dass es nicht mit einem fünften verbunden sein kann. Wenn das stimmt, so sollten 4 Farben tatsächlich immer genügen. Aber es ist nicht einfach und ich bin nicht sicher über die möglichen Verwicklungen.

Nun, einfach war es tatsächlich nicht und Verwicklungen gab und gibt es mannigfache – genau davon will dieses Buch berichten. Übrigens: Hamilton war nicht im Mindesten interessiert, doch die *4-Farben Vermutung*, wie sie bald hieß, wurde schnell allgemein bekannt. Der Student, von dem de Morgan sprach, war Frederick Guthrie, der später bekanntgab, dass der eigentliche Urheber des Problems sein Bruder Francis war.

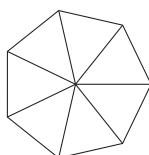
Schauen wir uns das 4-Farben Problem etwas näher an! Unter „angrenzenden“ Ländern muss Francis Guthrie Länder gemeint haben, die eine Linie gemeinsam haben und nicht bloß eine Ecke (oder auch endlich viele). Ansonsten bräuchte man für die Landkarte in Figur 1.2 bereits 7 Farben.

Unter einem „Land“ muss er eine zusammenhängende Region verstanden haben. Darf ein Land nämlich aus zwei Stücken bestehen, so kann man mühelos eine Landkarte mit 5 Ländern entwerfen, in der je zwei stets benachbart sind, so dass also 5 Farben nötig wären (Figur 1.3).

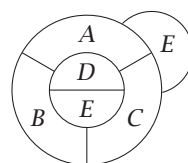
De Morgan gelang der Nachweis (und dies ist der erste konkrete Beitrag zur Lösung des 4-Farben Problems), dass es niemals 5 Länder geben kann, von denen je zwei stets benachbart sind (in der Form eines Puzzles war dies schon um 1840 von Möbius gefragt worden), aber dies sagt natürlich nichts über die Richtigkeit der 4-Farben Vermutung aus. Es ist keineswegs so, dass die Maximalzahl paarweise benachbarter Län-



Figur 1.1



Figur 1.2



Figur 1.3

der gleich der Zahl der benötigten Farben ist. (Dieser Fehlschluss war Ausgangspunkt vieler falscher Lösungsvorschläge.) Beispielsweise hat die Landkarte in Figur 1.2 keine 3 paarweise benachbarten Länder, jedoch reichen, wie man sofort sieht, 2 Farben nicht aus.

Nach de Morgan war es vor allem Cayley, der zur Verbreitung des Problems beitrug. Auf einer Sitzung 1878 stellte er das Problem an die Londoner Mathematische Gesellschaft und diskutierte in einer Note die auftretenden Schwierigkeiten. Binnen eines Jahres publizierte A. Kempe, ein Rechtsanwalt und Mitglied der Mathematischen Gesellschaft, eine Arbeit, in der die 4-Farben Vermutung augenscheinlich positiv beantwortet wurde. Die Lösung wurde mit Begeisterung begrüßt, Kempe wurde zum Fellow of the Royal Society gewählt, weitere Verbesserungen erschienen, und der „4-Farben Satz“ war eine allgemein anerkannte mathematische Tatsache.

Obwohl Kempes Beweis einen Fehler enthielt, der erstmalig 1890 von Heawood aufgezeigt wurde (dem dies fast peinlich war), so vereinigt er doch nahezu alle Ideen, die zur endgültigen Lösung 100 Jahre später geführt haben. Wir tun also gut daran, uns seine Beweisführung näher anzusehen. Zuvor müssen wir aber genau klären, was wir unter einer Landkarte verstehen.

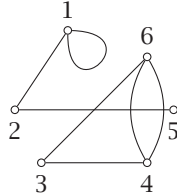
Ein *Graph*  $G = (V, E)$  besteht aus einer endlichen Menge  $V$  von *Ecken*, einer endlichen Menge  $E$  von *Kanten*, und einer Vorschrift, welche jeder Kante  $e$  genau zwei (verschiedene oder gleiche) Ecken  $a$  und  $b$  zuordnet, die wir die *Endecken* von  $e$  nennen. Normalerweise sind die Endecken  $a$  und  $b$  verschieden; ist  $a = b$ , so nennen wir  $e$  eine *Schlinge* bei  $a$ . Hat  $e$  die Endecken  $a$  und  $b$ , so sagen wir,  $e$  *verbindet*  $a$  und  $b$ .

Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, nennen wir *benachbart*, und wir bezeichnen mit  $N(v)$  alle zu  $v \in V$  benachbarten Ecken. Ist  $v$  Endecke von  $e$ , so heißen  $v$  und  $e$  *inzident*, und wir notieren diesen Sachverhalt oft etwas ungenau  $v \in e$ . Eine Ecke, die mit überhaupt keiner Kante inzidiert, heißt *isoliert*. Zwei Kanten nennen wir *inzident*, wenn sie eine gemeinsame Endecke besitzen. Sind zwei Ecken durch Kanten  $e_1, e_2, \dots, e_t$ ,  $t \geq 2$ , verbunden, so heißen  $e_1, \dots, e_t$  *Mehrfachkanten*. Hat  $e \in E$  die Endecken  $a$  und  $b$ , so benützen wir durchwegs die bequeme Schreibweise  $e = ab$ . Diese Notation ist natürlich mehrdeutig, falls  $a$  und  $b$  durch mehrere Kanten verbunden sind, doch wird dies nie zu Schwierigkeiten führen. Für viele Probleme sind Schlingen und Mehrfachkanten irrelevant, so dass für Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten ein eigener Name, *einfache Graphen*, geprägt wurde. Für einfache Graphen ist die obige Bezeichnung  $e = ab$  dann eindeutig.



**Francis Guthrie** wurde 1831 in London geboren. Er studierte am University College London bei Augustus de Morgan, als er beim Färben der Grafschaften von England zur 4-Farben Vermutung gelangte. Mit 30 Jahren wanderte er nach Südafrika aus, wo er am neugegründeten Graaff-Reinet College in Kapstadt Mathematik unterrichtete. Später wechselte er, nach Jahren als Rechtsanwalt und Zeitungsherausgeber, als Professor an die Universität von Kapstadt. Unsterblich wurde er nicht nur durch die 4-Farben Vermutung, sondern auch durch botanische Entdeckungen, die so klangvolle nach ihm benannte Namen wie *Gladiolus guthriei* oder *Erica guthriei* tragen. Er starb 1899 in Kapstadt.

Einen Graphen  $G = (V, E)$  veranschaulicht man sich am besten durch ein Diagramm, indem man die Ecken als Punkte der Ebene zeichnet und die Kanten als Jordansche Kurven, d. h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven, zwischen den Endpunkten (die natürlich im Fall einer Schlinge geschlossen sind); siehe Figur 1.4, in der zu den Kanten jeweils die Endecken angegeben sind.



Figur 1.4

**Beispiel.**  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{11, 12, 25, 34, 36, 46, 46\}$

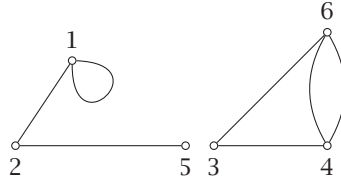
Sind  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_t$  Ecken mit  $v_{i-1}v_i \in E$  für alle  $i$ , so heißt  $W = (v_0, v_1, \dots, v_t)$  ein *Kantenzug* von  $v_0$  nach  $v_t$ . Die *Länge*  $\ell(W) = t$  des Kantenzuges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.  $W$  heißt ein *Weg*, falls alle  $v_i$  verschieden sind. Es ist klar, dass in jedem Kantenzug von  $a$  nach  $b$  ein  $a, b$ -Weg enthalten ist. Ein Kantenzug  $W = v_0, v_1, \dots, v_t$ , in dem alle Kanten verschieden sind und ebenso alle Ecken mit Ausnahme  $v_0 = v_t$ , heißt ein *Kreis*, wobei  $t$  wiederum die *Länge des Kreises* ist. Der Graph in Figur 1.4 enthält beispielsweise einen Kreis der Länge 3, nämlich  $(3, 4, 6, 3)$ . Schlingen sind demnach Kreise der Länge 1, wie  $(4, 6, 4)$  in Figur 1.4, werden durch Mehrfachkanten zwischen zwei Ecken erzeugt.

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Ecken durch einen Weg verbunden sind, ansonsten *unzusammenhängend*. Da die Wegverbundenheit von Ecken klarerweise eine Äquivalenzrelation auf  $V$  ist, so zerfällt jeder Graph eindeutig in seine zusammenhängenden *Komponenten*. Der Graph in Figur 1.4 zerfällt z. B. in die Komponenten  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{3, 4, 6\}$ .

Wir haben schon erwähnt, dass wir üblicherweise einen Graphen  $G$  durch ein Punkt-Linien System in der Ebene veranschaulichen. Gibt es eine Darstellung, in der die Kanten von  $G$  sich nur an Ecken treffen aber niemals dazwischen, so sagen wir, der abstrakte Graph  $G$  ist *plättbar* (oder *planar*) und nennen den in die Ebene eingebetteten Graphen einen *ebenen Graphen*. Also: Ein ebener Graph besteht aus einer Menge von Punkten der Ebene und einer Menge von Kanten (= Jordansche Kurven), die sich jeweils nur in den zugehörigen Endecken schneiden. Eine Nebenbemerkung: Isolierte Ecken spielen bei einer Einbettung natürlich überhaupt keine Rolle, sie können irgendwohin platziert werden, allerdings darf keine Kante über eine isolierte Ecke laufen.

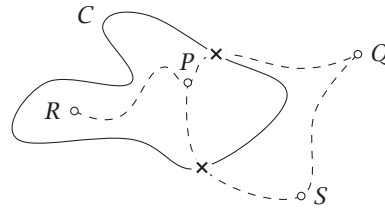
Die Unterscheidung zwischen „plättbar“ und „eben“ mutet zunächst überflüssig an, doch werden wir später sehen, dass ein plättbarer Graph im Allgemeinen auf mehrere (nichtisomorphe) Weisen in die Ebene eingebettet werden kann.

**Beispiel.** Die Darstellung des Graphen in Figur 1.4 ist nicht eben, da sich zum Beispiel die Linien 25 und 36 in einem Zwischenpunkt schneiden. Trotzdem ist der Graph natürlich plättbar, wir brauchen dazu nur die Komponenten auseinanderzuziehen (Figur 1.5).



Figur 1.5

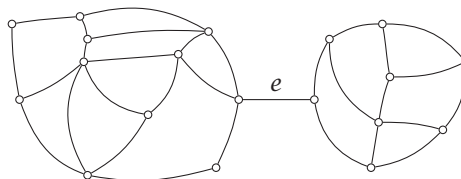
Ist  $G = (V, E)$  ein ebener Graph, so zerlegen die Linien die Ebene in endlich viele zusammenhängende Gebiete (von denen genau eines, das „äußere“ Gebiet, nicht beschränkt ist), die wir die *Länder*  $R$  von  $G$  nennen wollen. Der Grund dafür ist der berühmte *Jordansche Kurvensatz*: Eine geschlossene Jordan Kurve  $C$  zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete, von denen genau eines nicht beschränkt ist. Das heißt: Zwei Punkte der Ebene können genau dann durch eine Jordan Kurve verbunden werden, die  $C$  nicht trifft, wenn sie entweder beide im Inneren oder beide im Äußeren von  $C$  liegen (Figur 1.6). So einleuchtend dieser Satz auch ist, sein Beweis ist alles andere als leicht (siehe z.B. das Buch von Goodman). Wir werden ständig von diesem fundamentalen Satz Gebrauch machen.



Figur 1.6

Haben wir umgekehrt eine „Landkarte“  $\mathcal{L}$  gegeben, so können wir  $\mathcal{L}$  sofort einen ebenen Graphen  $G(\mathcal{L})$  zuordnen. Die *Ecken* von  $G(\mathcal{L})$  sind die Schnittpunkte verschiedener Grenzen und die *Kanten* sind die zwischen Schnittpunkten verlaufenden Grenzlinien. (Eine Ausnahme bilden Inseln, die nur aus einem Land mit Umrandung bestehen. Hier müssen wir einen beliebigen Punkt  $v$  auf dem Rand auszeichnen, so dass eine Schlinge bei  $v$  entsteht.) Es ist klar, dass die Länder von  $G(\mathcal{L})$  genau die ursprünglichen Länder der Landkarte  $\mathcal{L}$  sind, wobei wir auch das „äußere“ Land mitzählen;  $G(\mathcal{L})$  heißt das *Gerüst* von  $\mathcal{L}$ .

**Beispiel.** Das Gerüst der in Figur 1.7 abgebildeten Landkarte enthält 19 Ecken, 31 Kanten und 14 Länder (das äußere eingeschlossen). Damit kommen wir zur grundlegenden Definition.



Figur 1.7

**Definition.** Eine *Landkarte*  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  ist ein ebener Graph  $G = (V, E)$  zusammen mit den zu  $G$  gehörigen Ländern  $R$ .

Länder, die eine gemeinsame Grenze haben, nennen wir *benachbart*. Ist die Kante  $e$  Grenze des Landes  $F$ , so nennen wir  $e$  und  $F$  *inzident* und schreiben oft  $e \in F$ ; analog sprechen wir von Ecken-Länder Inzidenz. Wir wollen noch klären, was wir unter isomorphen Graphen bzw. Landkarten verstehen.

**Definition.** Zwei Graphen  $G = (V, E)$  und  $G' = (V', E')$  heißen *isomorph*, in Zeichen  $G \cong G'$ , falls Bijektionen  $\varphi_V : V \rightarrow V'$ ,  $\varphi_E : E \rightarrow E'$  existieren, so dass  $v \in V$  Ecke von  $e \in E$  genau dann ist, wenn dies auch für  $\varphi_V v \in V'$  und  $\varphi_E e \in E'$  gilt. Die Ecken-Kanten Inzidenz soll also genau erhalten bleiben. Zwei *Landkarten*  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  und  $\mathcal{L}' = (V', E', R')$  heißen *isomorph*,  $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$ , falls Bijektionen  $\varphi_V : V \rightarrow V'$ ,  $\varphi_E : E \rightarrow E'$ ,  $\varphi_R : R \rightarrow R'$  existieren, welche die Ecken-Kanten, Kanten-Länder und Ecken-Länder Inzidenz genau erhalten. Insbesondere gilt dann  $G(\mathcal{L}) \cong G(\mathcal{L}')$ .

Vom kombinatorischen Standpunkt aus sind isomorphe Graphen bzw. isomorphe Landkarten völlig strukturgleich.

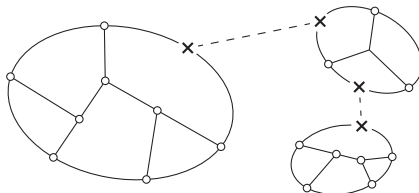
Das äußere Land werden wir von nun an als völlig gleichberechtigt mit den inneren Ländern betrachten. Durch zweimalige stereographische Projektion sieht man sofort, dass jedes beliebige Land  $F$  als „Äußeres“ aufgefasst werden kann (es muss nur der Pol in  $F$  gewählt werden), so dass also jede Besonderheit verschwunden ist.

Eine *Färbung* von  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  ist eine Abbildung  $f : R \rightarrow M$  von  $R$  in irgendeine (Farb-)Menge  $M$ , so dass Länder, die eine gemeinsame Grenzkante besitzen, stets verschiedene Farben erhalten. Die kleinste Zahl von Farben, die dafür benötigt werden, heißt die *chromatische Zahl*  $\chi(\mathcal{L})$  von  $\mathcal{L}$ . Falls  $\chi(\mathcal{L}) = n$  ist, so sagen wir,  $\mathcal{L}$  ist *n-chromatisch*.

Mit diesen Begriffen können wir die 4-Farben Vermutung exakt formulieren.

**4-Farben Vermutung.** Jede Landkarte  $\mathcal{L}$  hat chromatische Zahl  $\chi(\mathcal{L}) \leq 4$ .

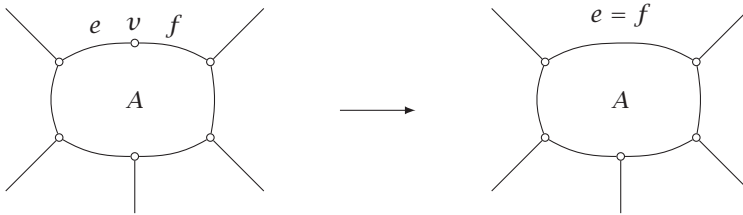
Zurück zu Kempe. Seine erste Idee war es, einige spezielle Typen von Landkarten auszusondern und zu zeigen, dass aus der 4-Färbbarkeit der restlichen „normalen“ Landkarten die 4-Färbbarkeit aller Landkarten folgt. Beispielsweise können wir annehmen, dass das Gerüst  $G(\mathcal{L})$  ein *zusammenhängender* Graph ist. Denn durch Einführung zusätzlicher Kanten können wir eine Landkarte  $\mathcal{L}'$  konstruieren, deren Gerüst zusammenhängt. Ist aber  $\mathcal{L}'$  4-färbbar, so gilt dies klarerweise auch für  $\mathcal{L}$ , indem wir die Kanten einfach wieder entfernen. (Die Verbindungskanten sind in Figur 1.8 gestrichelt gezeichnet.)



Figur 1.8



Auch *Schlingen* können wir weglassen, da das zugehörige Land nur an *ein* weiteres anstößt und somit nach Färbung des Restes eine der 3 verfügbaren Farben erhalten kann. Wir können ferner annehmen, dass  $G(\mathcal{L})$  bzw.  $\mathcal{L}$  keine Brücken enthält: Eine Kante  $e$  eines beliebigen zusammenhängenden Graphen  $G$  heißt dabei *Brücke*, falls  $G$  nach Entfernung von  $e$  in zwei Komponenten zerfällt. Äquivalent dazu:  $e$  ist Brücke, falls  $e$  in keinem Kreis liegt (klar?). In einem ebenen Graphen sind Brücken ferner dadurch gekennzeichnet, dass sie auf beiden Seiten dasselbe Land begrenzen, wie wieder aus dem Jordanschen Kurvensatz zu ersehen ist. (Siehe die Brücke  $e$  in Figur 1.7.) Enthält nun  $\mathcal{L}$  eine Brücke  $e$ , so ziehen wir  $e$  zu einem Punkt zusammen, d. h. wir identifizieren die beiden Endecken. Ist die resultierende Landkarte  $\mathcal{L}'$  4-färbbar, so natürlich auch  $\mathcal{L}$ . Insbesondere stößt also nach Entfernung der Brücken eine Ecke immer an mindestens zwei Kanten an. Schließlich können wir alle Ecken, die nur an zwei Kanten anstoßen, wegfällen lassen, indem wir die Kanten einfach verschmelzen (Figur 1.9). Dies ändert offenbar an der Zahl der benötigten Farben nicht das Geringste.



Figur 1.9

**Definition.** Eine Landkarte  $\mathcal{L}$  heißt *normal*, falls der Gerüstgraph  $G(\mathcal{L})$  zusammenhängend ist, weder Schlingen noch Brücken enthält, und jede Ecke mit mindestens 3 Kanten inzidiert.

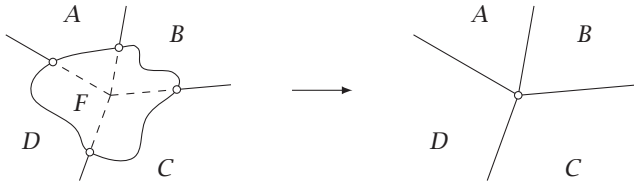
Als Zusammenfassung unserer bisherigen Überlegungen können wir notieren:

**Satz 1.1.** *Ist die 4-Farben Vermutung richtig für alle normalen Landkarten, so gilt sie allgemein.*

Wir halten noch fest, dass in einer normalen Landkarte jede Kante zwei verschiedene Endecken hat (keine Schlingen!) und an zwei verschiedene Länder angrenzt (keine Brücken!).

Was war nun Kempes Beweisidee? Er führte Induktion nach der Anzahl der Länder. Im *ersten Schritt* zeigte er, dass es ein Land  $F$  geben muss, das an höchstens 5 andere Länder  $A_1, \dots, A_t$ ,  $t \leq 5$ , anstößt. Er entfernte  $F$  durch Weiterführung der Grenzen (Figur 1.10), wodurch eine neue Landkarte  $\mathcal{L}'$  mit einem Land weniger entsteht, und wies nun im *im zweiten Schritt* nach, dass die nach Induktionsannahme existierende 4-Färbung von  $\mathcal{L}'$  so geändert werden kann, dass  $A_1, \dots, A_t$  höchstens 3 verschiedene Farben erhalten. Die freie vierte Farbe kann nun nach Wiedereinführung für  $F$  verwendet werden, und der Beweis ist vollständig.

Kempes erster Schritt ist eine Folgerung der Eulerschen Polyederformel, die wir zuerst beweisen wollen. Zuvor ein paar Definitionen. Sei  $v$  eine Ecke des Graphen  $G = (V, E)$ . Der *Grad*  $d(v)$  ist die Anzahl der Kanten, die  $v$  als Endecke besitzen, wobei Schlingen



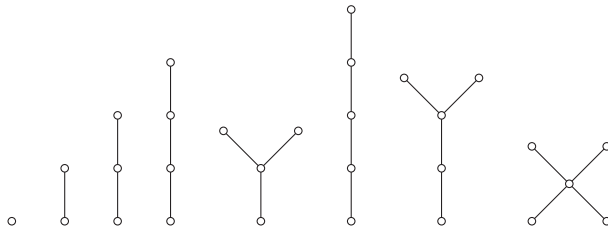
Figur 1.10

bei  $v$  doppelt gezählt werden. Wir beginnen mit einem Resultat, das, von Euler 1736 bewiesen, wahrscheinlich der erste Beitrag zur Graphentheorie war.

**Lemma 1.2.** Für einen Graphen  $G = (V, E)$  gilt  $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$ . Ist also insbesondere  $d(v) \geq 3$  für alle  $v \in V$ , so haben wir  $2|E| \geq 3|V|$ .

*Beweis.* Wir zählen die Paare  $(v, e)$ ,  $v \in V, e \in E$  mit  $v \in e$ . Da jede Kante genau 2 Ecken hat (Schlingen werden doppelt gezählt), ist die Anzahl einmal  $2|E|$ . Jede Ecke  $v \in V$  trägt ihrerseits  $d(v)$  bei, also ist die Summe auch gleich  $\sum_{v \in V} d(v)$ .  $\square$

Ein zusammenhängender Graph ohne Kreise heißt ein *Baum*. Die Bäume zählen zu den wenigen Graphenklassen, die bereits vor dem 4-Farben Problem studiert wurden, vor allem von Kirchhoff im Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken und von Cayley, der die Abzählung von Bäumen initiierte. Figur 1.11 gibt alle Bäume mit höchstens 5 Ecken an.



Figur 1.11

**Lemma 1.3.** Für einen Baum  $G = (V, E)$  gilt stets  $|E| = |V| - 1$ .

*Beweis.* Induktion nach  $|V|$ . Für  $|V| = 1$  ist nichts zu beweisen. Sei nun  $|V| \geq 2$  und  $e \in E$ . Da  $G$  keine Kreise enthält, muss  $e$  eine Brücke sein. Der Graph  $G' = G \setminus e$ , der nach Entfernen von  $e$  entsteht, hat daher zwei Komponenten  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ , die offenbar wieder Bäume sind mit  $|V_1| < |V|$ ,  $|V_2| < |V|$ . Nach Induktionsannahme erhalten wir daraus  $|E_i| = |V_i| - 1, i = 1, 2$ , und somit  $|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = |V| - 1$ .  $\square$

**Satz 1.4** (Euler Formel). Sei  $G = (V, E)$  ein ebener zusammenhängender Graph mit den Ländern  $R$ . Dann gilt

$$|V| - |E| + |R| = 2.$$

*Beweis.* Wir führen Induktion nach der Anzahl der Kanten. Für  $|E| = 0$  besteht  $G$  aus einer einzelnen Ecke, so dass  $|V| = |R| = 1$  ist, und somit  $|V| - |E| + |R| = 2$ .

Sei nun  $|E| \geq 1$ . Angenommen,  $e \in E$  ist keine Brücke. Dann ist  $G' = G \setminus e$  noch immer zusammenhängend und, da nach Entfernen von  $e$  die beiden angrenzenden verschiedenen Länder verschmelzen, haben wir  $|V'| = |V|$ ,  $|E'| = |E| - 1$ ,  $|R'| = |R| - 1$ . Nach Induktion gilt die Formel also auch für  $G$ . Besitzt  $G$  aber nur Brücken, so muss  $G$  ersichtlich ein Baum sein. Dann ist aber  $|R| = 1$ , und die Formel folgt aus 1.3.  $\square$

Wir haben nun alle Hilfsmittel (die Aussagen 1.2 bis 1.4 waren damals natürlich längst bekannt), um Kempes ersten Schritt nachzuvollziehen.

**Satz 1.5.** *Sei  $\mathcal{L}$  eine normale Landkarte. Mit  $p_i$ ,  $i \geq 2$ , bezeichnen wir die Anzahl der Länder, welche genau  $i$  Grenzen haben. Dann gilt  $\sum_{i \geq 2} (6 - i)p_i \geq 12$ . Insbesondere muss also eine der Zahlen  $p_2, p_3, p_4, p_5$  positiv sein, d. h. es muss ein Land geben, das höchstens 5 Grenzen hat.*

*Beweis.* Jedes Land besitzt mindestens zwei Grenzen (keine Schlingen!), also haben wir  $|R| = p_2 + p_3 + p_4 + \dots$ . Da jede Kante genau zwei Länder begrenzt (keine Brücken!), erhalten wir mit derselben Abzählmethode wie in 1.2:

$$2|E| = 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots \quad (*)$$

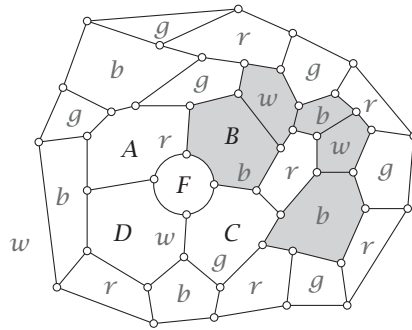
In einer normalen Landkarte hat jede Ecke einen Grad  $\geq 3$ , somit gilt  $3|V| \leq 2|E|$  nach 1.2. Multiplizieren wir nun die Euler Formel mit 6 und setzen (\*) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 12 &= 6|V| - 6|E| + 6|R| = (6|V| - 4|E|) + (6|R| - 2|E|) \\ &\leq 6|R| - 2|E| = 6(p_2 + p_3 + p_4 + \dots) - (2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots) \\ &= \sum_{i \geq 2} (6 - i)p_i. \end{aligned}$$

Da die Summe mindestens 12 ergibt, die Summanden  $(6 - i)p_i$  aber  $\leq 0$  für  $i \geq 6$  sind, muss also tatsächlich eine der Zahlen  $p_2$  bis  $p_5$  positiv sein.  $\square$

**Beispiel.** Das eingangs erwähnte Puzzle von Möbius, ob eine Landkarte  $\mathcal{L}$  existiert, in der jedes der 5 Länder an jedes andere angrenzt, kann nun beantwortet werden. In  $\mathcal{L}$  müsste  $p_4 = 5$  und  $p_i = 0$  für  $i \neq 4$  gelten, woraus  $12 \leq 2p_4 = 10$  folgen würde. Also kann es keine solche Landkarte geben.

Wir wollen nun den zweiten Schritt in Kempes Beweisgang analysieren. Die 4-Farben Vermutung sei für Landkarten mit höchstens  $r - 1$  Länder bewiesen und  $\mathcal{L}$  eine normale Landkarte mit  $|R| = r$ . Wir wissen, dass  $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 > 0$  ist. Existiert ein Land  $F$  mit höchstens 3 Grenzen, so können wir mit Sicherheit Kempes Schluss nachvollziehen, denn für  $F$  bliebe ja die vierte Farbe übrig. Der erste interessante Fall entsteht also, wenn  $p_2 = p_3 = 0$  ist, aber ein Land  $F$  mit 4 Grenzen existiert. Die angrenzenden Länder seien  $A, B, C, D$ . Wir färben die nach Kontraktion von  $F$  entstandene Landkarte  $\mathcal{L}'$  mit 4 Farben (siehe Figur 1.10). Verbrauchen wir nicht alle 4 Farben, so sind wir wiederum fertig. Nehmen wir also an, dass  $A$  rot gefärbt wurde,  $B$  blau,  $C$  grün und  $D$  weiß. Betrachten wir  $A$  und  $C$ . Entweder es existiert keine Kette von benachbarten Ländern von  $A$  nach  $C$ , die abwechselnd rot und grün gefärbt sind, oder eine solche rot-grün Kette von  $A$  nach  $C$  gibt es doch. Dann kann es aber keine



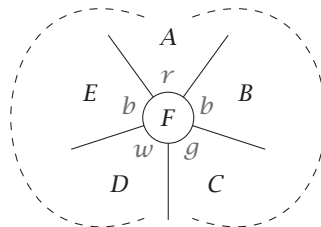
Figur 1.12

blau-weiß Kette von  $B$  nach  $D$  geben, denn die beiden Ketten müssten sich in einem gemeinsamen Land treffen, was natürlich unmöglich ist. In Figur 1.12 verläuft eine rot-grün Kette von  $A$  nach  $C$  im Uhrzeigersinn außen herum.

Also: Entweder gibt es keine rot-grün Kette von  $A$  nach  $C$  oder keine blau-weiß Kette von  $B$  nach  $D$ . Und nun Kempe's Schluss: Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es gibt keine blau-weiß Kette von  $B$  nach  $D$ . Wir fertigen eine Liste aller Länder an, die von  $B$  aus mittels einer blau-weiß Kette erreichbar sind. (In Figur 1.12 sind diese Länder dunkel gezeichnet.) Vertauschen wir die Farben blau und weiß in dieser Liste, so resultiert wiederum eine zulässige Färbung von  $\mathcal{L}'$ . Da  $D$  sicherlich nicht auf der Liste ist, haben wir demnach  $\mathcal{L}'$  so gefärbt, dass um  $F$  herum eine Farbe übrig bleibt (in unserem Beispiel blau), welche nun für  $F$  verwandt werden kann.

Dieselbe Schlussweise mittels solcher Farbketten (die, wie wir sehen werden, die Basis für viele weitere Beweisversuche bildeten und heute *Kempe-Ketten* genannt werden) hat Kempe auch für den verbleibenden Fall  $p_2 = p_3 = p_4 = 0, p_5 > 0$  angewandt. Hier allerdings unterlief ihm ein Fehlschluss, der erst zehn Jahre später aufgezeigt wurde. Es soll nun sein Beweisgang vorgebracht werden. Die Leser mögen selber ihre Finger auf die Schwachstelle legen (oder sich bis zum nächsten Kapitel gedulden).

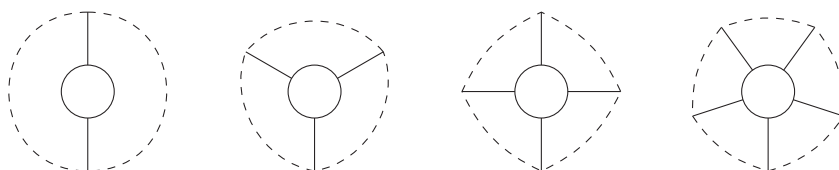
Sei also  $F$  zu den 5 Ländern  $A, B, C, D, E$  benachbart. Falls in der kontrahierten Landkarte  $\mathcal{L}'$  eine 4-Färbung existiert, die für die Nachbarländer höchstens 3 Farben verwendet, so sind wir fertig. Werden alle 4 Farben benötigt, so liegt ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Situation von Figur 1.13 vor.



Figur 1.13

Die folgende Sprechweise ist hilfreich: Unter der blau-weiß Komponente von  $B$  verstehen wir alle Länder, die von  $B$  mittels blau-weiß Ketten erreicht werden können; analog für die anderen Farben. Falls keine rot-grün Kette von  $A$  nach  $C$  existiert, so können wir wie oben beschrieben durch Vertauschung von rot und grün eine Farbe einsparen. Dasselbe gilt, falls keine rot-weiß Kette von  $A$  nach  $D$  existiert. Nehmen wir also an,  $A$  und  $C$  sind durch eine rot-grün Kette und  $A$  und  $D$  durch eine rot-weiß Kette verbunden (angedeutet durch die beiden Bögen in Figur 1.13). Dann ist  $B$  von  $D$  getrennt, und ebenso  $E$  von  $C$ . Dies bedeutet aber, dass die blau-weiß Komponente  $R_1$ , zu welcher  $B$  gehört, nicht auch  $D$  oder  $E$  enthalten kann, und ebenso dass die blau-grün Komponente  $R_2$ , zu welcher  $E$  gehört, nicht auch  $C$  oder  $B$  enthalten kann. Wir können also in  $R_1$  die Farben blau und weiß austauschen und in  $R_2$  die Farben blau und grün, ohne die Färbung von  $C$  und  $D$  zu verändern. Nach Abschluss dieser Umfärbung ist  $A$  rot gefärbt,  $B$  und  $D$  weiß, und  $C$  und  $E$  grün. Es bleibt also blau für unser kontrahiertes Land  $F$  übrig.

Wenn auch Kempes Beweisführung fehlerhaft war, so enthalten seine Beweisschritte die beiden entscheidenden Ideen: Nach 1.5 muss jede normale Landkarte ein Land mit höchstens 5 Nachbarländern enthalten. Wir können daher sagen, dass die Menge von Konfigurationen aus Figur 1.14 *unvermeidbar* ist in dem Sinne, dass *jede* normale Landkarte eine Konfiguration aus dieser Menge enthalten *muss*.

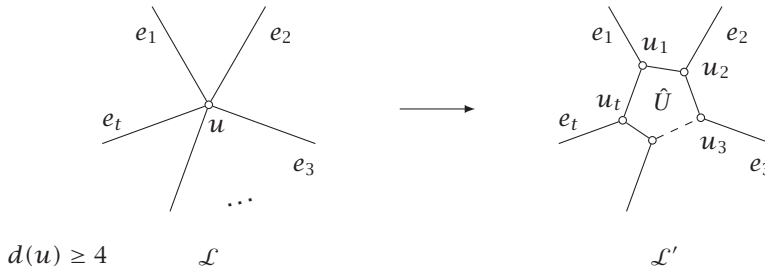


Figur 1.14

Den Induktionsschritt kann man als Suche nach einer *minimalen* 5-chromatischen Landkarte auffassen, d. h. mit der Minimalzahl von Ländern. Eine Konfiguration heißt *reduzierbar*, falls gezeigt werden kann, dass sie in einer minimalen 5-chromatischen Landkarte unmöglich auftreten kann. Kempes Kettenmethode zeigte, dass die ersten drei Konfigurationen aus Figur 1.14 *reduzierbar* sind, leider aber nicht schlüssig für die letzte. Aber das Programm ist klar (und hat schließlich auch zum Erfolg geführt): *Man finde eine unvermeidbare Menge, deren Konfigurationen sämtlich reduzierbar sind*. Ist solch eine Menge gefunden, so kann es keine minimale 5-chromatische, und somit überhaupt keine 5-chromatische Landkarte geben, d. h. alle Landkarten sind mit höchstens 4 Farben färbbar.

Wie schon erwähnt, wurde Kempes Beweis allgemein akzeptiert, und so ist es nicht verwunderlich, dass weitere falsche Verbesserungen und auch neue ebenso falsche Beweise folgten. Einer davon, der von Tait vorgeschlagen wurde, verdient genaueres Studium.

Schon Cayley und Kempe bemerkten, dass zum Beweis der 4-Farben Vermutung die Klasse der normalen Landkarten noch weiter eingeschränkt werden kann. Wir nennen eine Landkarte  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  bzw. das Gerüst  $G(\mathcal{L})$  *kubisch*, falls  $d(u) = 3$  ist für alle  $u \in V$ . Ist  $\mathcal{L}$  nun eine beliebige normale Landkarte, so können wir  $\mathcal{L}$  sofort eine kubische Landkarte  $\mathcal{L}'$  zuordnen, die mindestens ebensoviele Farben benötigt.



Figur 1.15

Wir ersetzen jede Ecke  $u \in V$  mit  $d(u) \geq 4$  durch ein Land  $\hat{U}$ , wie in Figur 1.15 angedeutet. Ist die so konstruierte kubische Landkarte  $\mathcal{L}'$  4-färbbar, so sicherlich auch  $\mathcal{L}$ . Somit sehen wir:

*Die 4-Farben Vermutung ist genau dann richtig, wenn alle kubischen normalen Landkarten 4-färbbar sind.*

Man beachte, dass in einer kubischen Landkarte die an eine Schlinge anstoßende Kante eine Brücke sein muss. Das heißt, eine brückenlose kubische Landkarte hat auch keine Schlingen. Da für eine kubische Landkarte  $3|V| = 2|E|$  gilt, haben wir Gleichheit in 1.5, wie aus dem dortigen Beweis sofort folgt.

**Folgerung 1.6.** Sei  $\mathcal{L}$  eine kubische normale Landkarte und  $p_i$  die Anzahl der Länder, welche genau  $i$  Grenzen haben,  $i \geq 2$ . Dann gilt  $\sum_{i \geq 2} (6 - i) p_i = 12$ .

Tait hat nun die 4-Färbbarkeit von kubischen Landkarten auf die 3-Färbbarkeit der Kanten zurückgeführt. Dabei verstehen wir unter einer *Kantenfärbung* eine Färbung der Kanten solcherart, dass inzidente Kanten verschiedene Farben erhalten.

**Satz 1.7 (Tait).** Eine kubische brückenlose Landkarte  $\mathcal{L}$  ist genau dann 4-färbbar, wenn ihre Kanten 3-färbbar sind.

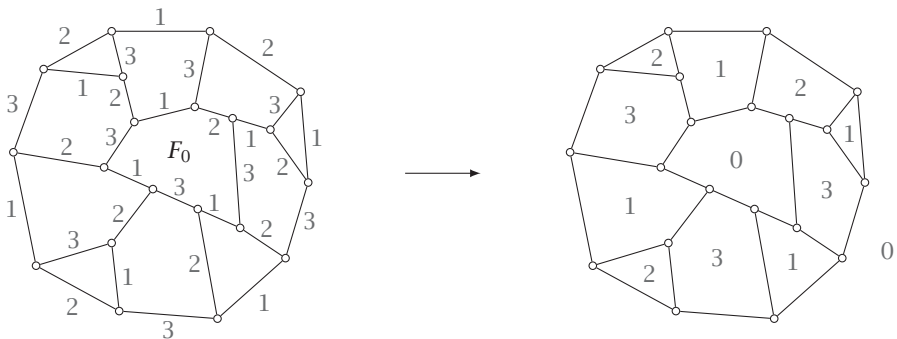
*Beweis.* Sei  $\mathcal{L}$  4-färbbar. Wir nehmen als Farbmenge die Kleinsche Vierergruppe  $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ , d.h. 0 ist das neutrale Element, und es ist  $a_i + a_i = 0$  für alle  $i$  und  $a_i + a_j = a_k$  mit  $k \neq i, j$  für alle  $i \neq j$ . Ist nun die 4-Färbung gegeben, so nehmen wir als Farbe einer Kante  $e$  die Summe der Farben der beiden an  $e$  anstoßenden Länder. Daraus folgt unmittelbar, dass die Kanten alle aus  $\{a_1, a_2, a_3\}$  gefärbt sind und dass inzidente Kanten verschiedene Farben erhalten.

Nehmen wir nun umgekehrt an, die Kanten seien mittels  $\{a_1, a_2, a_3\}$  gefärbt. Wir wählen ein Land  $F_0$  und färben es mit der Farbe 0. Jedes andere Land  $F$  wird nun auf folgende Weise gefärbt: Es sei  $C$  eine beliebige Jordan Kurve, welche das Innere von  $F_0$  mit dem Inneren von  $F$  verbindet und durch keine Ecken von  $\mathcal{L}$  geht. Die Farbe von  $F$  sei dann die Summe der Farben aller von  $C$  passierten Kanten. Wir müssen zunächst zeigen, dass jede solche Kurve dieselbe Farbe ergibt oder, was dasselbe ist, dass die Summe der Farben aller von einer geschlossenen Jordan Kurve passierten Kanten = 0 ist.

Sei  $S$  so eine Kurve,  $c_1, c_2, \dots, c_t$  die Farben der von  $S$  passierten Kanten (die möglicherweise mehrmals passiert werden und dann jedesmal in die Liste aufgenommen

werden) und  $d_1, \dots, d_n$  die Farben der ganz im Inneren von  $S$  liegenden Kanten. Ist  $c(v)$  die Summe der drei an die Ecke  $v$  anstoßenden Kanten, so haben wir stets  $c(v) = a_1 + a_2 + a_3 = 0$ . Somit gilt auch  $\sum c(v) = 0$ , wenn über alle im Inneren von  $S$  liegenden Ecken summiert wird. In  $\sum c(v)$  wird jede innere Kante zweimal gezählt, also ist deren Beitrag  $2(d_1 + \dots + d_n) = 0$ . Eine von  $S$  passierte Kante wird, wie man sich sofort überlegt, ungerade oft passiert, falls eine der Endecken im Inneren und die andere im Äußeren von  $S$  liegt, und geradefach in den beiden anderen Fällen (beide Endecken im Inneren bzw. beide im Äußeren). Wegen  $a_i + a_i = 0$  für alle  $i$  schließen wir daraus, dass beide Ausdrücke  $\sum c(v)$  bzw.  $c_1 + \dots + c_t$  genau die Farbensumme der Kanten, die vom Inneren ins Äußere führen, ergeben. Somit haben wir  $\sum c(v) = c_1 + \dots + c_t$ , also tatsächlich  $\sum_{i=1}^t c_i = 0$ . Schließlich müssen wir noch nachweisen, dass benachbarte Länder  $A, B$  verschiedene Farben erhalten. Ist  $C$  nun eine Kurve vom Inneren von  $F_0$  ins Innere von  $A$ , so können wir  $C$  über die Grenze  $e$  ins Innere von  $B$  verlängern. Die Farbe  $c(B)$  von  $B$  ist dann die Summe der Farben  $c(A)$  von  $A$  und  $c(e)$  von  $e$ , so dass  $c(B) \neq c(A)$  ist wegen  $c(e) \neq 0$ .  $\square$

**Beispiel.** Figur 1.16 demonstriert den zweiten Beweisteil, wobei der Übersichtlichkeit wegen  $a_i = i$  für alle  $i$  gesetzt wird, also  $1 + 1 = 0, 1 + 2 = 3$  usw.

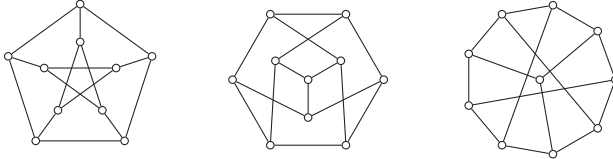


Figur 1.16

Tait selbst gab an, dass die 3-Färbung der Kanten einer kubischen Landkarte ein „elementarer“ Satz sei, der leicht mit Induktion zu beweisen sei, so dass dann mittels 1.7 auch die Richtigkeit der 4-Farben Vermutung resultierte. Aber natürlich war dieser Satz keineswegs elementar, sondern eben genau so schwierig wie der 4-Farben Satz. 1890 stellte dies Heawood klar, und diesem neuen Kapitel des 4-Farben Problems wollen wir uns nun zuwenden.

## Übungen zu Kapitel 1

- 1.\* Der  $n$  dimensionale Würfelgraph  $Q_n$  hat als Ecken alle  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_i = 0$  oder 1, wobei zwei Ecken benachbart sind, wenn sie sich an genau einer Stelle des  $n$ -Tupels unterscheiden. Zeichne die Graphen  $Q_1$  bis  $Q_4$ . Wie viele Ecken und Kanten hat  $Q_n$ ? Was sind die Eckengrade in  $Q_n$ ? Welche  $Q_n$ 's sind plättbar?
2. Welche der drei abgebildeten Graphen sind isomorph?



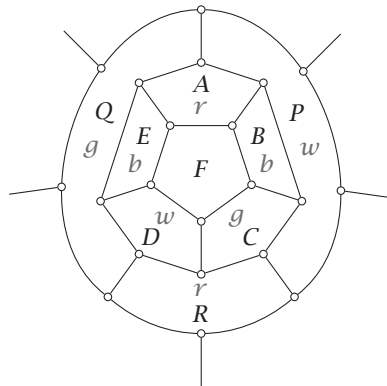
- 3.\* Zeige die Äquivalenz: Eine Kante  $e$  ist Brücke  $\Leftrightarrow e$  liegt in keinem Kreis. Ist der Graph eben, so gilt ferner:  $e$  Brücke  $\Leftrightarrow e$  begrenzt auf beiden Seiten dasselbe Land.
4.  $G$  sei ein einfacher Graph mit mindestens zwei Ecken. Zeige, dass  $G$  stets zwei Ecken vom selben Grad enthält.
5. Zeige, dass die Anzahl der Ecken von ungeradem Grad stets gerade ist.
6. Zeichne alle nichtisomorphen Bäume mit 6 und 7 Ecken. (Es gibt 17.)
- 7.\* Beweise die folgenden Äquivalenzen:  $G = (V, E)$  ist ein Baum  $\Leftrightarrow G$  ist zusammenhängend mit  $|E| = |V| - 1 \Leftrightarrow$  je zwei Ecken sind durch genau einen Weg verbunden.
8. Zeige: Jeder Baum mit  $|V| \geq 2$  hat mindestens 2 Ecken vom Grad 1. Welche Bäume haben genau 2 Ecken vom Grad 1? Welche haben genau 3 Ecken vom Grad 1?
9. Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten. Zeige: Falls  $q > \binom{p-1}{2}$  ist, so ist  $G$  zusammenhängend.
10. Zeichne alle kubischen Graphen (eben oder nicht) bis zu 6 Ecken.
- 11.\* Angenommen,  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  ist eine schlingen- und brückenlose Landkarte, in der jede Ecke Grad  $d$  hat,  $d \geq 2$ , und jedes Land genau  $f$  Grenzen besitzt,  $f \geq 2$ . Stelle mittels 1.4 fest, welche Paare  $(d, f)$  möglich sind und konstruiere für jedes mögliche Paar eine entsprechende Landkarte.
- 12.\* Beweise einen weiteren Satz von Tait: Eine normale Landkarte ist genau dann 2-färbbar, wenn der Grad jeder Ecke gerade ist.
13. Schließe aus der Tatsache, dass jede normale Landkarte  $\mathcal{L}$  ein Land mit höchstens fünf Grenzen besitzt (1.5), mittels Induktion, dass jedenfalls  $\chi(\mathcal{L}) \leq 6$  für alle Landkarten gilt.
- 14.\* An welcher Stelle hat Kempe geirrt?
15. Finde eine 3-Kantenfärbung der Landkarte in Figur 1.12.
- 16.\* Knobelei: 9 Personen stehen auf einem Empfang beisammen. Einige sind miteinander bekannt, andere nicht (Bekanntschaft wird immer beidseitig angenommen). Behauptung: Entweder es gibt 4 Personen unter ihnen, die alle untereinander bekannt sind, oder 3 Personen, von denen keiner einen anderen kennt. (Hinweis: Modellierung als Graph)
17. Rechneraufgabe: Gib Vorschläge, wie ein Graph möglichst ökonomisch zur Ein- und Ausgabe dargestellt werden kann.
18. Rechneraufgabe: Beschreibe einen Algorithmus, der entscheidet, ob zwei Ecken in derselben Komponente liegen.



19. Rechneraufgabe: Erstelle ein Programm zur Erzeugung aller Bäume in einem gegebenen Graphen.
20. Etwas schwieriger. Gegeben  $p$  nummerierte Ecken  $v_1, \dots, v_p$ . Wir wollen die Anzahl der verschiedenen Bäume  $G$  auf  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$  bestimmen. Zwei Bäume heißen dabei gleich, wenn sie genau dieselben Kanten besitzen. Für  $p = 3$  gibt es demnach 3 verschiedene Bäume (die alle als Graphen isomorph sind). Zeige Cayleys Resultat: Auf  $p$  nummerierten Ecken gibt es genau  $p^{p-2}$  verschiedene Bäume. (Hinweis: Induktion)

# 2 Irrtum und Hoffnung

In einer 1890 erschienenen Arbeit analysierte Heawood Kempes Beweisführung der 4-Farben Vermutung und legte einen fatalen Defekt bloß. Blättern wir zum letzten übriggebliebenen Fall zurück: Ein Land  $F$  ist von 5 Ländern  $A, B, \dots, E$  umgeben, die mit den Farben rot, blau, grün, weiß und blau gefärbt sind. Wir nehmen an, dass eine rot-grün Kette von  $A$  nach  $C$  existiert und eine rot-weiß Kette von  $A$  nach  $D$ . Dadurch konnten wir in der blau-weiß Komponente, die  $B$  enthält, die Farben vertauschen, und ebenso in der blau-grün Komponente, die  $E$  enthält. Während es richtig ist, dass jede *einzelne* dieser Vertauschungen wieder eine zulässige Färbung ergibt (wobei allerdings nach wie vor alle 4 Farben um  $F$  herum auftreten), so kann es nach Vornahme *beider* Vertauschungen passieren, dass zwei blaue Länder nun aneinanderstoßen (die vorher weiß bzw. grün gefärbt waren), was unzulässig ist. Der Ausschnitt einer Landkarte in Figur 2.1 demonstriert diese Tatsache.



Figur 2.1

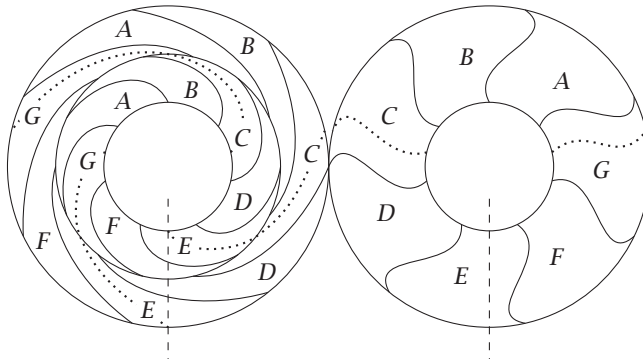
Da  $P$  zur blau-weiß Komponente von  $B$  gehört, erhält  $P$  die neue Farbe blau, und da  $Q$  zur blau-grün Komponente von  $E$  gehört, erhält  $Q$  ebenfalls die Farbe blau – aber  $P$  und  $Q$  haben eine gemeinsame Grenze!

Also, so geht es nicht – und Kempe hat seinen Fehler auch sofort eingesehen. Heawoods Arbeit wurde am Anfang wenig beachtet – er selber hatte sie als eher destruktiv bezeichnet. Völlig zu Unrecht, denn in ihr sind zwei wesentliche positive Sätze enthalten, die die nachfolgende Forschung entscheidend beeinflussten. Zuerst zeigte Heawood, dass mittels der Kempe-Ketten zwar nicht die 4-Färbbarkeit, wohl aber die 5-Färbbarkeit aller Landkarten dargelegt werden kann.

**Satz 2.1** (5-Farbensatz von Heawood). *Jede Landkarte kann mit höchstens 5 Farben gefärbt werden.*

*Beweis.* Die Beweisführung ist wie gewohnt. Wir können induktiv annehmen, dass ein Land  $F$  existiert, für dessen 5 Nachbarn  $A, \dots, E$  alle 5 Farben  $r, b, g, w, s$  (in dieser Reihenfolge) verwendet werden. Existiert keine  $r, g$ -Kette von  $A$  nach  $C$ , so können wir durch Vertauschung eine der beiden Farben einsparen. Im anderen Fall gibt es dann aber keine  $b, w$ -Kette von  $B$  nach  $D$  und wir können hier eine Farbe einsparen.  $\square$

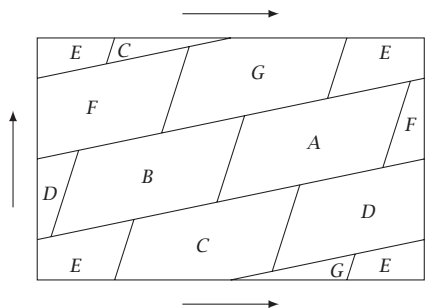
Als Nächstes griff er das Färbungsproblem von Landkarten auf beliebigen geschlossenen Flächen auf. Wir wollen ebenfalls darauf eingehen und das 4-Farben Problem für den Moment etwas zurückstellen. Durch stereographische Projektion haben wir schon angedeutet, dass jede ebene Landkarte auf der Kugeloberfläche realisiert werden kann, und umgekehrt. Betrachten wir nun den *Torus* oder Radschlauch  $T$ .



Figur 2.2

Schon Kempe konstruierte eine Landkarte auf  $T$ , die 6 Farben benötigt. Die Landkarte in Figur 2.2 besteht aus 7 Ländern, die paarweise benachbart sind, so dass wir sogar 7 Farben benötigen. Wir blicken in der Zeichnung von oben und unten auf den Torus, müssen uns also die einzelnen Länder um den Schlauch herum verlängert vorstellen.

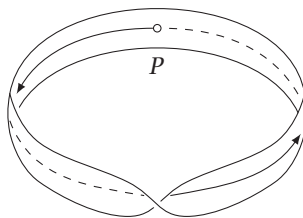
Schneiden wir den Torus längs der gestrichelten Linie auf und entrollen den so erhaltenen Zylinder, so erhalten wir eine ebene Realisierung, in der Ober- und Unterkante zu identifizieren sind, ebenso wie Links- und Rechtskante. Insbesondere sind also die „Eckpunkte“ ein- und derselbe Punkt des Torus. In dieser ebenen Realisierung, dargestellt in Figur 2.3, ist die paarweise Nachbarschaft der 7 Länder nun leichter zu sehen.



Figur 2.3

Was versteht man allgemein unter einer geschlossenen Fläche? In der Topologie lernt man den Begriff einer  $n$ -dimensionalen *Mannigfaltigkeit*. Darunter versteht man einen topologischen Raum  $X$ , der Hausdorffsch und zusammenhängend ist, und in dem jeder Punkt eine Umgebung besitzt, welche homöomorph zur offenen  $n$ -dimensionalen Einheitskugel ist. Die reelle Linie und der Kreisring sind Beispiele 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Eine 2-dimensionale *geschlossene Fläche* (und nur solche werden wir betrachten) ist eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ . Ein erstes Ziel wird es sein, alle geschlossenen Flächen bis auf Homöomorphie (d. h. bis auf stetige Transformationen) zu klassifizieren. Beispielsweise ist jede Kugel homöomorph zu jedem Ellipsoid, aber nicht homöomorph zum Torus. Wie diese Klassifikation vor sich geht, steht in den meisten Topologie Büchern (siehe Goodman oder Ringel im Literaturverzeichnis). Für unsere Zwecke genügt es, das Ergebnis zu notieren.

Zunächst zerfallen die Flächen in zwei große Klassen: die *orientierbaren Flächen* und die *nicht-orientierbaren*. Dabei nennt man eine Fläche (oder allgemein eine Mannigfaltigkeit)  $S$  orientierbar, falls für jede geschlossene Jordan Kurve  $C$  auf  $S$  eine Rotationsrichtung (z. B. im Uhrzeigersinn) erhalten bleibt, wenn wir einmal um  $C$  herumgehen. Ist dies nicht der Fall, so heißt  $S$  nicht-orientierbar. Grob gesagt, bedeutet orientierbar, dass die Fläche *zweiseitig* ist. Am Besten kann man sich dies folgendermaßen verdeutlichen: Eine Fliege, die an der Innenseite der Kugeloberfläche entlang kriecht, kann niemals an die Außenseite gelangen. Dasselbe gilt für den Torus. Diese Flächen haben also zwei eindeutig verschiedene Seiten. Zweiseitige Flächen waren natürlich schon lange bekannt und wurden seit Euler intensiv untersucht. Um die Mitte des 19. Jahrhunderts bemerkten aber die Mathematiker (allen voran Möbius), dass Orientierbarkeit nicht notwendig aus den topologischen Eigenschaften einer Fläche gefolgert werden kann. Das Möbiusband in Figur 2.4 ist einseitig: Die Fliege könnte von  $P$  aus startend rundherum kriechen und auf der „anderen Seite“ landen. Das Möbiusband ist zwar keine geschlossene Fläche, doch sind auch geschlossene nicht-orientierbare Flächen mathematisch ohne Weiteres zu beschreiben, wenn auch nicht ganz leicht vorzustellen.

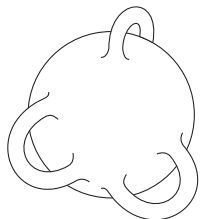


Figur 2.4

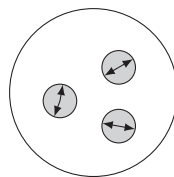
Innerhalb der Klassen der orientierbaren bzw. nicht-orientierbaren Flächen gibt es noch eine weitere Strukturinvariante, das *Geschlecht* der Fläche. Ergebnis:

*Zwei geschlossene Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie gleichen Orientierungscharakter und gleiches Geschlecht haben.*

Innerhalb der Klasse der orientierbaren Flächen ist das Geschlecht eine ganze Zahl  $h \geq 0$ . Die Kugeloberfläche  $S_0$  hat Geschlecht 0, und wir erhalten ein Modell der orientierbaren Fläche  $S_h$  vom Geschlecht  $h$ , indem wir  $h$  „Henkel“ auf die Kugeloberfläche aufsetzen. Figur 2.5 zeigt ein Modell von  $S_3$ . Der Torus ist somit ein Modell von  $S_1$ .



Figur 2.5



Figur 2.6

Innerhalb der Klasse der nicht-orientierbaren Flächen ist das Geschlecht eine natürliche Zahl  $k \geq 1$ . Wir erhalten ein Modell der nicht-orientierbaren Fläche  $N_k$  vom Geschlecht  $k$ , indem wir aus der Kugeloberfläche  $k$  kreisförmige Löcher schneiden und am Rand dieser Löcher überkreuz liegende Punkte identifizieren. Man sagt auch, man setzt  $k$  „Kreuzhauben“ auf die Kugeloberfläche auf. Figur 2.6 zeigt ein Modell von  $N_3$ . Es ist eine nützliche Konvention, die Kugel auch als nicht-orientierbare Fläche  $N_0$  des Geschlechts 0 zuzulassen.

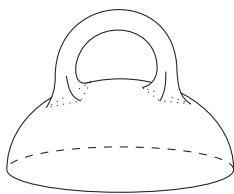
Zurück zum Färbungsproblem. Haben wir eine geschlossene Fläche  $S$  gegeben, so verstehen wir unter einer *Landkarte*  $\mathcal{L}$  auf  $S$  analog zum Bisherigen einen zusammenhängenden Graphen  $G(\mathcal{L})$ , der so in  $S$  eingebettet ist, dass Kanten einander nur in Endecken schneiden (homöomorph zu  $\mathbb{R}$ ), und dass die solcherart entstehenden Länder einfach zusammenhängend sind (homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ ). Die *chromatische Zahl*  $\chi(\mathcal{L})$  von  $\mathcal{L}$  ist wieder die Minimalzahl von Farben, die benötigt wird, um  $\mathcal{L}$  zulässig zu färben. Für eine gegebene Fläche  $S$  scheint es zunächst nicht unplausibel, dass Landkarten auf  $S$  existieren, deren chromatische Zahl beliebig groß wird. Aber genau das Gegenteil ist der Fall – und das ist es, was Heawood in seiner Arbeit gezeigt hat. *Es existiert eine obere Schranke für  $\chi(\mathcal{L})$ , die nur von der Fläche  $S$  abhängt* – und dies gilt für jede Fläche  $S$ .

Eine der berühmtesten Formeln der gesamten Mathematik besagt, dass die Zahl  $|V| - |E| + |R|$  für jede in  $S$  eingebettete Landkarte  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  dieselbe ist, also nur von der Fläche  $S$ , aber nicht von  $\mathcal{L}$  abhängt. Wir können demnach unzweideutig von der *Euler Charakteristik*  $e(S) = |V| - |E| + |R|$  der Fläche  $S$  sprechen. In 1.4 haben wir  $e(S_0) = 2$  für die Ebene und damit für die Kugeloberfläche bewiesen. Allgemein gilt:

**Formel 2.2** (Euler–Poincaré). *Die Euler Charakteristik für  $S_h$  bzw.  $N_k$  ist*

- (i)  $e(S_h) = 2 - 2h \quad (h \geq 0)$ ,
- (ii)  $e(N_k) = 2 - k \quad (k \geq 1)$ .

*Beweisskizze.* Fügen wir zu einer orientierbaren Fläche einen Henkel hinzu, so erniedrigen wir die Charakteristik um 2. Es kommen wie im Fall der Figur 2.7 drei Kanten und drei Länder hinzu, jedoch fallen die zwei „Anschlussländer“ weg. Auf dem Henkel selber wird nun der Induktionsbeweis wie in 1.4 geführt.

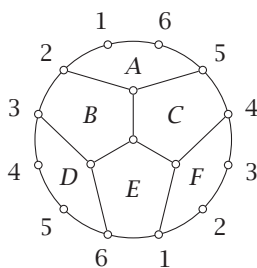


Figur 2.7

Setzen wir also insgesamt  $h$  Henkel auf  $S_0$  auf, so wird die Charakteristik auf  $2 - 2h$  reduziert. Genau so schließt man im nicht-orientierbaren Fall.  $\square$

Die Euler Charakteristik ist also  $2, 0, -2, -4, \dots$  für orientierbare Flächen und  $1, 0, -1, -2, \dots$  für nicht-orientierbare.

**Beispiel.** Die nicht-orientierbare Fläche  $N_1$  (sie ist homöomorph zur reellen projektiven Ebene) kann am besten als Kreisscheibe veranschaulicht werden, in der diametral gegenüberliegende Randpunkte identifiziert werden. Figur 2.8 zeigt eine Landkarte  $\mathcal{L}$  mit 6 Ländern auf  $N_1$ , in der alle Länder paarweise benachbart sind.  $\mathcal{L}$  hat 10 Ecken, 15 Kanten und 6 Länder im Einklang mit  $10 - 15 + 6 = 1 (= e(N_1))$ .



Figur 2.8

Wir kommen zu Heawoods Farbensatz. Sei  $S$  eine geschlossene Fläche, dann bezeichnen wir als *chromatische Zahl*  $\chi(S)$  von  $S$  die Minimalzahl von Farben, die nötig sind, um *jede* beliebige Landkarte  $\mathcal{L}$  auf  $S$  zu färben, also  $\chi(S) = \max \chi(\mathcal{L})$ , erstreckt über alle Landkarten  $\mathcal{L}$  auf  $S$ . Nach Heawoods erstem Resultat 2.1 wissen wir z. B., dass  $\chi(S_0) = 4$  oder  $5$  ist. Ohne Weiteres ist aber nicht ersichtlich, dass für eine beliebige Fläche  $S$  die chromatische Zahl überhaupt endlich sein muss.

**Satz 2.3** (Farbensatz von Heawood). *Sei  $S$  eine geschlossene Fläche mit Euler Charakteristik  $e(S) \leq 1$ . Dann gilt*

$$\chi(S) \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24e(S)}}{2} \right\rceil,$$

wobei  $\lceil x \rceil$  die größte ganze Zahl  $\leq x$  bedeutet.

*Beweis.* Für  $e \leq 2$  sei  $h(e)$  definiert durch  $h(e) := \frac{7+\sqrt{49-24e}}{2}$ . Wir haben  $h(e)^2 - 7h(e) + 6e = 0$ , also  $6(1 - \frac{e}{h(e)}) = h(e) - 1$ . Sei  $\mathcal{L}$  eine Landkarte auf  $S$ . Wir können wie im ersten Kapitel annehmen, dass  $\mathcal{L}$  normal ist, da sich durch Hinzufügen von Kanten die Farbenzahl höchstens vergrößert.  $\mathcal{L}$  habe  $p$  Ecken,  $q$  Kanten und  $r$  Länder. Bezeichnet  $d$  die durchschnittliche Anzahl von Kanten, die ein Land begrenzen, so haben wir

$$3p \leq 2q = dr, \quad p - q + r = e(S),$$

und somit

$$q \leq 3(q - p) = 3(r - e(S)).$$

Daraus folgt

$$d = \frac{2q}{r} \leq \frac{6(r - e(S))}{r} = 6\left(1 - \frac{e(S)}{r}\right).$$

**Behauptung.**  $\mathcal{L}$  kann mit  $\lfloor h(e(S)) \rfloor$  Farben gefärbt werden.

Wir führen Induktion nach  $r$ . Ist  $r \leq h(e(S))$ , d. h.  $r \leq \lfloor h(e(S)) \rfloor$ , so ist die Behauptung trivialerweise richtig. Sei also  $r > h(e(S))$ .

**Fall 1.**  $e = e(S) \leq 0$ . Dann haben wir  $d \leq 6(1 - \frac{e}{r}) \leq 6(1 - \frac{e}{h(e)}) = h(e) - 1$ . Es existiert also ein Land  $F$ , welches an höchstens  $\lfloor h(e) \rfloor - 1$  andere Länder angrenzt. Kontrahieren wir  $F$  wie üblich zu einem Punkt, so bleibt eine Farbe übrig, die für  $F$  verwandt werden kann.

**Fall 2.**  $e = e(S) = 1$  (also  $S = N_1$ ). Hier ist  $d \leq 6(1 - \frac{1}{r}) < 6 = h(1)$ . Wir können nun denselben Schluss mittels Kontraktion durchführen.  $\square$

Warum wurde im Beweis der Fall  $e(S) = 2$ , also die Kugeloberfläche, ausgeschlossen? Hier haben wir  $d \leq 6(1 - \frac{2}{r}) < 6$ , aber  $h(2) = 4$ . Also können wir mit dem üblichen Induktionsbeweis nur  $\chi(S_0) \leq 6$  schließen, ein sogar schwächeres Ergebnis als der uns schon bekannte Satz 2.1.

Setzen wir 2.2 in die Formel 2.3 ein, so erhalten wir:

**Folgerung 2.4.** *Es gilt:*

$$(i) \quad \chi(S_h) \leq \lfloor \frac{7+\sqrt{1+48h}}{2} \rfloor \quad (h \geq 1),$$

$$(ii) \quad \chi(N_k) \leq \lfloor \frac{7+\sqrt{1+24k}}{2} \rfloor \quad (k \geq 1).$$

Man beachte, dass für  $h = 0$  genau  $\chi(S_0) \leq 4$  resultieren würde - aber der Beweis funktioniert eben leider genau für diesen Fall nicht.



**Percy John Heawood** wurde 1861 in Newport, England geboren und studierte mit ausgezeichnetem Erfolg am Exeter College in Oxford. Von 1887 an lehrte er an der Universität von Durham, wo er bis zu seiner Emeritierung (mit 78 Jahren!) blieb. Er verfasste mehrere Arbeiten zur Zahlentheorie und Geometrie, aber das Zentrum seines Schaffens blieb sein ganzes Leben das 4-Farben Problem, zu dem er wegweisende Arbeiten im Zeitrahmen von 60 Jahren veröffentlichte. Seine Leidenschaft außerhalb der Mathematik war die Rettung des vom Verfall bedrohten Durham Castle. Für seine hartnäckigen und erfolgreichen Bemühungen wurde er mit dem Orden des British Empire geehrt. Er starb 1955 in Durham.

**Beispiele.** Für den Torus  $S_1$  und die projektive Ebene  $N_1$  errechnen wir  $\chi(S_1) \leq 7$ ,  $\chi(N_1) \leq 6$ . Da wir in den Figuren 2.2 und 2.8 bereits entsprechende maximal chromatische Landkarten konstruiert haben, können wir nun für beide Zahlen Gleichheit feststellen.

Heawoods Resultat ließ die Richtigkeit der 4-Farben Vermutung als fast sicher erscheinen. Außerdem legte es das Studium der Färbbarkeit auf Flächen höheren Geschlechts nahe, um so vielleicht auch neuen Aufschluss über die Kugel bzw. Ebene zu erhalten. Insbesondere wurde sofort die Frage aufgegriffen, wie nahe die obere Schranke in 2.4 an die wahre chromatische Zahl herankommt. Da die Entwicklung und endgültige Lösung dieser Frage eine der spannendsten mathematischen Geschichten ist, wollen wir, der allgemeinen Historie etwas vorgreifend, näher darauf eingehen.

Auch Heawood unterlief eine Ungenauigkeit. Er erkannte klar, dass zum Beweis der Gleichheit in 2.4(i) (Heawood behandelte nur den orientierbaren Fall) man tatsächlich eine Landkarte auf  $S$  konstruieren muss, welche  $\lfloor h(e(S)) \rfloor$  Farben benötigt. Aber er führte dies nur für den Torus durch und stand offenbar unter dem Eindruck, dass der allgemeine Fall ähnlich ginge. Weit gefehlt: Es brauchte 78 Jahre, bis der Beweis beendet war (natürlich ausgenommen  $S_0$ ), und er wird nach wie vor verbessert.

Heffter wies 1891 auf die Unvollständigkeit in Heawoods Beweisführung hin und war auch der erste, der für einige weitere Werte von  $h$  Gleichheit in 2.4(i) zeigte. Insbesondere steuerte er zwei wichtige neue Ideen bei.

Betrachten wir die Fläche  $S_h$ . Um  $\chi(S_h)$  zu berechnen, müssen wir die *maximale* chromatische Zahl  $\chi(\mathcal{L})$  aller Landkarten  $\mathcal{L}$  auf  $S_h$  bestimmen. Es ist leicht einzusehen, dass  $\chi(S_h) \leq \chi(S_{h+1})$  wie auch  $\chi(N_k) \leq \chi(N_{k+1})$  gilt. Heffter drehte nun das Problem um. Sei  $\mathcal{L}_n$  eine Landkarte mit  $n$  Ländern, die alle zueinander benachbart sind. Was ist das *minimale* Geschlecht  $h$  (oder  $k$  im nicht-orientierbaren Fall), so dass  $\mathcal{L}_n$  in  $S_h$  (bzw.  $N_k$ ) eingebettet werden kann? Diese minimale Zahl wollen wir mit  $\gamma(n)$  im orientierbaren und  $\bar{\gamma}(n)$  im nicht-orientierbaren Fall bezeichnen. Da  $\mathcal{L}_5$  nicht in die Ebene eingebettet werden kann, aber in den Torus und in  $N_1$ , haben wir z. B.  $\gamma(5) = \bar{\gamma}(5) = 1$ . Natürlich ist  $\gamma(4) = \bar{\gamma}(4) = 0$ .

**Lemma 2.5.** Für  $n \geq 3$  gilt:

$$(i) \quad \gamma(n) \geq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil,$$

$$(ii) \quad \bar{\gamma}(n) \geq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \rceil.$$

Dabei ist  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl  $\geq x$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{L}_n$  auf  $S_h$  eingebettet, wobei wir wie immer annehmen können, dass jede Ecke an mindestens 3 Kanten anstößt. Aus  $|V| - |E| + |R| = 2 - 2h$ ,  $3|V| \leq 2|E|$ , erhalten wir  $|E| \leq 3|R| - 6 + 6h$  und wegen  $|R| = n$ ,  $|E| \geq \binom{n}{2}$  daraus  $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n - 6 + 6h$  oder  $h \geq \frac{n(n-1) - 6n + 12}{12} = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$ . Das heißt also,  $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$  ist eine untere Schranke für jedes solche  $h$ , und damit auch für das minimale  $\gamma(n)$ . Der Beweis von (ii) verläuft völlig analog.  $\square$

Lemma 2.5 ist, wie auch der Beweis andeutet, ein Gegenstück zu 2.3 und darum noch kein großer Fortschritt. Was aber nun wirklich weiterhilft ist die Tatsache, dass aus der Gleichheit in 2.5 für alle  $n$  auch die Gleichheit in 2.3 für alle  $S$  folgt. Es ist ja



gewiss leichter (wenn auch noch schwer genug), eine *gegebene* Landkarte  $\mathcal{L}_n$  in ein *bestimmtes*  $S_{\bar{y}(n)}$  (bzw.  $N_{\bar{y}(n)}$ ) einzubetten als für *jede* Fläche prinzipiell unendlich viele Landkarten auf ihre Färbbarkeit hin zu untersuchen. Betrachten wir zunächst den orientierbaren Fall.

**Lemma 2.6.** *Aus der Gleichheit in 2.5(i) für alle  $n \geq 3$  folgt die Gleichheit in 2.4(i) für alle  $h \geq 1$ .*

*Beweis.* Sei  $S_h$  gegeben und  $\mathcal{L}_n$  auf  $S_h$  eingebettet mit  $n$  maximal. Dann gilt nach 2.4(i)

$$n \leq \chi(S_h) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48h}}{2} \right\rfloor.$$

Aus der Maximalität von  $n$  folgt  $\bar{y}(n+1) > h$ . Setzen wir also Gleichheit in 2.5(i) voraus, so erhalten wir  $\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{12} \rceil > h$  oder

$$n^2 - 5n + 6 - 12h = \left( n - \frac{5 + \sqrt{1 + 48h}}{2} \right) \left( n - \frac{5 - \sqrt{1 + 48h}}{2} \right) > 0.$$

Daraus folgt  $n > \frac{5 + \sqrt{1 + 48h}}{2}$ , also

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 48h}}{2} - 1 < \chi(S_h) \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 48h}}{2}$$

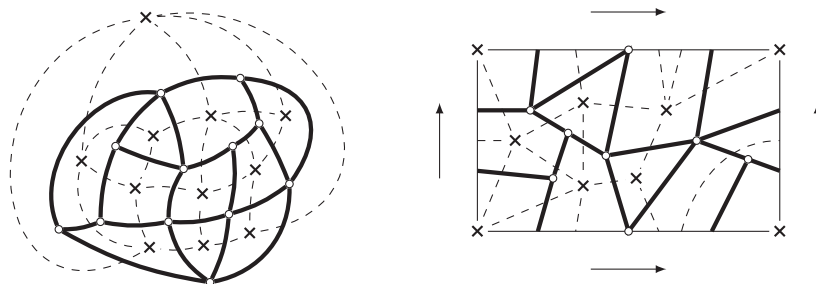
d. h.  $\chi(S_h) = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48h}}{2} \rfloor$ . □

Wie wir gleich sehen werden, wurde für orientierbare Flächen tatsächlich Gleichheit in 2.5(i) für alle  $n$  bewiesen – und damit auch in 2.4(i). Der nicht-orientierbare Fall enthält jedoch merkwürdigerweise *eine* Ausnahme:  $n = 7$ . Franklin zeigte 1934, dass  $\mathcal{L}_7$  *nicht* in  $N_2$  eingebettet werden kann, obwohl 2 die Schranke in 2.5(ii) für  $n = 7$  ist. Diese Ausnahme zieht wegen  $\bar{y}(7) = 3$  die eine Ausnahme  $\chi(N_2) = 6$  in der Heawood Schranke 2.4(ii) nach sich. Diese Ausnahmefläche  $N_2$  wird als *Kleinsche Flasche* bezeichnet (obwohl sie, da sie ja nur eine Seite hat, als Flasche denkbar ungeeignet wäre). Abgesehen von dieser einen Ausnahme verläuft der Beweis von 2.7 völlig analog zu 2.6.

**Lemma 2.7.** *Aus der Gleichheit in 2.5(ii) für alle  $n \neq 7$  und  $\bar{y}(7) = 3$  folgt die Gleichheit in 2.4(ii) für alle  $k \geq 1$ ,  $k \neq 2$  und  $\chi(N_2) = 6$ .*

Heffter selbst bewies Gleichheit in 2.5(i) für  $n \leq 12$  und für eine merkwürdige Serie, deren erste Glieder  $n = 19, 31, 55, 67, 139, \dots$  sind. Und dabei blieb es für längere Zeit.

Heffters zweite Idee war es, den Begriff der *Dualität* von Landkarten auszunützen. Ist  $\mathcal{L}$  eine Landkarte auf der Fläche  $S$ , so können wir eine *duale Landkarte*  $\mathcal{L}^*$  auf folgende Weise konstruieren: Ins Innere jedes Landes platzieren wir eine Ecke und wir verbinden zwei solche Ecken  $v^*$ ,  $w^*$  durch eine Kante  $e^*$  in  $\mathcal{L}^*$  genau dann, wenn die zugehörigen Länder in  $\mathcal{L}$  eine gemeinsame Grenze  $e$  haben, wobei wir  $e^*$  durch  $e$  kreuzen. (Ist  $e$  eine Brücke, so zeichnen wir eine Schlinge  $e^*$  bei  $v^*$ .) Figur 2.9 zeigt diese Konstruktion in der Ebene und auf dem Torus.



Figur 2.9

Für die zu  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  duale Landkarte  $\mathcal{L}^* = (V^*, E^*, R^*)$  gilt klarerweise  $|V^*| = |R|$ ,  $|E^*| = |E|$ ,  $|R^*| = |V|$ . Da wir das Gerüst  $G = G(\mathcal{L})$  einer Landkarte  $\mathcal{L}$  stets als zusammenhängend voraussetzen, gilt offenbar  $\mathcal{L}^{**} \cong \mathcal{L}$  mit den natürlichen Korrespondenzen. Betrachten wir nun das Gerüst  $G^* = G(\mathcal{L}^*)$  von  $\mathcal{L}^*$  (in der Figur gestrichelt gezeichnet).  $G^*$  heißt entsprechend der zu  $G$  *duale Graph* und es gilt  $G^{**} \cong G$ . Eine *Färbung der Länder* von  $\mathcal{L}$  entspricht genau einer *Eckenfärbung* von  $G^*$  in dem Sinne, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben erhalten. Halten wir dies eigens fest.

**Definition.** Sei  $G = (V, E)$  irgendein Graph. Eine *Eckenfärbung* von  $G$  ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow M$  ( $M$  Farbenmenge), so dass  $uv \in E$  impliziert  $f(u) \neq f(v)$ . Die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$  ist die kleinste Zahl von Farben, die eine Färbung ermöglichen.

Wir haben somit  $\chi(\mathcal{L}) = \chi(G^*)$ . Färbungsprobleme auf Landkarten sind damit äquivalent zu Färbungsproblemen auf Graphen, und diese sind meist wesentlich einfacher zu behandeln. In späteren Kapiteln werden wir aus diesem Grund überwiegend die Graphen-Version des 4-Farben Problems heranziehen. Sind  $\mathcal{L}$  bzw.  $G(\mathcal{L})$  in der Fläche  $S$  eingebettet, so auch  $\mathcal{L}^*$  bzw.  $G^* = G(\mathcal{L}^*)$ . Insbesondere ist  $\mathcal{L}$  genau dann eine Landkarte, wenn der Graph  $G^*$  eben ist. Wir stellen fest:

**Satz 2.8.** *Die 4-Farben Vermutung ist äquivalent zur Vermutung, dass alle plättbaren Graphen 4-färbbar sind.*

Aufgrund der Beziehung  $\mathcal{L} \leftrightarrow G^*$  (Landkarte  $\leftrightarrow$  ebener Graph) können wir Sätze über Landkarten durch „Dualisierung“ auf Graphen übertragen. Ein erstes Beispiel ist die duale Form von 1.5 bzw. 1.6. Brücken in  $\mathcal{L}$  entsprechen offenbar Schlingen in  $G^*$  und umgekehrt. Also erhalten wir:

**Satz 2.9.** *Es sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender, einfacher, ebener Graph mit mindestens drei Kanten. (Man beachte, dass jedes Land dann mindestens drei Grenzen haben muss.) Bezeichnet  $p_i$  die Anzahl der Ecken vom Grad  $i$ , so gilt*

$$\sum_{i \geq 1} (6 - i) p_i \geq 12,$$

und wir haben Gleichheit in dieser Formel, wenn  $G$  brückenlos ist und alle Länder genau 3 Grenzen haben. Insbesondere muss also stets eine Ecke vom Grad  $\leq 5$  existieren.

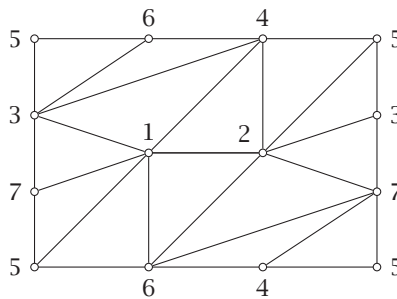
Zurück zu allgemeinen Flächen  $S$ . Ein Graph  $G$  heißt *einbettbar* in  $S$ , falls  $G$  isomorph ist zu einem Graphen, dessen Ecken Punkte von  $S$  sind und dessen Kanten Jordan Kurven auf  $S$  sind, die sich nur in entsprechenden Ecken schneiden. Um  $\chi(S)$  zu bestimmen, können wir nach dem eben Gesagten auch das Maximum von  $\chi(G)$  über alle in  $S$  einbettbaren Graphen heranziehen. Wir definieren nun naheliegenderweise das *Geschlecht*  $\gamma(G)$  (bzw. das nicht-orientierbare Geschlecht  $\bar{\gamma}(G)$ ) eines Graphen  $G$  als die kleinste Zahl  $h$  (bzw.  $k$ ), so dass  $G$  in  $S_h$  (bzw.  $N_k$ ) eingebettet werden kann.

Es erhebt sich sofort die Frage, ob jeder Graph in eine gewisse Fläche  $S_h$  (bzw.  $N_k$ ) eingebettet werden kann. Dies ist aber klar. Wir zeichnen  $G$  zunächst auf der Kugeloberfläche, wobei Kanten sich schneiden dürfen. Zu jeder Kante  $uv$  können wir nun einen Henkel aufsetzen, über den die Kante läuft. Diese Henkel können ersichtlich so deformiert werden, dass sich keine Kreuzungen mehr ergeben. Ähnlich verläuft die Überlegung im nicht-orientierbaren Fall. Der Graph  $G^*$  für die Landkarte  $\mathcal{L}_n$  von vorhin hat  $n$  Ecken, die alle paarweise benachbart sind. Wir nennen  $G^*$  den *vollständigen Graphen* auf  $n$  Ecken mit der Bezeichnung  $K_n$ . Die Zahlen  $\gamma(n)$  bzw.  $\bar{\gamma}(n)$  sind demnach nicht anderes als das Geschlecht  $\gamma(K_n)$  bzw.  $\bar{\gamma}(K_n)$ .

Als Zusammenfassung der beiden Heffterschen Ideen können wir 2.5 bis 2.7 so formulieren:

**Satz 2.10.** Für  $n \geq 3$  gilt:  $\gamma(K_n) \geq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$ ,  $\bar{\gamma}(K_n) \geq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \rceil$ . Gilt für alle  $n$  Gleichheit mit der einen Ausnahme  $\bar{\gamma}(K_7) = 3$ , so haben wir auch Gleichheit in Heawoods Farbensatz 2.3 mit der einen Ausnahme  $\chi(N_2) = 6$  (immer abgesehen von  $S_0$ ).

In dieser Form der Grapheneinbettung war die Bestimmung von  $\gamma(K_n)$  bzw.  $\bar{\gamma}(K_n)$  als *Fadenproblem* bekannt geworden: Können wir  $n$  Punkte auf  $S_h$  wählen und alle diese Punkte durch  $\binom{n}{2}$  Fäden verbinden, die sich niemals kreuzen? Figur 2.10 zeigt die zu Figur 2.3 duale Fadenfigur auf dem Torus für  $n = 7$ .



Figur 2.10

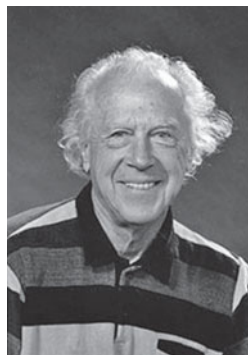
Wie ging es weiter? 1910 behandelte Tietze erstmalig den nicht-orientierbaren Fall und bewies 2.4(ii). Er gab auch an, dass  $\chi(N_2) \geq 6$  ist, während die obere Schranke ja 7 ist. Dass tatsächlich  $\chi(N_2) = 6$  gilt, wurde, wie schon erwähnt, von Franklin bewiesen,

der noch weitere Werte angab. Bis 1939 war bekannt, dass Gleichheit in 2.4(ii) für  $k \leq 7$ ,  $k \neq 2$  gilt. Schließlich war es Ringel, der 1954 die vollkommene Lösung angab:  $\bar{\gamma}(n) = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \rceil$  gilt stets, mit der einen Ausnahme  $\bar{\gamma}(7) = 3$ , und damit war auch der Heawoodsche Farbensatz im nicht-orientierbaren Fall endgültig bewiesen.

Der orientierbare Fall war ungleich schwieriger. Nach Heffter, der wie erwähnt, Gleichheit in 2.5(i) für  $n \leq 12$  und einzelne weitere Werte bewies, dauerte es bis 1952, als Ringel Gleichheit für  $n = 13$  nachwies. 1954 folgte, ebenfalls von Ringel, der entsprechende Beweis für alle  $n$  der Form  $n = 12k + 5$  und 1961 für alle  $n = 12k + r$ , mit  $r = 3, 7, 10$ . Danach hatten mehrere Mathematiker Anteil an der Lösung, allen voran Ringel, Youngs und Gustin. Ende Februar 1968 war nur noch der Einzelfall  $n = 30$  offen, und dieser Gnadenstoß wurde von J. Mayer vorgenommen, einem Professor für französische Literatur.

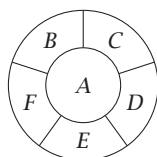
Das Fadenproblem war gelöst und damit, wie wir in 2.10 festgestellt haben, auch der Heawoodsche Farbensatz endgültig bewiesen. Ja, eben nicht ganz endgültig. Die Kugeloberfläche oder äquivalent dazu die Ebene war immer noch offen. Viele Erkenntnisse waren gewonnen worden, die die Hoffnung auf eine Lösung nährten. Aber noch war die Frage ungeklärt: Ist  $\chi(S_0) = 4$  oder 5? Und so wollen wir den Faden der Entwicklung des 4-Farben Problems wieder aufnehmen.

*Gerhard Ringel* wurde 1919 in Kollnbrunn, Österreich geboren, wuchs in Böhmen auf und begann sein Mathematik Studium in Prag. Nach Kriegseinsatz und sowjetischer Kriegsgefangenschaft konnte er erst 1949 sein Studium in Bonn fortsetzen. Nur zwei Jahre später promovierte er über den Farbensatz auf nicht-orientierbaren Flächen. Nach einer Lehrtätigkeit in Bonn und Frankfurt wurde er 1960 an die FU Berlin berufen. Während dieser Zeit bewies er zusammen mit J. W. T. Youngs den Farbensatz, der seither ihre Namen trägt. 1970 folgte er Youngs an die University of California, Santa Cruz. Er war eine in jeder Hinsicht „colorful“ Persönlichkeit: ausgewiesener Schmetterlingssammler und Entomologe, begeisterter Tennisspieler und Wellenreiter, und unermüdlicher Erfinder von mathematischen Rätseln. Er starb 2008 in Santa Cruz.

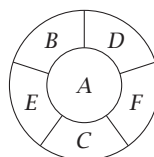


## Übungen

1. Verifiziere die Bemerkung nach 2.1, dass jede ebene Landkarte auf der Kugel realisiert werden kann, und umgekehrt.
- 2.\* Wir nennen einen Graphen  $G = (V, E)$  *bipartit*, falls die Eckenmenge  $V$  in zwei disjunkte Teile  $V_1, V_2$  zerlegt ist, so dass alle Kanten eine Ecke in  $V_1$  und die andere in  $V_2$  haben. Ist  $|V_1| = m, |V_2| = n$  und enthält  $G$  alle Kanten zwischen  $V_1$  und  $V_2$ , so heißt  $G$  *vollständig bipartit*, mit der Bezeichnung  $K_{m,n}$ . Z.B. ist  $K_{2,2}$  isomorph zum Kreis der Länge 4. Zeige:
  - a.  $K_{3,3}$  ist nicht plättbar, entweder direkt aus dem Jordanschen Kurvensatz oder mittels 1.4.
  - b.  $K_{3,3}$  kann in den Torus kreuzungsfrei eingebettet werden.
- 3.\* Eine Einbettung eines Graphen in eine Fläche heiße *regulär*, falls alle Länder dieselbe Anzahl von Grenzen besitzen. Finde reguläre (und schöne) Einbettungen von  $K_{4,4}$  und  $K_{3,6}$  in den Torus.
4. Betrachte den Petersen Graphen  $P$  (Figur 3.13). Zeige:
  - a.  $P$  ist nicht plättbar,
  - b. die Kanten von  $P$  können nicht 3-gefärbt werden,
  - c.  $P$  kann in den Torus eingebettet werden.
5. Bette den vollständigen Graphen  $K_6$  in die projektive Ebene  $N_1$  ein.
6. Können  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  in das Möbius Band eingebettet werden?
7. In Ringels Erde-Mond Problem hat jedes Land einer Landkarte eine Kolonie auf dem Mond. Die Zahl  $\chi_2(\mathcal{L})$  ist die Minimalzahl von Farben, wobei angrenzende Länder auf der Erde oder Mond verschieden gefärbt werden (ein Land und seine Kolonie erhalten stets die gleiche Farbe). In dem Beispiel sind je zwei der Länder (+ Kolonie) benachbart, also ist  $\chi_2 = 6$ .



Erde



Mond

Konstruiere  $\mathcal{L}$  mit  $\chi_2(\mathcal{L}) = 8$ .

- 8.\* Die *Platonischen Graphen* sind die Gerüstgraphen der Platonischen Körper: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Die ersten beiden sind isomorph zu  $K_4$  bzw.  $Q_3$  (siehe Übung 1 in Kapitel 1), die letzten sind in Figur 3.14 bzw. 5.9 abgebildet. Zeichne jeweils die dualen Graphen. Welche sind selbstdual, d. h. isomorph zum dualen Graphen?
9. Bette  $K_6$  in den Torus ein und zeichne den dualen Graphen. Welche Eigenschaften hat dieser Graph?
- 10.\* Gegeben die beiden ebenen Graphen:



Zeige  $G \cong H$ , aber  $G^* \neq H^*$ . Ist 7 die kleinste Eckenzahl, wo dies möglich ist?

11. Ein *Rad*  $W_n$  ist ein Kreis  $C_n$  der Länge  $n$  zusammen mit einer weiteren Ecke, die mit allen Kreisecken verbunden ist. (Beispiel:  $W_3 \cong K_4$ ) Zeige, dass alle Räder plättbar sind und als ebene Graphen selbstdual sind. Welche weiteren Graphen sind selbstdual?
- 12.\* Gehen wir von einem ebenen Graphen  $G = G(\mathcal{L})$  zu seinem Dual  $G^* = G(\mathcal{L}^*)$  über, so erhalten wir zusammengehörige Begriffspaare. Beispiel: Anzahl der Grenzen  $\leftrightarrow$  Grad der Ecke. Finde weitere Begriffspaare. Dualisiere die Aussage in Übung 12 aus Kapitel 1.
13. Beweise einen weiteren Farbensatz von Heawood: Eine kubische normale ebene Landkarte ist 3-färbbar  $\Leftrightarrow$  alle Länder haben eine gerade Anzahl von Grenzen. (Hinweis: Dualisieren!)
- 14.\* Wie sieht eine Landkarte aus, deren Ecken mit 2 Farben zulässig gefärbt werden können und ebenso deren Länder?
15. Zeige mit Hilfe von 2.10, dass es keinen vollständigen Graphen vom orientierbaren Geschlecht 7 gibt. Was ist die nächste Zahl, welche nicht als Geschlecht eines  $K_p$  auftritt? Bestimme ähnliche Lücken beim nicht-orientierbaren Geschlecht.
- 16.\* Zeige  $\gamma(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil$  für alle  $m, n$ . Wie lautet die entsprechende Ungleichung für  $\bar{\gamma}(K_{m,n})$ ? Bestimme  $\gamma(K_{4,4})$ .
17. Knobelei. Wir wissen schon, dass  $K_{4,4}$  nicht plättbar ist. Bei jeder Realisierung von  $K_{4,4}$  in der Ebene müssen demnach Kreuzungspunkte auftreten. Was ist die kleinstmögliche Zahl von Kreuzungen, die erreicht werden kann?
18. Zeige, dass jeder einfache Graph in  $\mathbb{R}^3$  kreuzungsfrei realisiert werden kann (Ecken = Punkte, Kanten = Jordansche Kurven).
19. Rechneraufgabe: Entwirf einen Algorithmus, der einen beliebigen ebenen Graphen mit 5 Farben färbt.
20. Etwas schwieriger. Zeige, dass jeder einfache plättbare Graph so in die Ebene eingebettet werden kann, dass alle Kanten gerade Linien sind. (Hinweis: Induktion)

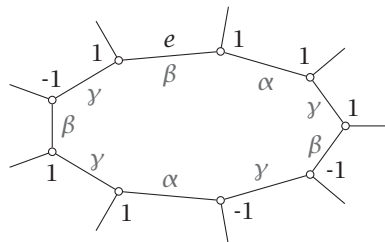
# 3 Beginn der Graphentheorie

Wenngleich um 1900 die 4-Farben Vermutung wohl nach wie vor als kombinatorische oder topologische Merkwürdigkeit angesehen wurde, die vielleicht mit einer neuen Idee auf einen Schlag gelöst werden könnte, so waren auch bereits erste Ansätze zu erkennen, das Problem in einen theoretischen Rahmen einzugliedern. Im Wesentlichen wurden fünf Richtungen eingeschlagen, die wir nun diskutieren wollen.

Heawoods Arbeit von 1890 und die meisten seiner späteren Arbeiten schlugen eine *Arithmetisierung* des Problems vor. Er bewies zunächst, aufbauend auf Taits Farbensatz 1.7, dass eine kubische normale Landkarte 4-färbbar ist, vorausgesetzt dass alle Länder von einer durch 3 teilbaren Anzahl von Grenzen umrandet werden. (Unter Landkarte verstehen wir von nun an natürlich wieder eine ebene Landkarte.) Als Verallgemeinerung dieser Bemerkung zeigte er:

**Satz 3.1** (Heawood). *Sei  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  eine kubische normale Landkarte.  $\mathcal{L}$  kann genau dann 4-gefärbt werden, wenn eine Funktion  $h : V \rightarrow \{1, -1\}$  existiert solcherart, dass für alle Länder  $F$  die Summe  $\sum_{v \in F} h(v)$ , erstreckt über alle Ecken  $v$  am Rand von  $F$ , durch 3 teilbar ist - in Zeichen  $\sum_{v \in F} h(v) \equiv 0 \pmod{3}$ .*

*Beweis.* Ist  $\mathcal{L}$  4-färbbar, so können die Kanten nach 1.7 mit 3 Farben  $\alpha, \beta, \gamma$  gefärbt werden. Rund um eine Ecke  $v$  erscheinen die Farben im Uhrzeigersinn entweder in der Reihenfolge  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$  oder in der Reihenfolge  $\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$ . Im ersten Fall setzen wir  $h(v) = 1$ , im zweiten  $h(v) = -1$ . Wir müssen zeigen, dass die so konstruierte Funktion  $h$  die Bedingung des Satzes erfüllt. Sei  $F$  ein Land und  $e$  eine Grenze von  $F$ . Wir durchlaufen die Grenzen von  $F$  beginnend mit  $e$  im Gegenuhrzeigersinn. Sind  $\ell$  und  $m$  zwei aufeinanderfolgende Grenzen, so ist die Farbe von  $m$  eindeutig durch die Farbe von  $\ell$  und den Wert  $h(v)$  der gemeinsamen Ecke bestimmt. Hat  $\ell$  beispielsweise Farbe  $\beta$  und ist  $h(v) = -1$ , so muss die Farbe von  $m$  gleich  $\alpha$  sein. Da nach einem Umlauf wieder die Farbe von  $e$  resultieren muss, folgt  $\sum_{v \in F} h(v) \equiv 0 \pmod{3}$ ; siehe Figur 3.1.



Figur 3.1

Ist umgekehrt  $h : V \rightarrow \{1, -1\}$  gegeben, so konstruiert man eine Kantenfärbung, indem man mit einer beliebigen Kante beginnt und dann wie in Figur 3.1 weiterfärbt. □

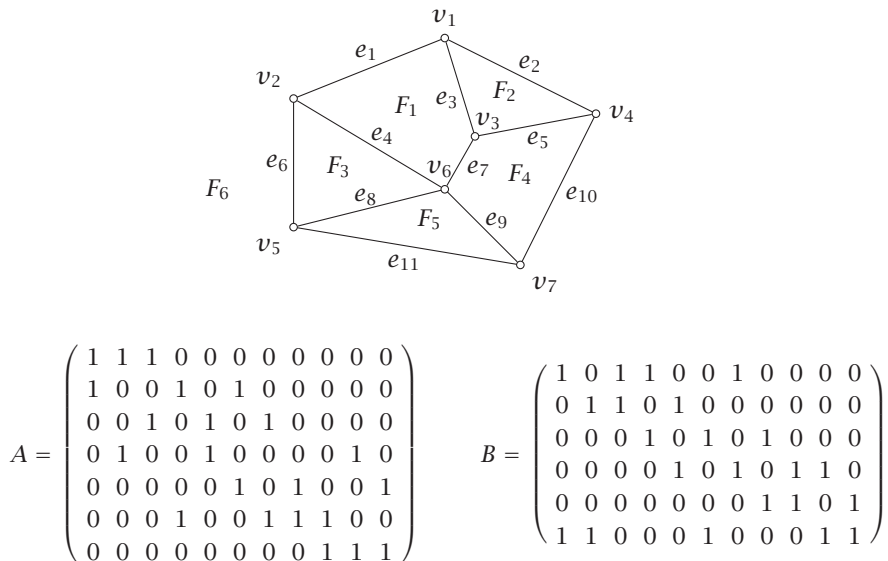
Satz 3.1 kleidet das 4-Farben Problem in eine rein arithmetische Form. Sei eine kubische normale Landkarte  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  gegeben. Mit jeder Ecke  $v_i$  assoziieren wir eine Variable  $x_i$ , und zu jedem Land  $F$  stellen wir eine Kongruenz

$$x_i + x_j + x_k + \cdots + x_\ell \equiv 0 \pmod{3}$$

auf, wobei  $v_i, v_j, v_k, \dots, v_\ell$  die Ecken am Rand von  $F$  sind. Wir erhalten dadurch ein System von Kongruenzen (in dem jedes  $x_i$  in genau drei Kongruenzen vorkommt), und nach 3.1 folgt, dass die 4-Farben Vermutung richtig ist, wenn jedes solche System von Kongruenzen eine Lösung mit  $x_i = +1$  oder  $-1$  für alle  $i$  hat. Heawood selbst untersuchte allgemein solche Kongruenzen in einer Reihe von Arbeiten. Er kam einer Lösung nicht näher und seine Methode wurde von anderen Mathematikern kaum übernommen, aber es war doch der erste bedeutsame Versuch, andere als rein kombinatorische oder topologische Methoden heranzuziehen.

Einen ähnlichen, *geometrisch* motivierten, Weg beschritt Veblen in einer Arbeit 1912. Er begann, indem er eine Landkarte  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  durch ein Paar von *Inzidenzmatrizen* beschrieb, eine Idee, die schon in Kirchhoffs Arbeit 1847 erscheint.

$\mathcal{L}$  sei wie üblich normal (es genügt  $\mathcal{L}$  als brückenlos vorauszusetzen) und habe  $p$  Ecken,  $q$  Kanten und  $r$  Länder. Wir nummerieren die Ecken  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$  und ebenso  $E = \{e_1, \dots, e_q\}$ ,  $R = \{F_1, \dots, F_r\}$ . Die *Ecken-Kanten Inzidenzmatrix*  $A$  ist eine 0,1-Matrix mit  $p$  Zeilen und  $q$  Spalten, in der die Zeilen zu den Ecken und die Spalten zu den Kanten korrespondieren mit einer 1 an der  $i, j$ -ten Stelle wenn  $v_i$  und  $e_j$  inzidieren, und einer 0 wenn dies nicht der Fall ist. Ganz analog wird die *Länder-Kanten Inzidenzmatrix*  $B$  mit  $r$  Zeilen und  $q$  Spalten definiert. Figur 3.2 zeigt eine Landkarte und die zugehörigen Inzidenzmatrizen.



Figur 3.2

Wir fassen  $A$  und  $B$  als Matrizen über dem Körper  $GF(2)$  mit zwei Elementen 0,1 auf, d.h. wir addieren und multiplizieren nach den Regeln  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ ,

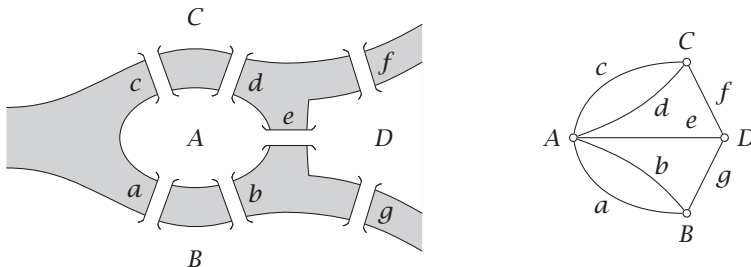


$1+1 = 0, 0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0, 1 \times 1 = 1$ . Jede Zeile von  $A$  oder  $B$ , und allgemein jeden  $0, 1$ -Vektor  $c = (c_1, \dots, c_q)$  können wir unzweideutig mit der Menge  $C$  von Kanten identifizieren, für die  $c_i = 1$  ist, also  $C = \{e_i \in E : c_i = 1\}$ . Die Addition von Vektoren  $(c_1, \dots, c_q) + (d_1, \dots, d_q) = (c_1 + d_1, \dots, c_q + d_q)$  lässt sich sofort auf die Mengen  $C$  und  $D$  übertragen. Da  $c_i + d_i = 1$  genau dann gilt, wenn  $e_i \in C, e_i \notin D$  oder  $e_i \in D, e_i \notin C$  ist, ist die Summe  $C + D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$  genau die *symmetrische Differenz* von  $C$  und  $D$ . Dem Nullvektor  $(0, 0, \dots, 0)$  entspricht natürlich die leere Kantenmenge. Nach den Rechenregeln folgt, dass das innere Produkt  $\sum_{i=1}^q c_i d_i = 1$  oder  $= 0$  ist, je nachdem, ob der Durchschnitt  $C \cap D$  ungerade oder gerade viele Kanten enthält.

Betrachten wir nun das lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$ . Ein Vektor  $c$  ist genau dann Lösung, wenn das innere Produkt von  $c$  mit jedem Zeilenvektor gleich  $0$  ist. Da die Zeilenvektoren aber den mit den einzelnen Ecken inzidenten Kanten entsprechen, erhalten wir:  $c$  ist genau dann Lösung, wenn die zugehörige Kantenmenge  $C$  aus jeder Nachbarschaft  $N(v)$  eine gerade Anzahl von Kanten enthält, wenn also in dem von  $C$  erzeugten Untergraphen  $G = (V, C)$  jede Ecke  $v$  *geraden* Grad  $d_C(v)$  hat. Wir nennen solche Graphen *Zyklen* oder *Eulersche Graphen*. Also:  $G$  ist ein Eulerscher Graph, wenn jede Ecke geraden Grad hat.

Die Bezeichnung „Eulerscher Graph“ rührt ursprünglich von einem ganz anderen Problem her. Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Ein *Eulerzug* ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante genau einmal durchläuft. Viele Puzzles sind von dieser Art: Man durchlaufe alle Kanten einer Figur, ohne den Bleistift abzusetzen und kehre zum Ausgangspunkt zurück. Hat  $G$  einen Eulerzug, so muss jede Ecke geraden Grad haben, da eine Ecke, wenn sie im Zug betreten wird, auf einer anderen Kante wieder verlassen wird. Aber auch die Umkehrung ist richtig, wie sich der Leser leicht überlegen kann: Hat jede Ecke in  $G$  geraden Grad, so existiert ein Eulerzug. Für zusammenhängende Graphen sind somit die Bedingungen Eulerscher Graph und Existenz eines Eulerzuges äquivalent.

Der Name Eulerzug stammt von der vielleicht ältesten graphentheoretischen Arbeit her, der Lösung des Königsberger Brückenproblems durch Euler im Jahre 1736. Figur 3.3 zeigt 4 Landstücke  $A, B, C, D$  und 7 Verbindungsbrücken  $a, b, \dots, g$ . Frage: Ist es möglich, von der Insel  $A$  aus einen Spaziergang zu machen, bei dem man alle Brücken genau einmal passiert und schließlich nach  $A$  zurückkehrt? Übersetzen wir dies in einsichtiger Weise in die Graphensprache, so resultiert der Graph rechts in Figur 3.3. Da  $A$  aber einen ungeraden Grad hat (wie auch alle anderen Ecken), ist die Antwort nein.



Figur 3.3

Zurück zu unserem Thema. Wir können Eulersche Graphen  $G = (V, C)$  noch näher beschreiben. Ist  $C \neq \emptyset$  und  $e \in C$ , so können wir wegen  $d_C(v) =$  gerade für alle  $v \in V$  einen Weg, beginnend mit  $e$ , finden, der sich schließlich in einer schon durchlaufenen Ecke treffen muss. Wir entfernen die Kanten des auf diese Weise konstruierten Kreises und wählen, falls vorhanden, eine neue Kante, konstruieren einen neuen Kreis, usf.  $C$  zerfällt also letztlich in *kantendisjunkte Kreise*, und umgekehrt ist natürlich jede Vereinigung kantendisjunkter Kreise ein Eulerscher Untergraph. In Figur 3.2 ist beispielsweise  $c = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$  Lösung von  $Ax = 0$ . Die zugehörige Kantenmenge  $C = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_{11}\}$  zerfällt in die Kreise  $\{e_2, e_3, e_5\}$  und  $\{e_4, e_6, e_{11}, e_9\}$ .

Für  $F \in R$  ist die Menge  $C_F$  der mit  $F$  inzidenten Kanten natürlich ein Zyklus, und somit der Vektor  $c_F$  Lösung von  $Ax = 0$ . Wir nennen die Zyklen  $C_F$  bzw. die Vektoren  $c_F$  die *Fundamentalzyklen* bzw. *Fundamentallösungen*. Jede weitere Lösung ist Linearkombination der Fundamentallösungen, denn jeder Kreis unterteilt die Ebene in ein Inneres und Äußeres und ist daher Summe der im Inneren verlaufenden Fundamentalkreise. Z.B. entspricht  $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$  in Figur 3.2 dem Kreis  $\{e_1, e_3, e_7, e_9, e_{11}, e_6\}$  und ist Summe der Fundamentallösungen  $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ . Da jede Kante in genau zwei Fundamentalzyklen liegt, ist  $\sum_F c_F = 0$ , also sind die  $c_F$ 's linear abhängig. Jede echte Teilmenge ist aber linear unabhängig, da  $\sum_{F \in R'} c_F = 0$  für  $\emptyset \neq R' \subsetneq R$  bedeuten würde, dass jede Kante, wenn sie überhaupt auftritt, mindestens zweimal in den Ländern von  $R'$  vorkommen müsste, was aber ersichtlich unmöglich ist. Die Dimension des Lösungsraums von  $Ax = 0$  ist demnach  $r - 1$  und somit der Rang der Matrix  $A$ ,  $\text{rg}(A) = q - r + 1$ .

Da die Fundamentalzyklen genau den Zeilen von  $B$  entsprechen, so erhalten wir ohne weiteres Zutun die Matrixgleichung  $AB^T = 0$ , wobei  $B^T$  die zu  $B$  transponierte Matrix bezeichnet, und  $\text{rg}(B) = r - 1$ .

Ein zweites Gleichungssystem erhält man, indem man  $A^T y = 0$  betrachtet. Die Gleichungen haben sämtlich die Gestalt  $y_a + y_b = 0$ , wobei  $ab$  eine Kante von  $G$  ist. Nach den Rechenregeln in  $\text{GF}(2)$  muss für eine Lösung also stets  $y_a = y_b$  gelten und, da  $G$  zusammenhängend ist, müssen alle Variablen denselben Wert annehmen. Das heißt,  $(0, 0, \dots, 0)$  und  $(1, 1, \dots, 1)$  sind die einzigen Lösungen. Der Lösungsraum hat Dimension 1 und folglich  $A^T$  den Rang  $\text{rg}(A^T) = p - 1$ . Wegen  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$  folgt daraus  $q - r + 1 = p - 1$ , d. h.  $p - q + r = 2$ , und dies ist nichts anderes als unsere wohlbekannte Euler Formel.

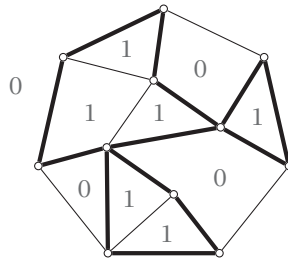
Veblen geht nun zum 4-Farben Problem über. Er wählt als Farbmenge die 4 Elemente aus dem Körper  $\text{GF}(4)$ . Für zwei Elemente  $\alpha, \beta$  von  $\text{GF}(4)$  gilt  $\alpha + \beta = 0$  genau dann, wenn  $\alpha = \beta$  ist. Betrachten wir das Gleichungssystem  $B^T z = 0$  über  $\text{GF}(4)$ . Die Gleichungen sind von der Gestalt  $z_F + z_G = 0$ , wobei  $F, G$  benachbarte Länder sind. Eine 4-Färbung von  $\mathcal{L}$  entspricht daher genau einem Vektor  $(a_1, \dots, a_r)$  über  $\text{GF}(4)$ , der *keine* der Gleichungen  $z_F + z_G = 0$  erfüllt. Veblen interpretiert nun die Vektoren  $(a_1, \dots, a_r)$  als Punkte in einem  $(r - 1)$ -dimensionalen projektiven Raum, die Gleichungen  $z_F + z_G = 0$  als *Hyperebenen*, und leitet daraus als Äquivalent zum 4-Farben Problem ein rein geometrisches Problem ab.

Veblens Ideen wurden später von Whitney in den 1930er Jahren und vor allem von Tutte wieder aufgenommen. Für den Moment wollen wir, um den Zusammenhang zum Färbungsproblem durchsichtiger zu machen, Veblens Vorgangsweise sozusagen dualisieren.

Kehren wir zurück zu den Matrizen  $A$  und  $B$ .  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  mögen die von den Zeilen von  $A$  bzw.  $B$  erzeugten Unterräume des Vektorraumes  $\mathcal{V}_q$  aller  $0, 1$ -Tupel der Länge  $q$  über  $\text{GF}(2)$  bezeichnen. Wir wissen bereits:  $\dim \hat{A} = q - r + 1$ ,  $\dim \hat{B} = r - 1$ . Ferner wissen wir, dass  $\hat{B}$  genau aus den Vektoren  $b$  besteht, die senkrecht zu allen  $a \in \hat{A}$  stehen, d.h. für die das innere Produkt  $a \cdot b = 0$  ist. Wir schreiben dafür  $\hat{B} = \hat{A}^\perp$ . Wegen  $\dim \hat{A} + \dim \hat{B} = q$  folgt auch  $\hat{A} = \hat{B}^\perp$ . Um  $b \in \hat{B}$  nachzuprüfen, genügt es wegen Linearität festzustellen, dass  $b$  senkrecht auf allen Zeilen von  $A$  steht.

Wir wissen bereits, dass die zu  $b \in \hat{B}$  gehörenden Kantenmengen genau die *Eulerschen Untergraphen* sind. Wir wollen nun eine weitere Beschreibung von  $\hat{B}$  herleiten, aus der der Zusammenhang zum Färbungsproblem sofort klar wird. Sei  $f : R \rightarrow \text{GF}(2)$  eine beliebige Abbildung. Zu  $f$  assoziieren wir die Abbildung  $\delta f : E \rightarrow \text{GF}(2)$  mit  $(\delta f)(e) = f(F) + f(G)$ , wobei  $e$  die Länder  $F$  und  $G$  begrenzt.  $\delta f$  heißt der zu  $f$  gehörende *Rand*. Aus Linearitätsgründen bilden die Ränder einen Unterraum von  $\mathcal{V}_q$ , und wir wollen zeigen, dass dies genau der Unterraum  $\hat{B}$  ist.

Sei  $\delta f$  gegeben und  $v \in V$  mit der zugehörigen Zeile  $a_v$  in  $A$ . Dann gilt für das innere Produkt  $a_v \cdot \delta f = \sum_{e \ni v} (\delta f)(e) = \sum_{e \ni v} (f(F) + f(G)) = 0$ , da jedes  $f(F)$  zweimal in der Summe vorkommt. Also ist jeder Rand in  $\hat{B}$ . Für die umgekehrte Inklusion genügt wegen Linearität der Nachweis, dass jeder zu einem Fundamentalzyklus  $C_F$  gehörende Vektor  $c_F$  auch Rand ist. Wählen wir nun die Funktion  $f_F : R \rightarrow \text{GF}(2)$  mit  $f_F(F) = 1$  und  $f_F(G) = 0$  für  $G \neq F$ , so gilt ersichtlich  $(\delta f_F)(e) = 1$  genau dann, wenn  $e$  mit  $F$  inzidiert. Das heißt aber gerade  $c_F = \delta f_F$ , also ist unsere Behauptung richtig. Figur 3.4 enthält eine Abbildung  $f : R \rightarrow \text{GF}(2)$ . Die Kanten des zugehörigen Randes bzw. Eulerschen Untergraphen sind fett gezeichnet.



Figur 3.4

Angenommen, wir wollen  $\mathcal{L}$  mit 2 Farben färben. Wir wählen als Farbmenge  $0, 1$  aus  $\text{GF}(2)$ . Eine zulässige Färbung entspricht dann genau einer Funktion  $f : R \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $f(F) \neq f(G)$  für benachbarte Länder  $F$  und  $G$ , oder was dasselbe ist, einem Rand  $\delta f$  (bzw. Eulerschen Untergraphen) mit  $(\delta f)(e) = 1$  für *alle*  $e \in E$ . Wir erhalten daraus sofort ein Resultat von Tait.

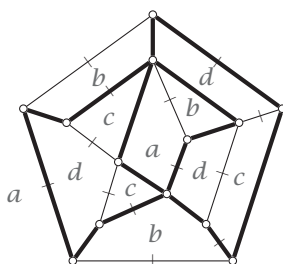
**Satz 3.2.** *Eine brückenlose Landkarte  $\mathcal{L}$  ist genau dann 2-färbbar, wenn das Gerüst  $G(\mathcal{L})$  ein Eulerscher Graph ist.*

Wir wollen nun  $\mathcal{L}$  mit 4 Farben färben. Als Farbmenge  $M$  nehmen wir die Paare  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  mit  $0, 1$  aus  $\text{GF}(2)$ . Eine Färbung  $f : R \rightarrow M$  entspricht einem Paar  $(f_1, f_2)$  von Abbildungen  $f_i : R \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $f(F) = (f_1(F), f_2(F))$ . Die Abbildung  $f$  ist zulässige Färbung, wenn  $f_1(F) \neq f_1(G)$  oder  $f_2(F) \neq f_2(G)$  für je zwei

benachbarte Länder  $F$  und  $G$  gilt, oder äquivalent, wenn  $(\delta f_1, \delta f_2)(e) \neq (0, 0)$  für alle  $e \in E$  ist. Also: Für die 4-Färbbarkeit von  $\mathcal{L}$  ist es notwendig und hinreichend, dass zwei Ränder (bzw. Eulersche Untergraphen) existieren, die nicht beide gleichzeitig eine Kante  $e$  verfehlen.

**Satz 3.3.** Die 4-Farben Vermutung ist genau dann richtig, wenn das Gerüst  $G(\mathcal{L})$  jeder brückenlosen Landkarte  $\mathcal{L}$  Vereinigung zweier Eulerscher Untergraphen ist.

Figur 3.5 zeigt eine (nicht disjunkte) Zerlegung eines Graphen in zwei Eulersche Untergraphen  $C_1$  und  $C_2$  und die dadurch induzierte 4-Färbung, wobei der Übersichtlichkeit halber für die Farben  $a = (0, 0)$ ,  $b = (0, 1)$ ,  $c = (1, 0)$ ,  $d = (1, 1)$  gesetzt wurde. Die Kanten von  $C_1$  sind fett gedruckt, die von  $C_2$  durch Striche gekennzeichnet. Wir färben zunächst das äußere Land mit  $a$ .



Figur 3.5

Sei  $G = G(\mathcal{L})$  ein ebener Graph mit Inzidenzmatrix  $A$ . Dann hat der duale Graph  $G^* = G(\mathcal{L}^*)$  die Inzidenzmatrix  $B$ , und es gilt, wie wir eben gesehen haben,  $\hat{B} = \hat{A}^\perp$ . Nun können wir die Inzidenzmatrix  $A$  natürlich für jeden Graphen  $G$ , ob eben oder nicht, aufstellen. Aber gibt es dann immer einen dazu dualen Graphen, d.h. einen Graphen, für dessen Inzidenzmatrix  $B$  ebenfalls  $\hat{B} = \hat{A}^\perp$  gilt? Die Beantwortung dieser Frage durch Whitney in Kapitel 4 steht am Beginn eines der interessantesten Kapitel der Graphentheorie und ihrer Verallgemeinerungen, der *Theorie der Matroide*, deren Grundzüge wir in Kapitel 8 darlegen wollen.

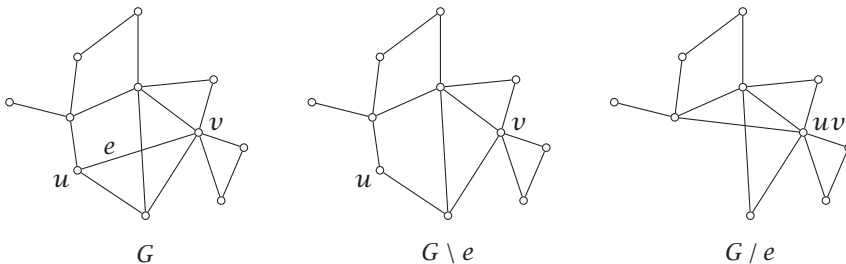
Ein dritter Vorschlag, wie der 4-Farben Vermutung beizukommen wäre, wurde von Birkhoff (der ein Kollege von Veblen in Princeton war) in einer Reihe von Arbeiten beginnend 1913 gemacht. Sei  $\mathcal{L}$  eine Landkarte und  $\lambda$  eine natürliche Zahl. Birkhoff ermittelte eine Formel für die Anzahl  $p(\mathcal{L}; \lambda)$  der Färbungen von  $\mathcal{L}$  mit höchstens  $\lambda$  Farben. Gelingt der Nachweis  $p(\mathcal{L}; 4) > 0$  für alle Landkarten  $\mathcal{L}$ , so wäre die 4-FV positiv beantwortet. Man kann also Birkhoffs Idee als *Quantifizierung* des 4-Farben Problems bezeichnen. Als erstes Hauptergebnis zeigte Birkhoff, dass  $p(\mathcal{L}; \lambda)$  stets ein Polynom in  $\lambda$  vom Grad  $|R|$  ist, genannt das *chromatische Polynom* von  $\mathcal{L}$ . Da Nullstellen von Polynomen durch viele Methoden aus Algebra und Analysis zumindest näherungsweise ermittelt werden können, war die Hoffnung,  $p(\mathcal{L}; 4) \neq 0$  für alle chromatischen Polynome zeigen zu können, nicht unberechtigt – vorausgesetzt man könnte sich eine genaue Kenntnis dieser Polynome verschaffen.

Wir wollen Birkhoffs Resultat und einige Ergänzungen von Whitney für Graphen statt für Landkarten beweisen, und zwar ganz allgemein für beliebige Graphen.

**Satz 3.4.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne Mehrfachkanten mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten, und  $p(G; \lambda)$  die Anzahl der Eckenfärbungen von  $G$  mit höchstens  $\lambda$  Farben.  $p(G; \lambda)$  ist ein Polynom in  $\lambda$ ,  $p(G; \lambda) = a_0 \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p$ . Hat  $G$  eine Schlinge, so ist  $p(G; \lambda) \equiv 0$ , andernfalls gilt:

- (i)  $p(G; \lambda)$  hat Grad  $p$ .
- (ii) Die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{p-t}$  sind alle  $\neq 0$  und haben abwechselndes Vorzeichen, wobei  $t$  die Anzahl der Komponenten von  $G$  ist.
- (iii)  $a_0 = 1, a_1 = -q, a_i = 0$  für  $i > p - t$ .
- (iv) Hat  $G$  die Komponenten  $G_1, \dots, G_t$ , so gilt  $p(G; \lambda) = \prod_{i=1}^t p(G_i; \lambda)$ .

*Beweis.* Besitzt  $G$  eine Schlinge, so ist  $p(G; \lambda) \equiv 0$  und es ist nichts zu beweisen. Sei also  $G$  schlingenlos. Wir führen Induktion nach der Kantenzahl. Ist  $|E| = 0$  und  $|V| = p$ , so können die Ecken beliebig gefärbt werden, so dass  $p(G; \lambda) = \lambda^p$  resultiert. Es sei nun  $e = uv \in E$ . Wir konstruieren zwei neue Graphen  $G \setminus e$  und  $G/e$ .  $G \setminus e$  habe die Ecken und Kanten wie  $G$ , mit Ausnahme der Kante  $e$ , die wir wegstreichen. In  $G/e$  identifizieren wir die Ecken  $u$  und  $v$  zur Ecke  $uv$  und verbinden  $uv$  mit allen Ecken, die mit  $u$  oder  $v$  in  $G$  benachbart sind, wobei wir eventuell entstehende Mehrfachkanten nur einmal eintragen (siehe Figur 3.6). Wir nennen  $G \setminus e$  die *Restriktion* (der Kante  $e$ ) und  $G/e$  die *Kontraktion*.



Figur 3.6

Betrachten wir die Färbungen von  $G \setminus e$ . Sie zerfallen in zwei disjunkte Klassen, je nachdem ob  $u$  und  $v$  verschiedene Farben oder die gleiche Farbe erhalten. Im ersten Fall erhalten wir genau die Färbungen von  $G$ , im zweiten Fall können wir sie eindeutig den Färbungen von  $G/e$  zuordnen. Insgesamt haben wir also  $p(G \setminus e; \lambda) = p(G; \lambda) + p(G/e; \lambda)$  oder  $p(G; \lambda) = p(G \setminus e; \lambda) - p(G/e; \lambda)$ . Da beide Graphen  $G \setminus e$  und  $G/e$  weniger als  $q$  Kanten enthalten, können wir Induktion anwenden, woraus die Behauptungen (i) bis (iii) ohne Mühe folgen. Die letzte Behauptung (iv) ist klar, da die Färbungen der einzelnen Komponenten unabhängig voneinander vorgenommen werden können.  $\square$

Satz 3.4 erlaubt im Prinzip die Schritt-für-Schritt Berechnung jedes chromatischen Polynoms, und somit auch die Entscheidung  $p(G; 4) > 0$ . Natürlich ist so eine Berechnung im Allgemeinen einer ad hoc-Färbung nicht überlegen.

**Beispiel.** Wir führen den algorithmischen Schritt des Satzes symbolisch vor (wobei wir Graph und chromatisches Polynom identifizieren), bis wir den Graphen in kleine

Graphen zerlegt haben, deren chromatische Polynome wir alle kennen. Zum Beispiel erhalten wir für alle vollständigen Graphen  $K_p$  das Polynom  $p(K_p; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - p + 1)$ , da wir die erste Ecke mit  $\lambda$  Farben färben können, nach einer gewählten Farbe die zweite Ecke mit  $\lambda - 1$  Farben, usw. Außerdem werden wir des öfteren 3.4(iv) anwenden. Wir haben

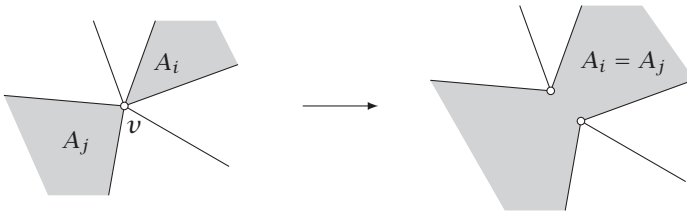
$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} &= \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \cdot - \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \cdot (\lambda - 1) \\
 &= \left( \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \triangle \\ \diamond \end{array} \right) \cdot (\lambda - 1) \\
 &= \left( \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \right) \cdot (\lambda - 1) \\
 &= \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \cdot (\lambda - 2)(\lambda - 1) + \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \cdot (\lambda - 1) \\
 &= \left( \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \right) \cdot (\lambda - 2)(\lambda - 1) + \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \cdot (\lambda - 1) \\
 &= \begin{array}{c} \triangle \\ \square \end{array} \cdot (\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) - (\lambda - 2)(\lambda - 1) + (\lambda - 1)) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda(\lambda - 2) - \lambda + 2 + 1)
 \end{aligned}$$

somit  $p(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ . Beispielsweise hat  $G$  also  $p(G; 3) = 36$  Färbungen mit 3 Farben und  $p(G; 4) = 504$  Färbungen mit 4 Farben. Der Leser möge das Ergebnis  $p(G; 4) = 504$  nachprüfen, um eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit des Algorithmus zu bekommen.

In seiner nächsten Arbeit griff Birkhoff die Kempe'sche Idee der Reduzierbarkeit von Landkarten auf. Wir erinnern uns, dass eine Konfiguration *reduzierbar* heißt, falls sie in einer hypothetischen minimalen 5-chromatischen Landkarte nicht auftreten kann. Die ersten drei Konfigurationen in Figur 1.14 sind reduzierbar. Eine 5-chromatische Landkarte  $\mathcal{L}$  mit der minimalen Anzahl von Ländern wollen wir *irreduzibel* nennen. Birkhoffs Hoffnung war es, so viele Eigenschaften einer irreduziblen Landkarte  $\mathcal{L}$  nachzuweisen, dass schließlich  $\mathcal{L}$  explizit konstruiert werden könnte oder die Unmöglichkeit einer solchen Landkarte festgestellt sein würde.

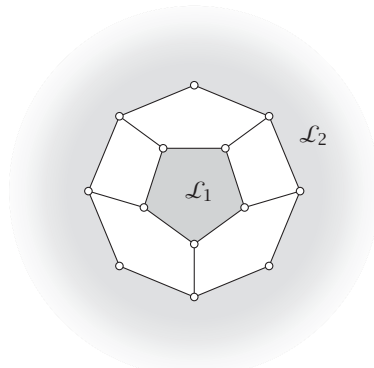
Welche Eigenschaften einer irreduziblen Landkarte  $\mathcal{L}$  können wir sofort aufzeigen? Wie immer können wir  $\mathcal{L}$  als normal voraussetzen. Da die besagten drei Konfigurationen reduzierbar sind, muss jedes Land in  $\mathcal{L}$  *mindestens 5 Grenzen* haben. Ferner muss  $\mathcal{L}$  *kubisch* sein. Denn hat  $v \in V$   $\text{Grad } t \geq 4$ , so muss es mindestens ein Paar  $A_i, A_j$  von an  $v$  anstoßende Länder geben, die nicht benachbart sind. Verschmelzen wir  $A_i$  und  $A_j$ , wie in Figur 3.7 angedeutet, so hat die neue Landkarte  $\mathcal{L}'$  ein Land weniger,

kann also 4-gefärbt werden, und damit auch  $\mathcal{L}$ , da wir nach Wiedertrennung für  $A_i$  und  $A_j$  dieselbe Farbe wählen können.



Figur 3.7

Birkhoffs wichtigste neue Idee war der Begriff eines Ringes. Eine Teilmenge  $R'$  der Länder bildet einen *Ring*, falls  $R'$  einen Kreis von  $\mathcal{L}$  bildet, der die Ebene in ein nichttriviales Inneres  $\mathcal{L}_1$  und Äußeres  $\mathcal{L}_2$  teilt (wobei nichttrivial bedeutet, dass  $R'$  nicht gerade die mit einer einzelnen Ecke inzidente Ländermenge ist). Figur 3.8 zeigt einen Ring mit 5 Ländern.

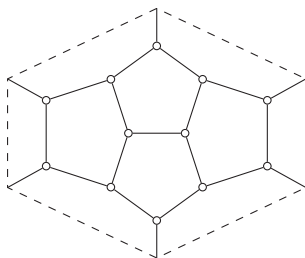


Figur 3.8

Birkhoff bewies, dass eine irreduzible Landkarte keinen Ring mit vier oder weniger Ländern enthalten kann, und dass ein 5-Ring nur existieren kann, wenn das Innere (oder Äußere) aus einem einzigen Land mit 5 Grenzen besteht. 6-Ringe sind schon komplizierter, doch hat er bereits ein Beispiel eines reduzierbaren 6-Ringes angegeben, das in Figur 3.9 abgebildet ist.

**George David Birkhoff** wurde 1884 in Overisel, USA geboren. Er studierte in Chicago und Harvard und wurde 1912 als Professor nach Harvard berufen, wo er sein Leben lang blieb. Er leistete fundamentale Beiträge zu einer ganzen Reihe von mathematischen Gebieten, von Dynamischen Systemen und Ergodentheorie bis Geometrie und Quantenmechanik. Daneben bekleidete er viele wichtige Positionen, unter anderem als Präsident der amerikanischen mathematischen Gesellschaft. Seine Brillanz als Wissenschaftler und seine vielfältige Tätigkeit zur Förderung der Mathematik machten ihn zum wohl einflussreichsten Mathematiker der USA in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Er starb 1944 in Cambridge, USA.





Figur 3.9

In 1.6 haben wir die Formel  $\sum_{i \geq 2} (6 - i)p_i = 12$  für jede normale kubische Landkarte abgeleitet, wobei  $p_i$  die Anzahl der Länder mit genau  $i$  Grenzen ist. Insbesondere gilt diese Beziehung daher für irreduzible Landkarten. Daraus folgt aber wegen  $p_i = 0$  für  $i \leq 4$  sofort  $p_5 = 12 + \sum_{i \geq 6} (i - 6)p_i \geq 12$  und somit auch  $|R| \geq 12$ . Eine irreduzible Landkarte muss also mindestens 12 Länder enthalten.

Mittels der Birkhoffschen Idee der Ringe hat Franklin 1922 nachgewiesen, dass eine irreduzible Landkarte mindestens 26 Länder enthalten muss. Durch Studium größerer und größerer Ringe wurde diese Zahl, bald *Birkhoff Zahl*  $b$  genannt, nach und nach angehoben, wie die folgende Tabelle auszugsweise angibt:

Reynolds (1926):	$b \geq 28$
Franklin (1938):	$b \geq 32$
Winn (1940):	$b \geq 36$
Ore-Stemple (1968):	$b \geq 41$
Mayer (1978):	$b \geq 96$

Die letzte Arbeit von Mayer (derselbe Professor für Literatur) war schon eine Fleißaufgabe, denn da war das 4-Farben Problem bereits gelöst. Weniger die Birkhoff Zahl als die Methoden zur Reduzierbarkeit selber waren interessant. Aber hier kam der Durchbruch erst in den sechziger Jahren, vor allem durch die Arbeiten von Heesch. Folgerichtig wollen wir diese Ideen zum 4-Farben Problem erst an dieser Stelle (Kapitel 9) wieder aufgreifen.

Die letzten beiden neuen Entwicklungen, die aus Lösungsversuchen zum 4-Farben Problem entstanden, hatten ihren Ursprung in jeweils irrigen Vermutungen von Tait.

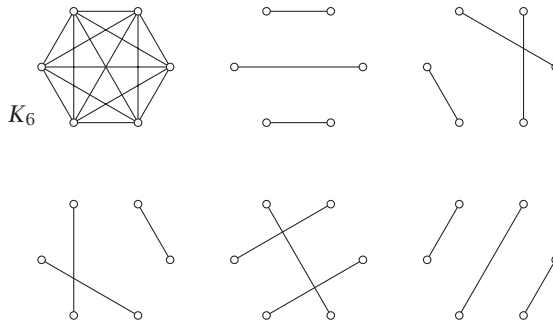
Rufen wir uns den Tait'schen Satz 1.7 in Erinnerung: *Eine kubische brückenlose Landkarte  $\mathcal{L}$  ist genau dann 4-färbbar, wenn ihre Kanten 3-färbbar sind.* Nehmen wir an, die Kanten sind rot, blau und weiß gefärbt. Der Untergraph  $G_R$  von  $G(\mathcal{L})$ , der nur aus den roten Kanten besteht, hat die Eigenschaft, dass jede Ecke in  $G_R$  Grad 1 hat, und dasselbe gilt für die Untergraphen  $G_B$  und  $G_W$  der blauen bzw. weißen Kanten. Hat allgemein ein Graph  $G$  die Eigenschaft, dass alle Ecken denselben Grad  $r$  haben, so nennen wir  $G$  *r-regulär*. Kubisch bedeutet also gerade, dass  $G$  3-regulär ist. Eine Kantenfärbung von  $G(\mathcal{L})$  entspricht demnach einer disjunkten Zerlegung von  $G(\mathcal{L})$  in drei 1-reguläre Teilgraphen, und jede solche Zerlegung ergibt umgekehrt eine Kantenfärbung mit 3 Farben. Da Tait der Meinung war, das 4-Farben Problem sei gelöst und damit auch seine Version 1.7 richtig, so war er natürlich überzeugt, dass jeder 3-reguläre brückenlose ebene Graph solcherart zerlegbar ist. Ja, er ging sogar soweit, diese Zerlegung für *beliebige* brückenlose 3-reguläre Graphen als bewiesen anzusehen.



Dass dies falsch war, wurde von Petersen 1898 anhand eines Beispielenachgewiesen (siehe Figur 3.13), aber trotz dieses Irrtums war die Idee der *Faktorisierung* ein wichtiger Beitrag, deren Anfänge wir nun nachzeichnen wollen.

**Definition.** Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph. Ein  $r$ -*Faktor* von  $G$  ist ein  $r$ -regulärer Untergraph  $H = (V, E')$  auf derselben Eckenmenge  $V$ , wobei  $H$  ein echter Untergraph von  $G$  sein soll. Wir sagen,  $G$  ist  $r$ -*faktorisierbar*, falls  $G$  so in  $r$ -Faktoren  $H_i = (V, E_i)$  zerlegt werden kann, dass jede Kante von  $G$  in genau einem Faktor  $H_i$  vorkommt, d. h.  $E = \bigcup E_i$  ist disjunkte Vereinigung.

Hat beispielsweise  $G = (V, E)$  einen 1-Faktor, so muss  $|V|$  klarerweise gerade sein. Der vollständige Graph  $K_{2n+1}$  kann daher keinen 1-Faktor haben. Andererseits ist jeder vollständige Graph  $K_{2n}$  1-faktorisierbar, wie sich die Leser leicht überlegen können. Figur 3.10 zeigt eine 1-Faktorisierung von  $K_6$ .



Figur 3.10

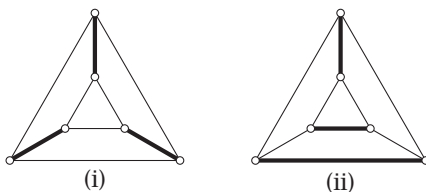
Natürlich muss ein Graph, der in disjunkte Faktoren zerlegt werden kann, selbst regulär sein. Ist  $G$   $r$ -regulär, so können wir im extremsten Fall darauf hoffen, dass  $G$  in  $r$  1-Faktoren zerfällt, also 1-faktorisierbar ist. Dies bedeutet dann, wie wir gesehen haben, dass die Kanten mit  $r$  Farben gefärbt werden können.

Petersen griff in zwei Arbeiten 1891 und 1898 das Faktorisierungsproblem auf. Zuerst betrachtete er den Fall eines 2-regulären Graphen. Jeder solche Graph zerfällt in kantendisjunkte Kreise, und da ein Kreis ersichtlich genau dann in zwei 1-Faktoren zerfällt, wenn er gerade Länge hat, notieren wir als erstes Ergebnis.

**Satz 3.5.** *Ein 2-regulärer Graph  $G$  ist genau dann 1-faktorisierbar, wenn  $G$  aus kantendisjunkten Kreisen gerader Länge besteht.*

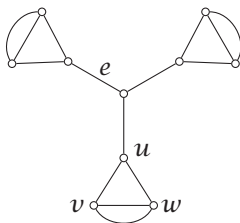
Mit Hilfe von 3.5 gelang es Petersen, die 2-Faktorisierbarkeit aller gerad-regulärer Graphen zu beweisen - wir werden in Kapitel 6 darauf zurückkommen. Ist der Grad  $r$  ungerade, so ist die Sache schwieriger. Aufgrund von Tait's Satz 1.7 interessiert natürlich besonders der Fall  $r = 3$ . Wegen 1.2 hat ein 3-regulärer Graph  $G$  eine gerade Anzahl von Ecken. In  $G$  gibt es nur zwei Arten von Faktoren, 1-Faktoren und 2-Faktoren. Hat  $G$  einen 1-Faktor, so bildet die komplementäre Kantenmenge einen 2-Faktor und umgekehrt. Damit  $G$  also 1-faktorisierbar ist (und daher eine 3-Färbung der Kanten besitzt), müssen wir somit erstens die *Existenz eines 1-Faktors*

nachweisen und zweitens zeigen, dass unter allen 1-Faktoren mindestens einer ist, dessen komplementärer 2-Faktor in *lauter gerade Kreise* zerfällt. Wählen wir im Graphen der Figur 3.11 den 1-Faktor wie in (i), so besteht das Komplement aus 2 Kreisen der Länge 3, ist also nicht weiter zerlegbar, wählen wir aber den 1-Faktor wie in (ii), so erhalten wir als Komplement einen Kreis der Länge 6, der somit in zwei 1-Faktoren zerfällt.



Figur 3.11

Petersen löste das erste Problem, die Existenz eines 1-Faktors, vollständig. Da 1-Faktoren in den einzelnen Komponenten gebildet werden, können wir uns auf zusammenhängende Graphen beschränken. Der 3-reguläre Graph in Figur 3.12 hat keinen 1-Faktor, denn ein solcher müsste genau eine der drei Mittelkanten, sagen wir  $e$ , benutzen. Damit wäre aber der Teilgraph, aufgespannt von  $\{u, v, w\}$ , nicht mehr 1-faktorisiertbar.



Figur 3.12

Es sind offenbar die drei Mittelkanten, allesamt Brücken, die die Schwierigkeiten bereiten. Schließen wir aber Brücken aus, so haben wir das folgende Resultat.

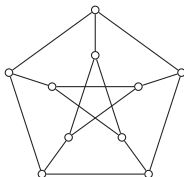
**Satz 3.6** (Petersen). *Ein zusammenhängender 3-regulärer brückenloser Graph besitzt stets einen 1-Faktor.*

Den Beweis verschieben wir auf Kapitel 6, wo 3.6 als Folgerung eines viel allgemeineren Satzes erscheinen wird (siehe 6.15). Da jede kubische normale Landkarte brückenlos ist, erhalten wir aus Petersens Satz die wichtige Folgerung.

**Folgerung 3.7.** *Das Gerüst  $G(\mathcal{L})$  einer kubischen normalen Landkarte besitzt stets einen 1-Faktor oder äquivalent dazu: Die Ecken einer kubischen normalen Landkarte können stets mit disjunkten Kreisen bedeckt werden.*

Die zweite oben angeschnittene Frage, wann der komplementäre 2-Faktor selbst noch weiter in 1-Faktoren zerlegt werden kann, d. h. nur aus Kreisen gerader Länge besteht,

ist damit natürlich noch nicht beantwortet. Der irrigen Meinung Taits, dass dies bei brückenlosen 3-regulären Graphen stets der Fall ist, stellte Petersen sein berühmtes Gegenbeispiel, den heute *Petersen Graph*  $P$  genannten Graphen gegenüber (Figur 3.13).  $P$  wird uns in fast jedem Kapitel wieder begegnen. Der Petersen Graph ist brückenlos und hat demnach einen 1-Faktor. Man kann sich aber mühelos überzeugen, dass jeder komplementäre 2-Faktor aus zwei Kreisen der Länge 5 besteht,  $P$  also nicht 1-faktorisierbar ist.



Figur 3.13

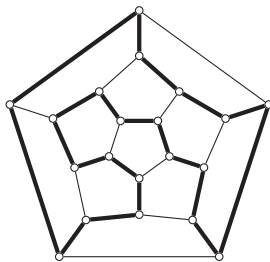
Aufgrund von 3.7 können wir somit die folgende äquivalente Formulierung zum 4-Farben Problem geben:

**Satz 3.8.** *Die 4-Farben Vermutung ist genau dann richtig, wenn die Ecken jeder kubischen normalen Landkarte durch disjunkte Kreise gerader Länge bedeckt werden können.*

Der Petersen Graph ist keine Widerlegung der 4-FV, da er, wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, nicht plättbar ist.

Die einfachste Bedeckung der Ecken mit disjunkten Kreisen liegt vor, wenn ein einziger Kreis dies schon leistet. Ein solcher Kreis in einem beliebigen Graphen  $G$ , der alle Ecken genau einmal durchläuft, heißt *Hamiltonscher Kreis* in  $G$  und ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis besitzt, ein *Hamiltonscher Graph* - und damit sind wir beim letzten Thema dieses Kapitels.

Das Studium dieser Kreise wurde 1856, etwa gleichzeitig, von Kirkman und Hamilton angeregt. Hamiltons „Icosian Game“, welches diese Konstruktion eines Hamiltonschen Kreises durch die 20 Ecken des Dodekaeders verlangt, trug auch zur Popularisierung bei (Figur 3.14).

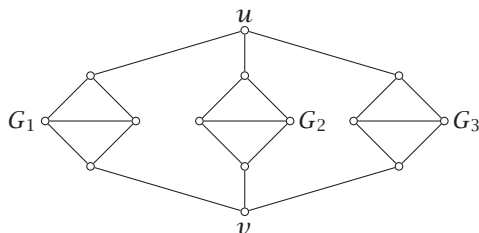


Figur 3.14

Spezielle Probleme, vor allem auf dem Schachbrett, sind viel älter. Euler behandelte z. B. das Problem des Rösselsprunges auf einem  $n \times n$ -Schachbrett. Gefordert ist, dass

der Springer von einem Feld beginnend mit kontinuierlichen Zügen alle Felder genau einmal berührt und dann wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt. Nehmen wir als Ecken die  $n^2$  Felder und verbinden wir zwei Ecken, wenn sie durch einen Springerzug verbunden sind, so sind wir genau beim Hamiltonschen Problem (das im Fall  $n = 8$  übrigens eine positive Lösung hat).

Zurück zum 4-Farben Problem. Nach 3.8 wäre es gelöst, wenn wir nachweisen könnten, dass jeder *zusammenhängende ebene 3-reguläre brückenlose Graph* Hamiltonsch ist. Für beliebig zusammenhängende 3-reguläre brückenlose Graphen ist dies gewiss nicht richtig. Dafür ist der Petersen Graph  $P$  wieder ein Gegenbeispiel: Wir haben ja oben schon bemerkt, dass jeder 2-Faktor in  $P$  aus zwei disjunkten Kreisen der Länge 5 besteht, ein Kreis der Länge 10 also nicht existiert. Aber auch für ebene Graphen ist ein Gegenbeispiel schnell konstruiert. Der Graph  $G$  in Figur 3.15 ist ein solches. Beginnen wir nämlich bei  $u$  und betrachten zuerst den Untergraphen  $G_1$ , so müssen wir  $G_1$  vollkommen durchlaufen und dann nach  $v$  gehen. Jetzt könnten wir aber nur noch entweder  $G_2$  oder  $G_3$  durchlaufen, da wir dann jedenfalls bereits bei  $u$  ankommen.



Figur 3.15

Der Grund, warum  $G$  nicht Hamiltonsch ist, liegt also in erster Linie darin, dass wir die Untergraphen  $G_i$  durch Wegnahme zweier Ecken vom Rest trennen können. Dies ist bei den „polyedrischen“ Graphen, also den Gerüstgraphen (siehe unten) von Figuren wie Würfel, Tetraeder, Dodekaeder nicht der Fall, und so hat Tait 1883 unter Berufung auf Kirkman die Vermutung geäußert:

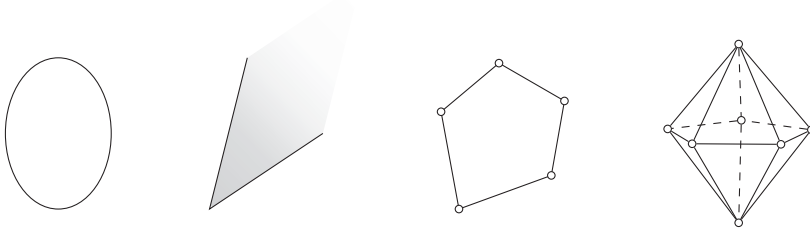
**Taits Vermutung 3.9.** *Jeder 3-reguläre polyedrische Graph besitzt einen Hamiltonschen Kreis.*



**Peter Guthrie Tait** wurde 1831 in Dalkeith, Schottland geboren. Schon in der Schule zeigte sich seine außergewöhnliche Begabung. Mit 16 Jahren begann er sein Studium an der Universität von Edinburgh, das er in Cambridge fortsetzte. Mit 23 Jahren wurde er an die Universität von Belfast berufen, 1860 wechselte er nach Edinburgh, wo er bis zu seinem Tod 1901 blieb. Er leistete bedeutende Beiträge zur Theorie der Quaternionen, die von William Hamilton kurz vorher begründet worden war, zur mathematischen Physik und zum ganz neuen Gebiet der Knotentheorie. Er publizierte die ersten Knotentafeln und formulierte eine berühmte Vermutung über alternierende Knoten, die erst über 100 Jahre später bewiesen wurde.

Bevor wir die Geschichte dieser Vermutung nachzeichnen und vor allem aufzeigen, dass 3.9 tatsächlich die 4-FV impliziert, wollen wir einige Grundbegriffe über Polyeder präzisieren.

Eine Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls mit je zwei Punkten  $P, Q \in S$  stets die ganze Verbindungsstrecke in  $S$  liegt. Anschaulich gesprochen bedeutet Konvexität also, dass von jedem Punkt einer konvexen Menge jeder weitere Punkt „gesehen“ werden kann – ein natürliches ästhetisches Prinzip. 1-dimensionale konvexe Mengen sind offenbar genau die Intervalle. Figur 3.16 zeigt drei 2-dimensionale und eine 3-dimensionale konvexe Menge.



Figur 3.16

Alle vier Mengen sind abgeschlossen (d. h. enthalten ihre Randpunkte), aber die zweite bis vierte weisen einen wesentlichen Unterschied zur ersten Menge auf: Sie enthalten Punkte, die wir rein optisch sofort als Ecken bezeichnen würden. Betrachten wir die Ecken einen Augenblick, so erkennen wir, dass sie unter allen Punkten als diejenigen ausgezeichnet sind, die nicht im Inneren einer ganz in der konvexen Figur verlaufenden Strecke enthalten sind, oder äquivalent dazu, dass die nach Entfernen der Ecke verbleibende Restmenge wieder konvex ist. Die erste Figur in Figur 3.16 weist nach dieser Definition ebenfalls Ecken auf, jeder der (unendlich vielen) Randpunkte ist eine Ecke. Noch etwas fällt auf: Die zweite Menge in Figur 3.16 hat zwar eine Ecke, ist aber im Unterschied zu den beiden letzten unbeschränkt. Und damit kommen wir zum Hauptbegriff.

**Definition.** Ein *Polytop* in  $\mathbb{R}^n$  ist eine kompakte konvexe Menge mit endlich vielen Ecken.

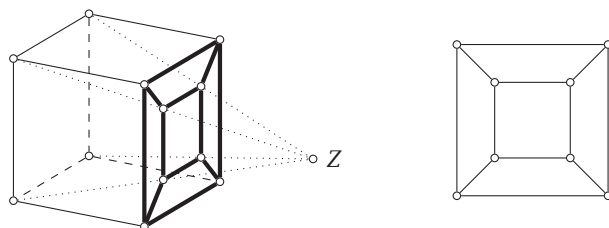
Die letzten beiden Mengen in Figur 3.16 sind Polytope. Das Pentagon ist ein 2-dimensionales Polytop (und es sollte klar sein, dass im 2-dimensionalen Fall wir ganz allgemein gerade die Polygone erhalten), die Doppelpyramide ein 3-dimensionales. Neben den Ecken enthält ein Polytop *Kanten* und im 3-dimensionalen Fall *Flächen*. Die dargestellte Doppelpyramide hat beispielsweise 7 Ecken, 15 Kanten und 10 Flächen.

Jedem Polytop  $S$  können wir also eindeutig sein *Gerüst*  $G(S)$  zuordnen, nämlich den Graphen, der aus den Ecken und Kanten von  $S$  mit der natürlichen Inzidenz besteht, und so kommen wir zur endgültigen Definition.

**Definition.** Ein Graph  $G$  heißt *polyedrisch*, falls  $G$  isomorph zum Gerüstgraphen eines 3-dimensionalen konvexen Polytops ist.

Was haben polyedrische Graphen mit dem 4-Farben Problem zu tun? Zunächst einmal sind alle diese Graphen *plättbar*. Dies sieht man, indem man von einem Punkt  $Z$  aus, in

der Nähe einer Fläche  $F$ , durch  $F$  wie durch ein „Fenster“ in das Innere des Polyeders  $S$  blickt. Projizieren wir auf diese Weise alle Punkte von  $S$  auf  $F$ , so entspricht das Gerüst von  $S$  einem Graphen  $G$  in der von  $F$  bestimmten Ebene, welcher, wenn  $Z$  nur nahe genug bei  $F$  ist, keine Kantenüberschneidungen aufweist, also eben ist. Die Flächen von  $S$  entsprechen den Ländern von  $G$ , wobei das Fenster  $F$  die Rolle des äußeren Landes übernimmt. In Figur 3.17 ist so eine ebene Projektion des Würfels abgebildet.

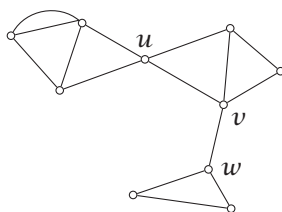


Figur 3.17

Zweitens haben alle polyedrischen Graphen die oben erwähnte Eigenschaft, dass die Wegnahme von zwei Ecken den Graphen niemals trennt. Wir wollen diese Trennungseigenschaft allgemein einführen. Noch ein Wort zur Terminologie: Wenn wir sagen, wir *entfernen* die Ecke  $v$  aus dem Graphen  $G$ , so meinen wir natürlich, dass wir  $v$  und alle mit  $v$  inzidenten Kanten entfernen. Der resultierende Graph wird kurz mit  $G \setminus v$  bezeichnet und allgemein mit  $G \setminus A$ , falls die Eckenmenge  $A \subseteq V$  entfernt wird.

**Definition.** Die *Zusammenhangszahl*  $\kappa(G)$  eines Graphen  $G$  ist die kleinste Zahl von Ecken, deren Entfernung den Restgraphen trennt. Da für vollständige Graphen solche *trennende Eckenmengen* überhaupt nicht existieren, setzen wir zusätzlich  $\kappa(K_p) := p - 1$ . Ist  $\kappa(G) \geq n$ , so sagen wir,  $G$  ist *n-fach zusammenhängend*.

Ein unzusammenhängender Graph  $G$  hat demnach Zusammenhangszahl  $\kappa(G) = 0$ . Ist  $\kappa(G) = 1$  und  $v$  eine trennende Ecke, so nennen wir  $v$  eine *Schnittecke*. Der Graph in Figur 3.18 hat die Schnittecken  $u, v$  und  $w$ .



Figur 3.18

Aus der Definition einer Schnittecke folgt unschwer eine Charakterisierung 2-fach zusammenhängender Graphen, deren Beweis den Lesern überlassen sei.

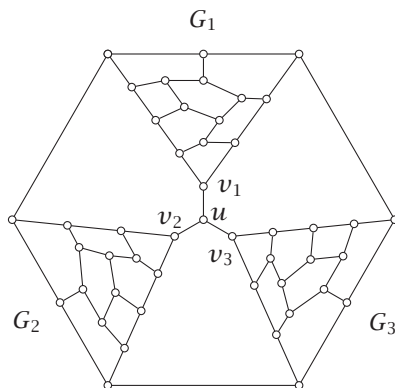
**Lemma 3.10.** Ein Graph ist genau dann 2-fach zusammenhängend, wenn je zwei Ecken (oder äquivalent je zwei Kanten) auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Ein *Block* von  $G = (V, E)$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph mit mindestens zwei Ecken, der keine Schnittekcken enthält. Ein Block ist also eine einzelne Kante oder er ist 2-fach zusammenhängend. Aus 3.10 folgt, dass die Blöcke eine disjunkte Kantenerlegung von  $E$  induzieren. Der Graph in Figur 3.18 hat beispielsweise vier Blöcke.

Aus geometrischen Überlegungen ersieht man, dass das Gerüst jedes Polytops sogar ein 3-fach zusammenhängender Graph ist. Was aber noch interessanter ist, ist die Tatsache, dass diese Eigenschaft zusammen mit der schon oben gezeigten Plättbarkeit die polyedrischen Graphen charakterisiert. Der Beweis dieses von Steinitz 1922 aufgestellten Satzes ist zwar geometrisch elementar, würde uns aber zu weit von unserem eigentlichen Thema abbringen, so dass wir uns mit der Formulierung des Satzes begnügen wollen. Wer mehr über konvexe Mengen und insbesondere den Beweis des Satzes erfahren will, dem sei das Buch von Grünbaum empfohlen.

**Satz 3.11** (Steinitz). *Ein Graph  $G$  ist genau dann polyedrisch, wenn  $G$  plättbar und 3-fach zusammenhängend ist.*

Wir wollen die Geschichte von Taits Vermutung, späteren Kapiteln etwas vorgreifend, noch zu Ende führen. 1931 zeigte Whitney, dass man sich beim Beweis der 4-FV auf kubische Landkarten  $\mathcal{L}$  beschränken darf, deren Gerüst  $G(\mathcal{L})$  3-fach zusammenhängend ist (siehe Satz 7.1). Da  $G(\mathcal{L})$  nach dem Satz von Steinitz ein polyedrischer Graph ist, würde Taits Vermutung 3.9 wegen 3.8 tatsächlich die 4-Farben Vermutung implizieren. Tait selber war wohl dieser Zusammenhang nicht ganz klar, auf jeden Fall wurde die Diskussion darüber akademisch, als Tutte 1946 einen polyedrischen 3-regulären Graphen mit 46 Ecken angab (Figur 3.19), der keinen Hamiltonschen Kreis besitzt. Nachfolgende Autoren haben kleinere Gegenbeispiele gefunden, wovon das kleinste 38 Ecken hat. (Alle polyedrischen Graphen mit höchstens 36 Ecken sind Hamiltonsch.) Dass der Graph in Figur 3.19 keinen Hamiltonschen Kreis besitzt, sieht man, indem man sich überlegt, dass jeder Weg, der alle Ecken eines Untergraphen  $G_i$  genau einmal durchläuft, als Anfangs- oder Endecke  $v_i$  haben muss. Die Fortsetzung kann aber nur über  $u$  erfolgen, so dass man in einer der drei Ecken  $v_1, v_2, v_3$  hängen bleibt.



Figur 3.19

Um 1930 war das Studium der Graphen aus den Anfängen herausgetreten. Angeregt durch die fortdauernde Herausforderung des immer noch offenen 4-Farben Problems waren fünf Disziplinen entstanden, entsprechend der in diesem Kapitel vorgezeigten Linien. Natürlich *Plättbarkeit* und allgemein Einbettungsfragen, *Färbung*, *Faktorisierung*, *Hamiltonsche Graphen*, schließlich Darstellung von Graphen durch Matrizen und allgemeiner *Matroide*. Fragen des Zusammenhanges und der Abzählung der Graphen kamen hinzu, auf die wir am Rande eingehen werden. Kurzum: Aus einer Sammlung von Sätzen über Graphen war die Graphentheorie geworden, was nicht zuletzt durch das erste Lehrbuch dokumentiert wird, welches, von Dénes König verfasst, 1936 erschien. Geprägt wurden die ersten Jahre der Graphentheorie von H. Whitney, einem jungen amerikanischen Mathematiker, der in fast allen vorweg genannten Disziplinen grundlegende Arbeiten publizierte, die die neue Theorie rasch vorantrieben. Wenn er sich auch nach wenigen Jahren von der Graphentheorie wieder abwandte (wie es heißt, nicht zuletzt wegen der Aussichtslosigkeit, das 4-Farben Problem zu lösen), so sind seine Leistungen Meilensteine, wie sie in dieser Fülle später nur noch von W. T. Tutte gesetzt wurden. So sind die folgenden fünf Kapitel, die heute zu den unentbehrlichen Grundlagen der Graphentheorie gehören, zu einem großen Teil eine Diskussion der Ideen und Resultate dieser beiden Mathematiker.



## Übungen zu Kapitel 3

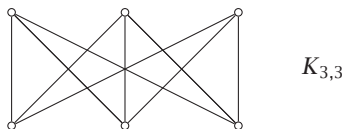
- 1.\* Vervollständige den zweiten Teil des Beweises von 3.1.
2. Konstruiere die Funktion  $h : V \rightarrow \{1, -1\}$  laut 3.1 für die Landkarte aus Figur 3.14.
3. Schreibe die Ecken-Kanten und Länder-Kanten Inzidenzmatrix für die Platonischen Graphen auf.
- 4.\* Zeige, dass ein zusammenhängender Eulerscher Graph einen Eulerzug besitzt.
5. Enthält  $G$  Ecken ungeraden Grades, so kann  $G$  keinen Eulerzug enthalten. Angenommen,  $G$  ist zusammenhängend und hat genau 2 Ecken mit ungeradem Grad. Zeige, dass dann ein (nicht geschlossener) Kantenzug existiert, der jede Kante genau einmal durchläuft. Was kann man sagen, wenn  $G$  genau  $2h$  Ecken mit ungeradem Grad enthält?
6. Für welche Werte von  $n$  sind die vollständigen Graphen  $K_n$  und die Würfel  $Q_n$  Eulersch? Welche Platonische Graphen sind Eulersch?
- 7.\* Beschreibe in einem Graphen die Kantenmengen, die zu  $a \in \hat{A}$ ,  $A =$  Inzidenzmatrix, gehören.
8. Dualisiere Satz 3.3.
9. Verifiziere nochmals die Rekursion für chromatische Polynome:  $p(G; \lambda) = p(G \setminus e; \lambda) - p(G/e; \lambda)$ , und füge alle Details des Beweises von 3.4 ein.
- 10.\* Berechne die chromatischen Polynome
  - a. der Kreise  $C_n$ ,
  - b. der Räder  $W_n$ ,
  - c. des Petersen Graphen.
11. Für einfache Graphen  $G$  ist der Koeffizient  $a_1 = -q$  (3.4). Wie sieht  $a_1$  aus, wenn  $G$  Mehrfachkanten enthält? Überlege eine Beschreibung von  $a_2$ .
12. Zeige durch einen Kempe-Schluss, dass eine irreduzible Landkarte keinen Ring mit vier oder weniger Ländern enthalten kann.
- 13.\* Zeige, dass  $K_{2n}$  stets 1-faktorisierbar ist.
14. Gib eine rekursive Charakterisierung jener Bäume, die einen 1-Faktor besitzen.
- 15.\* Zeige, dass der Petersen Graph keinen Hamiltonschen Kreis besitzt.
16. Löse das Problem des Rösselsprunges und diskutiere das analoge Problem für die Dame, Läufer etc. Existiert auch eine Lösung, wenn der Springer auf einem  $7 \times 7$ -Brett platziert ist?
- 17.\* Beweise Lemma 3.10.
18. Sei  $G$  zusammenhängend und  $B_1, \dots, B_m$  die Blöcke von  $G$ . Der *Block-Graph*  $B_G$  von  $G$  hat die Blöcke als Ecken, wobei  $B_i B_j$  eine Kante bilden, falls sie eine gemeinsame Schnittcke von  $G$  enthalten (siehe Figur 3.18). Zeige, dass  $B_G$  ein Baum ist.
19. Bestimme die Zusammenhangszahl  $\kappa$  für: a. Räder  $W_n$ , b. Petersen Graphen, c. Würfel  $Q_3, Q_4$ .
20. Rechneraufgabe: Angenommen  $G$  ist Eulersch. Entwirf einen Algorithmus, der einen Eulerzug ergibt.

## II Thema

# 4 Plättbarkeit

Von diesem Kapitel an betrachten wir stets Graphen statt Landkarten. Wir haben in Kapitel 2 gesehen (Satz 2.8), dass die 4-Farben Vermutung äquivalent zur Vermutung ist: *Jeder plättbare Graph ist 4-färbbar*. Als vordringlichste Aufgabe ergibt sich daraus eine *Charakterisierung plättbarer Graphen*.

In früheren Kapiteln hatten wir das Puzzle von Möbius erwähnt. In seiner dualen Formulierung lautet es: Ist es möglich, 5 Punkte in der Ebene zu wählen und durch Kanten jeweils zu verbinden, so dass keine zwei Kanten einander kreuzen? Kurz ausgedrückt: Ist der Graph  $K_5$  plättbar? Ein weiteres allseits bekanntes Puzzle (es wird z. B. in der berühmten Rätselsammlung von Dudeney 1917 erwähnt) ist das „Gas-Wasser-Elektrizitäts Problem“: Gegeben 3 Häuser und 3 Stationen für Gas, Wasser und Elektrizität. Ist es möglich, Leitungen von jeder Station zu jedem Haus zu legen solcherart, dass sich keine zwei Leitungen überschneiden? Der Graph, der aus zwei disjunkten Eckenmengen  $V_1, V_2$  mit  $|V_1| = m, |V_2| = n$  besteht und in dem die Kanten genau die Ecken aus  $V_1$  mit denen aus  $V_2$  verbinden, heißt der *vollständige bipartite Graph*  $K_{m,n}$  (siehe Übung 2 in Kap. 2). Das Rätsel fragt also: Ist  $K_{3,3}$  plättbar?



Figur 4.1

Die Antwort können wir mühelos mit Hilfe der Euler Formel 1.4 geben bzw. mittels 1.5.

**Lemma 4.1.**  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht plättbar.

*Beweis.* Für  $K_5$  haben wir uns das schon im Anschluss an 1.5 überlegt. Angenommen,  $K_{3,3}$  ist doch plättbar und  $G = (V, E, R)$  ein zu  $K_{3,3}$  isomorpher ebener Graph. Wegen  $|V| = 6$  und  $|E| = 9$  gilt  $|V| = \frac{2}{3}|E|$ . Da es in  $K_{3,3}$  und somit auch in  $G$  keine Brücken und Kreise der Länge 2 oder 3 gibt, haben wir ferner  $2|E| \geq 4|R|$ . Aus der Eulerschen Formel ergibt sich daraus  $2 = |V| - |E| + |R| \leq \frac{2|E|}{3} - |E| + \frac{|E|}{2} = \frac{|E|}{6}$ , d. h.  $|E| \geq 12$ , im Widerspruch zu  $|E| = 9$ .  $\square$

Aufgrund der Leichtigkeit des Beweises der Nichtplättbarkeit von  $K_5$  und  $K_{3,3}$  ist es umso überraschender, dass diese beiden Graphen allein bereits für die Nichtplättbarkeit eines beliebigen Graphen verantwortlich sind. Zunächst gilt klarerweise:

**Lemma 4.2.** Ist  $G$  plättbar, so auch jeder Untergraph von  $G$ .

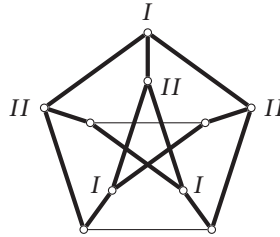
Ein plättbarer Graph kann also mit Sicherheit weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  als Untergraphen enthalten, aber, und dies ist der Inhalt des berühmten Satzes von Kuratowski aus

dem Jahre 1930, auch die Umkehrung ist richtig: Ist  $G$  nicht plättbar, so muss  $G$  in einem gewissen, noch zu präzisierenden, Sinn  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthalten.

Wir wollen dieses „Enthaltensein“ sogleich erläutern. Sei  $G$  ein beliebiger Graph und  $e = uv$  eine Kante von  $G$ . Wir sagen, dass wir die Kante  $e$  *unterteilen*, falls wir  $e$  durch einen Weg  $u, u_1, \dots, u_t, v$  ersetzen, d.h. im neuen Graphen  $G'$  haben die eingefügten Ecken  $u_i$  alle den Grad 2. Ein Graph  $H$  ist eine *Unterteilung* von  $G$ , wenn  $H$  durch Unterteilung gewisser Kanten von  $G$  entsteht. Da Ecken des Grades 2 ganz offensichtlich keinen Einfluss auf die Einbettbarkeit haben, können wir sagen:

**Lemma 4.3.** *Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn jede seiner Unterteilungen plättbar ist. Insbesondere sind also alle Unterteilungen von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  nicht plättbar.*

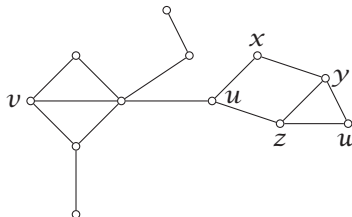
**Beispiel.** Mit dem Begriff der Unterteilung können wir sofort die Nichtplättbarkeit des Petersen Graphen  $P$  nachweisen. Wie aus der Figur 4.2 ersichtlich ist, enthält  $P$  eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  als Untergraphen – und ist somit nach 4.1 bis 4.3 nicht plättbar. Die Ecken der ersten Menge sind mit  $I$ , jene der zweiten Menge mit  $II$  gekennzeichnet.



Figur 4.2

Bevor wir den Beweis des Kuratowskischen Satzes:  $G$  ist plättbar genau dann, wenn  $G$  keine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält, durchführen, wollen wir einen nicht minder berühmten Satz, den Satz von Menger, besprechen, der dem Kuratowskischen Satz historisch vorangeht und dessen Beweis wesentlich durchsichtiger macht.

Eine Eckenmenge  $T$  eines Graphen  $G = (V, E)$  heißt *trennende Eckenmenge*, falls der Graph  $G \setminus T$  unzusammenhängend ist. Im letzten Kapitel haben wir die *Zusammenhangszahl*  $\kappa(G)$  als die Mächtigkeit einer kleinsten trennenden Eckenmenge definiert, also  $\kappa(G) := \min\{|T| : T \subseteq V \text{ trennende Eckenmenge}\}$ . Seien  $u$  und  $v$  nichtbenachbarte Ecken in  $G$ , dann verstehen wir unter der *lokalen Zusammenhangszahl*  $\kappa_G(u, v)$  die Mächtigkeit einer kleinsten Eckenmenge  $T \subseteq V \setminus \{u, v\}$ , die  $u$  von  $v$  trennt, d.h. in  $G \setminus T$  sollen  $u$  und  $v$  in verschiedenen Komponenten liegen. Betrachten wir den Graphen in Figur 4.3. Hier ist  $\kappa_G(u, v) = 1$ , aber  $\kappa_G(u, w) = 2$ .



Figur 4.3

Zwei Wege, die Ecken  $u$  und  $v$  verbinden, nennen wir *disjunkte  $u, v$ -Wege*, falls sie außer  $u, v$  keine weiteren Ecken gemeinsam haben. In Figur 4.3 sind z. B.  $(u, x, y, w)$  und  $(u, z, w)$  disjunkte  $u, w$ -Wege. Unter der *Verbindungszahl*  $\mu_G(u, v)$  verstehen wir die Maximalzahl von paarweise disjunkten  $u, v$ -Wegen. Klarerweise gilt für nichtbenachbarte Ecken  $u, v$  stets  $\kappa_G(u, v) \geq \mu_G(u, v)$ , denn jede  $u, v$ -trennende Eckenmenge muss offensichtlich jeden der  $\mu_G(u, v)$  disjunkten Wege treffen, da ansonsten  $u$  und  $v$  nach wie vor durch einen Weg verbunden wären. Dass tatsächlich Gleichheit gilt, ist Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 4.4** (Menger). *Seien  $u$  und  $v$  zwei nichtbenachbarte Ecken des Graphen  $G$ . Dann gilt stets  $\kappa_G(u, v) = \mu_G(u, v)$ .*

*Beweis.* Nach der eben gemachten Bemerkung genügt der Nachweis der Ungleichung  $\kappa_G(u, v) \leq \mu_G(u, v)$ . Das heißt, wir müssen zeigen: Brauchen wir  $h$  Ecken, um  $u$  und  $v$  zu trennen, so existieren  $h$  disjunkte  $u, v$ -Wege. Für  $h = 0$  und  $1$  ist dies klar. Angenommen, die Behauptung ist falsch, dann sei  $h > 1$  die kleinste Zahl, für die ein Gegenbeispiel existiert. Unter all diesen Gegenbeispielen wählen wir eines von kleinster Eckenzahl  $p$  und unter allen Gegenbeispielen mit  $p$  Ecken einen Graphen  $G$  mit einer Minimalzahl von Kanten. In  $G$  existieren also zwei nichtbenachbarte Ecken  $u$  und  $v$ , für die  $\kappa_G(u, v) \geq h$  ist, aber  $\mu_G(u, v) < h$ . Wir stellen ein paar Eigenschaften von  $G$  zusammen:

(a) Keine Ecke in  $G$  ist sowohl zu  $u$  als auch zu  $v$  benachbart. Wäre nämlich  $w$  so eine Ecke, so hätten wir, da  $G \setminus w$  weniger Ecken als  $G$  enthält,  $\kappa_{G \setminus w}(u, v) = \mu_{G \setminus w}(u, v) = h - 1$ . Zu den  $h - 1$  disjunkten  $u, v$ -Wegen in  $G \setminus w$  können wir den Weg  $(u, w, v)$  hinzunehmen, im Widerspruch zu  $\mu_G(u, v) < h$ .

Sei  $e$  irgendeine Kante in  $G$ . Entfernen wir  $e$ , so kann sich die Zusammenhangszahl  $\kappa_G(u, v)$  höchstens um 1 verringern, sie muss es wegen der Wahl von  $G$  aber auch, also haben wir  $\kappa_{G \setminus e}(u, v) = \mu_{G \setminus e}(u, v) = h - 1$ . Zu jedem  $e \in E$  existiert somit eine  $u, v$ -trennende Eckenmenge  $T(e)$  in  $G \setminus e$  mit  $|T(e)| = h - 1$ . Sei  $e = ab$  und  $a \neq u$ ,  $a \neq v$ . Da  $T(e)$  die Ecken  $u$  und  $v$  in  $G$  nicht trennt, muss es einen  $u, v$ -Weg in  $G$  geben, der  $T(e)$  nicht trifft, aber natürlich  $e$  enthalten muss (da ansonsten  $T(e)$  nicht  $u, v$ -trennende Eckenmenge in  $G \setminus e$  wäre). Also haben wir:

(b)  $T(e) \cup \{a\}$  ist  $u, v$ -trennende Eckenmenge in  $G$ .

Sei  $W = \{w_1, \dots, w_h\}$  eine beliebige  $u, v$ -trennende Eckenmenge in  $G$ . Unter einem  $u, W$ -Weg verstehen wir einen Weg von  $u$  zu einer Ecke  $w_i$  von  $W$ , der außer  $w_i$  keine weitere Ecke von  $W$  enthält. Entsprechend wird ein  $W, v$ -Weg definiert. Es seien  $P_u$  und  $P_v$  die Menge aller  $u, W$ -Wege bzw.  $W, v$ -Wege. Jede Ecke  $w_i$  kommt in mindestens einem Weg von  $P_u$  und in mindestens einem Weg in  $P_v$  vor, denn ansonsten würde  $W \setminus \{w_i\}$  bereits  $u$  von  $v$  trennen. Ein Weg aus  $P_u$  kann mit einem Weg aus  $P_v$  aber außer dem möglichen Treffpunkt in  $W$  keine weitere Ecke gemeinsam haben, denn ansonsten gäbe es einen  $u, v$ -Weg, der  $W$  überhaupt nicht trifft. Schließlich behaupten wir, dass entweder  $P_u$  genau aus den Wegen  $(u, w_1), \dots, (u, w_h)$ , also aus einzelnen Kanten besteht, oder  $P_v$  genau aus den Kanten  $(w_1, v), \dots, (w_h, v)$ . Wenn nicht, dann wäre  $P_u$  zusammen mit den Kanten  $w_1 v, \dots, w_h v$  ein Graph  $G_1$  mit  $\kappa_{G_1}(u, v) = h$  und ebenso  $P_v$  zusammen mit  $u w_1, \dots, u w_h$  ein Graph  $G_2$  mit  $\kappa_{G_2}(u, v) = h$ . Da sowohl  $G_1$  wie  $G_2$  weniger Ecken als  $G$  enthalten, hätten wir  $h$  disjunkte  $u, v$ -Wege in  $G_1$  wie auch in  $G_2$ . Durch Kombination der  $P_u$  bzw.  $P_v$ -Teile hätten wir dann aber auch  $h$  disjunkte Wege in  $G$ . Wir notieren also:

(c) Ist  $W = \{w_1, \dots, w_h\}$  eine  $u, v$ -trennende Eckenmenge, so ist entweder  $u$  benachbart zu allen  $w_i$  oder  $v$  benachbart zu allen  $w_i$ .

Wir kommen zum Schluss. Es sei  $P = (u, a_1, a_2, \dots, v)$  ein  $u, v$ -Weg kürzester Länge. Dann ist  $a_1 \neq u, v$ ,  $a_1 v \notin E$  wegen (a) und ebenso  $a_2 \neq v$  (wegen (a)) und  $a_2 \neq u$ ,  $ua_2 \notin E$  wegen der Wahl von  $P$ . Sei  $e = a_1 a_2$  und  $T(e) = \{t_1, \dots, t_{h-1}\}$  eine  $u, v$ -trennende Eckenmenge in  $G \setminus e$ . Nach (b) trennen sowohl  $T(e) \cup \{a_1\}$  wie auch  $T(e) \cup \{a_2\}$  die Ecken  $u$  und  $v$  in  $G$ . Wegen  $a_1 v \notin E$  und  $ua_2 \notin E$  folgt aus (c), dass sowohl  $u$  wie auch  $v$  zu allen Ecken  $t_1, \dots, t_{h-1}$  benachbart sind. Wegen  $h - 1 \geq 1$  gibt es daher mindestens eine Ecke  $t_i$ , die zu  $u$  und  $v$  benachbart ist, im Widerspruch zu (a).  $\square$

Wir werden auf die vielfältigen Auswirkungen dieses Satzes in Kapitel 6 zurückkommen. Für den Moment wollen wir nur die nachstehende Folgerung notieren.

**Folgerung 4.5** (Whitney). *Ein Graph  $G$  mit mindestens zwei Ecken ist genau dann  $n$ -fach zusammenhängend, wenn je zwei Ecken durch mindestens  $n$  disjunkte Wege verbunden sind.*

*Beweis.* Der Satz ist offensichtlich richtig für vollständige Graphen. Sei  $G$  nicht vollständig. Wenn je zwei Ecken durch  $n$  disjunkte Wege verbunden sind, dann gilt mit Sicherheit  $\kappa(G) \geq n$ . Sei umgekehrt  $\kappa(G) \geq n$ . Da ersichtlich  $\kappa(G) = \min \kappa_G(u, v)$  über alle nichtbenachbarten Eckenpaare  $u, v$  ist, so haben wir nach dem Satz von Menger  $\mu_G(u, v) = \kappa_G(u, v) \geq \kappa(G) \geq n$  für alle nichtbenachbarten Paare  $u, v$ . Es bleibt zu zeigen, dass dann auch  $\mu_G(u, v) \geq n$  für alle Kanten  $uv \in E$  gilt, und dies sei den Übungen überlassen.  $\square$

Und nun zurück zu unserem eigentlichen Thema, der Plättbarkeit. Vor dem Beweis des Satzes von Kuratowski eine Vorbemerkung: Ist  $G$  ein ebener 2-fach zusammenhängender Graph, so ist jedes Land von  $G$  durch eine Jordansche Kurve berandet, die sich ganz aus Kanten von  $G$  zusammensetzt. Dies folgt sofort aus dem Jordanschen Kurvensatz. Wir können nun  $G$  so einbetten, dass jedes beliebige Land  $F$  äußeres Land wird. Dazu brauchen wir  $G$  nur durch stereographische Projektion auf die Kugel abzubilden, einen Punkt im Inneren von  $F$  als „Nordpol“ wählen und dann wieder auf die Ebene tangential zum Südpol zurückprojizieren. Insbesondere kann  $G$  also so eingebettet werden, dass eine vorgeschriebene Kante bzw. eine vorgeschriebene Ecke am Rand des äußeren Landes liegt.

**Satz 4.6** (Kuratowski). *Ein Graph  $G$  ist genau dann plättbar, wenn  $G$  keinen zu einer Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  isomorphen Untergraphen enthält.*

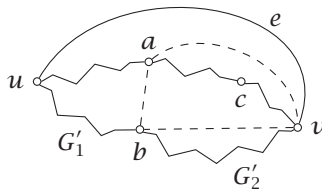
*Beweis.* Nur eine Richtung ist zu zeigen (vgl. 4.3). Zur Abkürzung sagen wir,  $G$  ist in der Klasse  $\Pi$ , falls  $G$  keine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält. Wir müssen also ( $G \in \Pi \Rightarrow G$  plättbar) nachweisen. Dazu führen wir Induktion nach der Eckenzahl. Jeder Graph mit höchstens 4 Ecken ist plättbar, da  $K_4$  plättbar ist. Innerhalb der Klasse mit  $p$  Ecken führen wir Induktion nach der Kantenzahl  $q$ . Für  $q = 0$  ist der Graph trivialerweise plättbar. Sei also die Behauptung richtig für alle Graphen mit höchstens  $p$  Ecken und weniger als  $q$  Kanten, und  $G \in \Pi$  ein Graph mit  $p \geq 5$  Ecken und  $q$  Kanten. Wir gliedern den Beweis nach der Zusammenhangszahl von  $G$ .

(a)  $\kappa(G) = 0$ . In diesem Fall ist  $G$  unzusammenhängend. Da jede Komponente nach Induktionsvoraussetzung in die Ebene eingebettet werden kann, so gilt dies natürlich auch für  $G$ .

(b)  $\kappa(G) = 1$ . Ist  $v$  Schnittecke, so können wir  $G = (V, E)$  in zwei kantendisjunkte Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  zerlegen mit  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ ,  $E = E_1 \cup E_2$ . Offensichtlich sind  $G_1, G_2 \in \Pi$ . Nach Induktionsannahme können wir  $G_1$  und  $G_2$  in die Ebene einbetten und zwar nach unserer Vorbemerkung so, dass  $v$  jeweils Randpunkt des äußeren Landes ist. Es ist nun klar, dass sich die beiden ebenen Graphen  $G_1$  und  $G_2$  (nach einer vielleicht nötigen stetigen Deformation) bei  $v$  so zusammenheften lassen, dass auch der Gesamtgraph  $G$  eben ist.

(c)  $\kappa(G) = 2$ . Es sei  $\{u, v\}$  eine trennende Eckenmenge.  $G$  zerfällt daher in zwei Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$ ,  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \{uv\}$ , falls die Kante  $e = uv$  in  $G$  auftritt. Da  $G$  zweifach zusammenhängend ist, sind  $u$  und  $v$  in jedem der Graphen  $G_i$  durch einen Weg  $W_i$  verbunden. Daraus folgt, dass  $G_i \cup e$ ,  $i = 1, 2$ , weder eine Unterteilung von  $K_5$  noch von  $K_{3,3}$  enthält, da sonst  $G_i \cup W_j \subseteq G$  ( $j \neq i$ ) eine solche Unterteilung enthalten würde, im Widerspruch zur Annahme  $G \in \Pi$ . Nach Induktionsannahme sind demnach  $G_1 \cup e$  und  $G_2 \cup e$  in die Ebene einbettbar und zwar so, dass  $e$  jeweils am äußeren Rand liegt. Dort können wir nun  $G_1 \cup e$  und  $G_2 \cup e$  zu  $G \cup e$  zusammenheften und  $e$  wieder weglassen, falls diese Kante ursprünglich nicht vorhanden war.

(d)  $\kappa(G) \geq 3$ . Es sei  $e = uv$  eine beliebige Kante und  $G' = G \setminus e$ . Wir unterscheiden die beiden Fälle:  $\kappa_{G'}(u, v) = 2$  oder  $\kappa_{G'}(u, v) \geq 3$ . Erledigen wir zunächst den ersten Fall. Sei  $\{a, b\}$  eine  $u, v$ -trennende Eckenmenge in  $G'$ .  $G'$  zerfällt wie oben in Teilgraphen  $G'_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G'_2 = (V_2, E_2)$  mit  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ ,  $u \in V_1$ ,  $v \in V_2$  und  $E_1 \cup E_2 = E \setminus \{e\}$ ,  $E_1 \cap E_2 = \{ab\}$ , falls diese Kante vorhanden ist. (Figur 4.4)

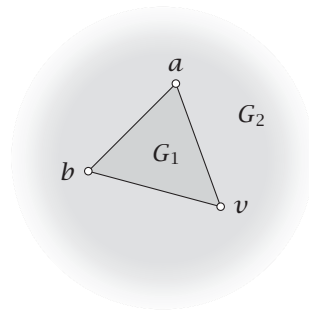


Figur 4.4

**Kasimierz Kuratowski** wurde 1896 in Warschau geboren. Er begann sein Studium in Glasgow und kehrte nach Neugründung der polnischen Universität von Warschau dorthin zurück, wo er 1921 mit einer Arbeit zur Grundlegung der Topologie promovierte. Nach einer Lehrtätigkeit in Lvov (Lemberg), wo sich die Mathematiker oft im legendären Schottischen Café trafen, übernahm er 1934 eine Professur an der Universität von Warschau. Nach dem 2. Weltkrieg war er eine der zentralen Figuren beim Wiederaufbau des akademischen Lebens in Polen. Unter Anderem war er Gründungsdirektor des Mathematischen Institutes an der Akademie der Wissenschaften. Neben der Graphentheorie sind mit seinem Namen bahnbrechende Resultate aus Logik, Topologie und Maßtheorie verbunden. Er starb 1980 in Warschau.

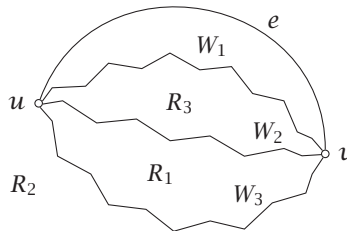


Da  $p \geq 5$  ist, existiert noch eine weitere Ecke  $c$  in, sagen wir,  $G'_2$ . Falls noch nicht vorhanden, fügen wir die Kanten  $ab$ ,  $av$  und  $bv$  ein und schreiben  $D$  für den vollständigen Graphen auf  $\{a, b, v\}$ .  $G_1$  und  $G_2$  seien schließlich die Graphen  $G_1 = G'_1 \cup D \cup e$ ,  $G_2 = G'_2 \cup D$ .  $G_1$  und  $G_2$  haben also genau  $D$  gemeinsam und es ist  $u$  in  $G_1$ ,  $c$  in  $G_2$ . Wegen  $\kappa(G) \geq 3$  existieren nach dem Mengerschen Satz drei disjunkte  $u, c$ -Wege. Da  $\{a, b, v\}$  eine  $u, c$ -trennende Eckenmenge ist, werden diese Wege (wie im Beweis von 4.4) in zwei Tripel  $P_u$  von  $u$  nach  $D$  und  $P_c$  von  $D$  nach  $c$  zerlegt. Enthielte nun  $G_1$  eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ , so gäbe es auch in  $G$  so eine Unterteilung, indem wir eventuell nicht vorhandene Kanten von  $D$  in  $G$  durch die Wege von  $P_c$  ersetzen. Ganz analog verläuft die Überlegung für  $G_2$ .  $G_1$  und  $G_2$  sind also nach Induktionsvoraussetzung plättbar. Betten wir  $G_1$  in die Ebene ein. Gäbe es im Inneren von  $D$  und im Äußeren eine Ecke, dann könnten wir diese Ecken nach 4.4 durch disjunkte Wegetripel mit den Ecken von  $D$  verbinden. Zusammen mit  $P_c$  erhielten wir aber dann eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  in  $G$ . Also ist  $D$  Begrenzung eines Landes in  $G_1$  und analog in  $G_2$ . Nach unserer Vorbemerkung können wir nun  $D$  zum äußeren Land in  $G_1$  machen, und  $G_1$  somit (gegebenenfalls durch eine Verzerrung) ins Innere von  $D$  in  $G_2$  einbetten (siehe Figur 4.5).



Figur 4.5

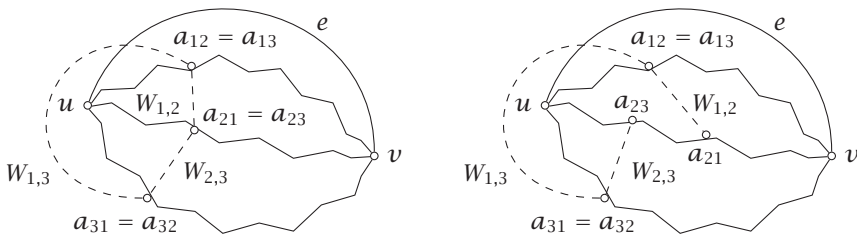
Es bleibt der letzte Fall, dass  $\kappa_{G'}(u, v) \geq 3$  ist. Nach Induktionsannahme können wir  $G'$  als in die Ebene eingebettet auffassen. Nach dem Mengerschen Satz existieren in  $G'$  drei disjunkte Wege  $W_1, W_2, W_3$  von  $u$  nach  $v$ . Diese Wege zerlegen die Ebene in drei Gebiete  $R_1, R_2, R_3$  wie in Figur 4.6:



Figur 4.6



Die in  $R_1$  liegenden Länder, welche  $u$  als Randpunkt enthalten, seien  $F_1, \dots, F_h$ . Enthält eines der  $F_i$  auch  $v$  als Randpunkt, so könnten wir  $e$  als Kurve von  $u$  nach  $v$  innerhalb  $F_i$  zeichnen und  $G$  wäre plättbar. Im anderen Fall existiert auf den Rändern der  $F_i$  innerhalb  $R_1$  ein Weg  $W_{2,3}$  von einer Ecke  $a_{2,3}$  auf  $W_2$  nach einer Ecke  $a_{3,2}$  auf  $W_3$ . Entsprechend gibt es einen Weg  $W_{1,3}$  ganz in  $R_2$  von einer Ecke  $a_{1,3}$  auf  $W_1$  nach einer Ecke  $a_{3,1}$  auf  $W_3$ , und schließlich einen Weg  $W_{1,2}$  ganz in  $R_3$  von einer Ecke  $a_{1,2}$  auf  $W_1$  nach einer Ecke  $a_{2,1}$  auf  $W_2$ . Wir betrachten die Eckenpaare:  $a_{1,2}, a_{1,3} \in W_1$ ,  $a_{2,1}, a_{2,3} \in W_2$ ,  $a_{3,1}, a_{3,2} \in W_3$ . Diese Paare können jeweils gleich oder verschieden sein - und in jedem Fall werden wir eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  nachweisen, im Widerspruch zur Annahme  $G \in \Pi$ . Die ersten beiden Möglichkeiten, dass alle drei Paare gleich sind (ergibt eine Unterteilung von  $K_5$ ) bzw. dass zwei Paare gleich sind (ergibt eine Unterteilung von  $K_{3,3}$ ) sind in Figur 4.7 abgebildet. Die beiden anderen Fälle sind ebenso leicht zu erledigen.  $\square$

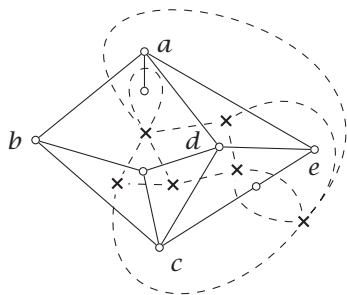


Figur 4.7

Wie es oft in der Mathematik passiert, wenn ein Satz „in der Luft liegt“, wurde die Charakterisierung der plättbaren Graphen mit genau denselben Bedingungen fast zur selben Zeit von Frink und Smith ebenfalls 1930 gefunden. Kuratowskis Arbeit wurde jedoch zuerst publiziert und es ist sein Name, der seither mit dem Theorem verbunden ist.

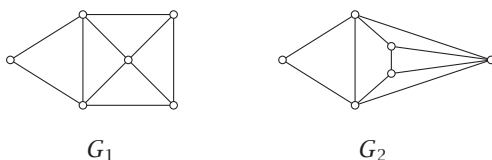
Whitney ging 1932 einen anderen Weg. Er knüpfte an die geometrisch-kombinatorischen Ideen von Veblen an, insbesondere an die Tatsache, dass jeder ebene Graph  $G$  einen natürlichen dualen Graphen  $G^*$  besitzt. Rufen wir uns die Definition nochmals in Erinnerung: Es sei  $G$  ein ebener Graph. Wir erhalten den *dualen Graphen*  $G^*$ , indem wir in jedes Land von  $G$  eine Ecke platzieren und zwei solche neue Ecken verbinden, wenn die entsprechenden Länder benachbart sind und zwar so oft, wie viel gemeinsame Grenzen sie besitzen. Um dies deutlich zu machen, kreuzen wir die jeweils entsprechenden Kanten. (Figur 4.8)

Wir haben schon bemerkt, dass  $G \cong G^{**}$  gilt, falls  $G$  zusammenhängend ist, und auch nur dann, da der duale Graph immer zusammenhängend ist. Mit Hilfe des Duals können wir auch die früher aufgeworfene Frage beantworten, ob ein plättbarer Graph auf mehrere Arten in die Ebene eingebettet werden kann. Sei  $G$  plättbar und  $G_1, G_2$  zwei zu  $G$  isomorphe ebene Graphen. Wir werden die Einbettungen genau dann als isomorph bezeichnen, wenn auch für die dualen Graphen  $G_1^*, G_2^*$  Isomorphie vorliegt. Es leuchtet ein, dass ein unzusammenhängender Graph nichtisomorphe Einbettungen



Figur 4.8

haben kann, aber selbst für zusammenhängende, ja sogar zweifach zusammenhängende Graphen ist dies noch möglich. Figur 4.9 zeigt zwei Einbettungen  $G_1, G_2$  ein- und desselben Graphen. Offensichtlich ist aber  $G_1^* \cong G_2^*$ , da  $G_1^*$  eine Ecke vom Grad 5 hat (entsprechend dem äußeren Land),  $G_2^*$  aber nicht.



Figur 4.9

Ist aber  $G$  3-fach zusammenhängend, so kann dies nicht mehr vorkommen.

**Satz 4.7** (Whitney). *Ein 3-fach zusammenhängender schlingenloser plättbarer Graph  $G$  kann nur auf eine Weise in die Ebene eingebettet werden.*

*Beweis.* Es seien  $\mathcal{L}_1 = (V, E, R_1)$  und  $\mathcal{L}_2 = (V, E, R_2)$  zwei Einbettungen von  $G$  mit Gerüst  $G_1(\mathcal{L}_1) \cong G$  und  $G_2(\mathcal{L}_2) \cong G$ . Wir müssen zeigen, dass mit den Identitätsabbildungen  $1_V : V \rightarrow V$ ,  $1_E : E \rightarrow E$  von  $G_1$  nach  $G_2$  die Länder von  $\mathcal{L}_1$  genau den Ländern von  $\mathcal{L}_2$  entsprechen. Sei  $F$  ein Land in  $\mathcal{L}_1$ . Da  $G_1$  3-fach zusammenhängend ist, bilden die Randecken  $C_1$  von  $F$  einen Kreis in  $G_1$ . Sei  $C_2$  der korrespondierende Kreis in  $G_2$ .  $C_2$  determiniert eine geschlossene Jordan Kurve. Aus dem 3-fachen Zusammenhang von  $G_1$  folgt, dass  $G_1 \setminus C_1$  zusammenhängend ist, da nach 4.5 je zwei Ecken in  $G_1$  durch mindestens drei disjunkte Wege verbunden sind, von denen ersichtlich nur höchstens zwei den Kreis  $C_1$  treffen können. Wegen der Isomorphie  $G_1 \cong G_2$  ist daher auch  $G_2 \setminus C_2$  zusammenhängend. Dies schließt aber aus, dass im Inneren und Äußeren der geschlossenen Jordan Kurve  $C_2$  Ecken von  $G_2$  auftreten, d. h.  $C_2$  muss Rand eines Landes in  $\mathcal{L}_2$  sein.  $\square$

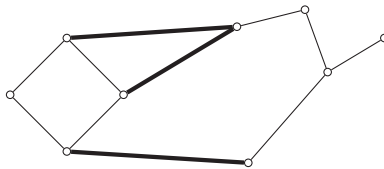
Aus dem Satz von Steinitz 3.11 folgt insbesondere, dass jeder polyedrische Graph auf eine und nur eine Weise (im Sinne der obigen Isomorphie) in die Ebene eingebettet werden kann.

Betrachten wir Figur 4.8. Es ist klar, dass eine Schlinge in  $G$  einer Brücke in  $G^*$  entspricht und umgekehrt. Mehr noch: Wir sehen, dass die Kantenmenge eines Kreises in

$G$ , z. B. des Kreises  $(a, b, c, d, e, a)$ , einer minimalen trennenden Kantenmenge in  $G^*$  entspricht, und auch hier gilt die Umkehrung. Diese Beobachtung hat Whitney 1932 benützt, um eine völlig neue kombinatorische (anstatt der, wenn wir wollen, topologischen in 4.6) Kennzeichnung plättbarer Graphen abzuleiten. Natürlich war auch die Hoffnung dabei, das (kombinatorische) Färbungsproblem durch eine kombinatorische Interpretation der zugrundeliegenden Struktur zu lösen. Zuerst die nötigen Definitionen.

**Definition.** Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph. Ein *Polygon* ist die Kantenmenge eines Kreises.  $B \subseteq E$  heißt *trennende Kantenmenge*, falls  $G$  nach Entfernung von  $B$  mindestens eine Komponente mehr aufweist, und  $B \subseteq E$  heißt *minimale trennende Kantenmenge* oder *Bond*, falls  $B$  trennende Kantenmenge ist, aber keine echte Teilmenge von  $B$  diese Eigenschaft hat.

Der Name „Bond“ erklärt sich aus dem Englischen „Verbindung“. Ein Bond hält den Graphen gerade noch zusammen. Entfernen wir ein Bond, so erhöht sich die Komponentenzahl um genau eins. Offensichtlich enthalten die mit einer Ecke  $v$  inzidenten Kanten stets ein Bond. Ein weiteres Beispiel ist in Figur 4.10 enthalten. Die fettgedruckten Kanten ergeben ein Bond.



Figur 4.10

**Definition.** Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph. Ein Graph  $G^* = (V^*, E^*)$  heißt ein zu  $G = (V, E)$  *dualer Graph im Sinne von Whitney*, kurz *W-Dual*, falls eine Bijektion  $\varphi : E \rightarrow E^*$  existiert, so dass  $C \subseteq E$  Polygon in  $G$  genau dann ist, wenn  $C^* = \varphi(C) \subseteq E^*$  Bond in  $G^*$  ist.

Wir haben schon bemerkt, dass im Falle eines ebenen Graphen  $G$  der (geometrisch) duale Graph  $G^*$  auch *W-Dual* ist. ( $\varphi$  ist hier die Abbildung, die jeder Kante  $e$  von  $G$  die sie schneidende Kante  $e^*$  von  $G^*$  zuordnet.) Jeder plättbare Graph besitzt somit ein *W-Dual*. Whitney hat nun umgekehrt gezeigt, dass die Existenz eines *W-Duals* wiederum die Plättbarkeit von  $G$  impliziert. Der Beweis folgt aus dem Satz von Kuratowski und den folgenden drei Hilfssätzen.

**Hilfssatz 4.8.** *Es sei  $G = (V, E)$  gegeben und  $G_A = (V, A)$  der von der Kantenmenge  $A \subseteq E$  aufgespannte Untergraph. Hat  $G = (V, E)$  ein *W-Dual*, so auch  $G_A = (V, A)$ .*

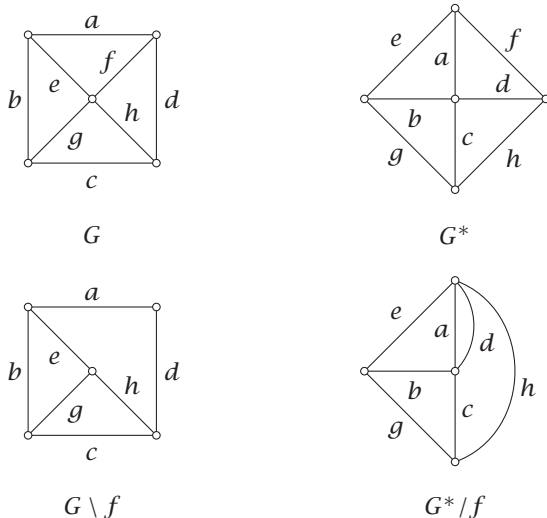
*Beweis.* Da wir den Untergraphen  $G_A = (V, A)$  Schritt für Schritt durch Weglassen der Kanten aus  $E \setminus A$  erhalten, genügt es zu zeigen, dass für jede Kante  $e$  der Graph  $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$  ein *W-Dual* hat. Es sei  $G^* = (V^*, E^*)$  ein *W-Dual* von  $G$  mit entsprechender Abbildung  $\varphi : E \rightarrow E^*$ . Wir setzen  $S^* = \varphi(S)$  für jede Kantenmenge  $S \subseteq E$ . Mit  $G^*/e^*$  bezeichnen wir den Graphen, der aus  $G^*$  durch *Kontraktion* der

Kante  $e^*$  (d. h. Identifizierung der beiden Endecken) entsteht.  $G^*/e^*$  ist also ein Graph mit der Kantenmenge  $E^* \setminus \{e^*\}$ .

**Behauptung.** Der Graph  $G^*/e^*$  ist ein  $W$ -Dual von  $G \setminus e$  mittels der Einschränkung  $\varphi|_{E \setminus \{e\}} : E \setminus \{e\} \rightarrow E^* \setminus \{e^*\}$ .

Sei  $C \subseteq E \setminus \{e\}$  ein Polygon. Da  $C^*$  Bond in  $G^*$  ist, so ist  $C^*$  natürlich auch trennende Kantenmenge in  $G^*/e^*$ .  $C^*$  muss aber auch minimal trennend sein, da  $e^*$  in einer der durch Entfernung von  $C^*$  entstehenden Komponenten liegen muss und durch Kontraktion die Trennung überhaupt nicht beeinflusst wird. Die Umkehrung ist ebenso rasch gezeigt.  $\square$

Figur 4.11 illustriert Hilfssatz 4.8. Zur besseren Übersicht wählen wir für entsprechende Kanten in  $G$  und  $G^*$  dieselben Buchstaben (ohne Stern).  $G^*$  konstruieren wir als geometrisches Dual, die innere Ecke in  $G^*$  entspricht dem äußeren Land von  $G$ .



Figur 4.11

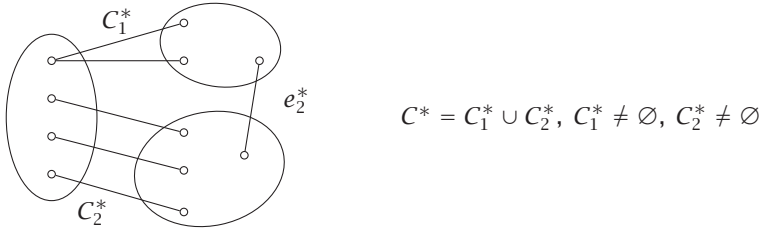
**Hilfssatz 4.9.** *Besitzt eine Unterteilung eines Graphen  $G$  ein  $W$ -Dual, so auch  $G$  selber.*

*Beweis.* Da wir eine Unterteilung durch Einfügen der Ecken vom Grad 2 Schritt für Schritt konstruieren können, genügt es, die Unterteilung einer einzelnen Kante  $e = ab$  in die beiden Kanten  $e_1 = ac$ ,  $e_2 = cb$  zu betrachten. Sei  $H$  der so erhaltene Graph auf der Kantenmenge  $E_1 = E \setminus \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$  und  $H^*$  ein  $W$ -Dual mit der Abbildung  $\varphi : E_1 \rightarrow E_1^*$ .

**Behauptung.**  $H^* \setminus e_2^*$  ist ein  $W$ -Dual von  $G$  mittels der Abbildung  $\psi : E \rightarrow E_1^* \setminus \{e_2^*\}$  definiert durch  $\psi(x) = \varphi(x)$  für alle  $x \neq e$ ,  $\psi(e) = e_1^*$ . (Die Leser werden bemerken, dass wir, um von  $H$  nach  $G$  zu kommen, die Kante  $e_2$  kontrahieren, und somit  $\psi$  genau die Umkehrabbildung von  $\varphi$  aus 4.8 ist.)

Sei  $C$  Polygon von  $G$ . Falls  $C$  die Kante  $e$  nicht enthält, so ist  $C$  auch Polygon in  $H$ , somit  $C^*$  Bond in  $H^*$ .  $C^*$  ist damit auch trennende Kantenmenge in  $H^* \setminus e_2^*$ . Wäre  $C^*$

nicht minimal trennend, so müsste eine der durch Wegnahme von  $C^*$  entstehenden Komponenten  $e_2^*$  als Brücke enthalten (siehe Figur 4.12). Dann wäre aber  $C_1^* \cup \{e_2^*\}$  ein Bond in  $H^*$ , somit  $C_1 \cup \{e_2\}$  Polygon in  $H$ , aber dies geht nicht, da dann  $e_1 \in C_1$  sein müsste, wir aber  $e \notin C$  angenommen haben.



$$C^* = C_1^* \cup C_2^*, C_1^* \neq \emptyset, C_2^* \neq \emptyset$$

Figur 4.12

Sei nun  $e \in C$  und  $C$  Polygon in  $G$ . Dann ist  $C_1 = (C \setminus e) \cup \{e_1, e_2\}$  Polygon in  $H$ , somit  $C_1^*$  Bond in  $H^*$ . Daraus folgt aber sofort, dass  $C_1^* \setminus e_2^* = \psi(C)$  Bond in  $H^* \setminus e_2^*$  ist. Die Umkehrung darf den Lesern überlassen werden.  $\square$

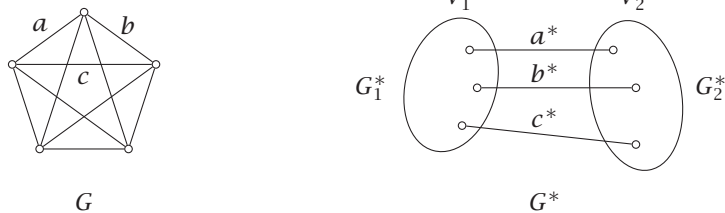
Um den Beweis des Satzes von Whitney zu vollenden, müssen wir noch nachprüfen, dass weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  ein  $W$ -Dual besitzen und 4.6 anwenden.

**Hilfssatz 4.10.** *Weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  besitzen ein  $W$ -Dual.*

*Beweis.* Wir begnügen uns mit dem Nachweis für  $K_5$ . Sei  $G = (V, E) \cong K_5$  und  $G^* = (V^*, E^*)$  ein  $W$ -Dual. Da Ecken vom Grad 0 bei der Definition des  $W$ -Duals völlig ohne Belang sind, können wir annehmen, dass  $G^*$  keine solchen Ecken besitzt. Ja mehr noch: Heften wir die Komponenten an einer Ecke zusammen, so hat der zusammengeheftete Graph genau dieselben Bonds wie der ursprüngliche Graph, also können wir annehmen, dass  $G^*$  zusammenhängend ist. Da jede Kante  $e$  von  $G$  in einem Polygon ist, so ist jede Kante  $e^*$  in einem Bond von  $G^*$ , also ist  $G^*$  schlingenlos, da eine Schlinge offensichtlich nicht zu einer Trennung beitragen kann.  $G^*$  besitzt auch keine Mehrfachkanten. Wären nämlich  $a^*, b^*$  Mehrfachkanten, so würde jedes Bond  $C^*$  entweder sowohl  $a^*$  und  $b^*$  enthalten oder keine der beiden Kanten. Das heißt für  $G$ , dass für jedes Polygon  $C$  entweder  $\{a, b\} \subseteq C$  oder  $\{a, b\} \cap C = \emptyset$  gilt. Da es in  $G \cong K_5$  aber zu jedem Paar von Kanten  $a, b$  ein Polygon gibt, das  $a$  enthält aber nicht  $b$ , so kann dies nicht sein.  $G^*$  ist also ein einfacher zusammenhängender Graph. In  $G$  gilt für alle Polygone  $C$ , dass  $|C| \geq 3$  ist, also analog für alle Bonds  $C^*$  in  $G^*$ . Da die Kanten jeder Nachbarschaft  $N(v^*)$  in  $G^*$  ein Bond enthalten, folgt daraus  $d(v^*) \geq 3$  für alle  $v^* \in V^*$  und damit  $20 = \sum_{v^* \in V^*} d(v^*) \geq 3p^*$ , also haben wir für die Eckenzahl  $p^*$  von  $G^*$  die Ungleichung  $p^* \leq 6$ .

Es sei  $C = \{a, b, c\}$  ein Polygon in  $G$  entsprechend dem Bond  $C^* = \{a^*, b^*, c^*\}$  in  $G^*$ .  $V_1^*$  und  $V_2^*$  seien die Eckenmengen der nach Entfernung von  $C^*$  entstehenden Komponenten, wobei wir  $|V_1^*| \leq |V_2^*|$  annehmen können, und  $G_1^*, G_2^*$  die Untergraphen auf diesen Ecken. (Figur 4.13)

Wegen  $|V^*| \leq 6$  gilt  $|V_1^*| \leq 3$ . Ist  $|V_1^*| = 3$  (und damit  $|V_2^*| = 3$ ), so müssten wegen  $d(v^*) \geq 3$  die beiden Untergraphen  $G_1^*, G_2^*$  isomorph zu  $K_3$  sein ( $G^*$  ist einfach!),



Figur 4.13

und wir haben den Widerspruch  $|E^*| = 9 < 10$ . Ist  $|V_1^*| = 2$ , so wäre die Bedingung  $d(v^*) \geq 3$  für mindestens eine der beiden Ecken in  $V_1^*$  verletzt. Wir schließen daher  $V_1^* = \{v^*\}$  und  $C^* = N(v^*)$  für eine Ecke  $v^* \in V^*$ . Diese Überlegung gilt für jedes 3-Polygon  $C$  in  $G$ . Da es 10 solche Polygone in  $G \cong K_5$  gibt, aber nur höchstens 6 Ecken in  $G^*$ , haben wir abermals einen Widerspruch.  $\square$

Damit können wir endgültig den Satz von Whitney formulieren.

**Satz 4.11** (Whitney). *Ein Graph  $G$  ist genau dann plättbar, wenn  $G$  ein  $W$ -Dual besitzt.*

Whitney hat 4.11 ohne Benutzung des Satzes von Kuratowski bewiesen und hat später sogar 4.6 aus seiner Charakterisierung gefolgert. Der nicht ganz leichte Beweis in 4.10 schon für  $K_5$  deutet an, dass die Nichtexistenz eines  $W$ -Duals für große Graphen nur schwierig nachzuweisen sein wird. Nichtsdestotrotz ist die Idee der  $W$ -Dualität von grundlegender Bedeutung, bildet sie doch die Basis für den Begriff der Matroide, welche eine Fülle von kombinatorischen Strukturen abdecken. In Kapitel 8 werden wir dies an Hand vieler Beispiele belegen.

Noch eine interessante Folgerung können wir aus 4.11 ziehen. Wir sagen,  $H$  ist eine *Kontraktion* von  $G$ , falls  $H$  aus  $G$  durch eine Folge von Kantenkontraktionen wie in den Hilfssätzen 4.8 und 4.9 hervorgeht. Genauso wie in 4.9 beweist man, dass mit  $G$  auch jede Kontraktion von  $G$  ein  $W$ -Dual besitzt, und daraus folgt mit den oben genannten Sätzen ohne Weiteres:

**Folgerung 4.12** (Wagner). *Ein Graph  $G$  ist genau dann plättbar, wenn  $G$  keinen Untergraphen besitzt, der zu  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  kontrahiert werden kann.*

Kontrahieren wir im Petersen Graphen  $P$  (Figur 4.2) die 5 Kanten, die vom äußeren Kreis nach innen führen, so erhalten wir den vollständigen Graphen  $K_5$ , so dass wir mit 4.12 erneut die Nichtplättbarkeit von  $P$  bewiesen haben.

Einen dritten Weg zur Charakterisierung plättbarer Graphen ist MacLane in einer Arbeit 1937 gegangen. Sein Ausgangspunkt war die Beobachtung, dass in einem ebenen 2-fach zusammenhängenden Graphen es eine Familie  $Z_0$  von Polygonen gibt, nämlich die Randkanten der einzelnen Länder, welche alle Eulerschen Graphen  $Z$  im algebraischen Sinne von Veblen (Kapitel 3) erzeugen, mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jede Kante in genau zwei Polygonen von  $Z_0$  liegt. Zum Beweis, dass dies für plättbare Graphen charakteristisch ist, rufen wir uns zunächst die Begriffe aus Kapitel 3 in Erinnerung und verallgemeinern sie sogleich auf beliebige Graphen.

Sei  $G = (V, E)$  ein schlingenloser Graph. Wir indizieren die Ecken  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ , Kanten  $E = \{e_1, \dots, e_q\}$  und halten diese Nummerierung fest. Ferner betrachten wir alle Kreise  $Z = \{Z_1, \dots, Z_r\}$  und halten ebenfalls die Indizierung fest. Zu  $G$  assoziieren wir nun zwei Matrizen, die Ecken-Kanten Inzidenzmatrix  $A$  und die Kreis-Kanten Inzidenzmatrix  $B$ .  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{\ell j})$  sind 0,1-Matrizen mit

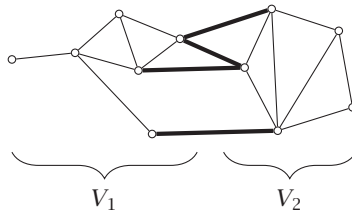
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{falls } v_i \notin e_j \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad b_{\ell j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_j \in Z_\ell \\ 0 & \text{falls } e_j \notin Z_\ell \end{cases}$$

$$(i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q; \ell = 1, \dots, r).$$

Wie in Kapitel 3 identifizieren wir die 0,1-Vektoren der Länge  $q$  mit den zugehörigen Kantenmengen und fassen  $A$  und  $B$  als Matrizen über  $\text{GF}(2)$  auf. Wir wollen die von den Zeilen von  $A$  bzw.  $B$  aufgespannten Unterräume wieder mit  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  bezeichnen und die Vektoren (bzw. Kantenmengen) dieser beiden Unterräume beschreiben. Für  $\hat{B}$  haben wir dies schon in Kapitel 3 durchgeführt. Die Vektoren von  $\hat{B}$  entsprechen genau den *Eulerschen Untergraphen* (Zyklen). Ferner haben wir dort schon gesehen, dass  $\hat{A}^\perp = \hat{B}$  und wegen des endlichen Ranges somit auch  $\hat{B}^\perp = \hat{A}$  gilt. Wie können wir nun die Vektoren aus  $\hat{A}$  graphentheoretisch kennzeichnen? Aus  $\hat{A} = \hat{B}^\perp$  folgt, dass eine Kantenmenge  $D$  genau dann in  $\hat{A}$  liegt, wenn sie alle Polygone in einer geraden Anzahl von Kanten trifft.

**Definition.** Eine Kantenmenge  $D$  eines Graphen  $G = (V, E)$  heißt eine *Bipartition*, wenn  $D = \emptyset$  ist oder wenn eine disjunkte Zerlegung  $V = V_1 \cup V_2$  existiert, so dass  $D = \{e \in E : e \text{ hat eine Endecke in } V_1, \text{ die andere in } V_2\}$  ist.

Als Beispiel betrachten wir den Graphen in Figur 4.14. Die fettgedruckten Kanten ergeben eine Bipartition.



Figur 4.14

**Behauptung.** Die Bipartitionen sind genau die Kantenmengen aus  $\hat{A}$ .

Ist nämlich  $D$  Bipartition, so muss  $|D \cap C|$  gerade sein für jedes Polygon  $C$ , da  $C$  zwischen  $V_1$  und  $V_2$  „hin- und herlaufen“ muss. Es sei nun umgekehrt  $\emptyset \neq D \in \hat{A}$ . Wir definieren auf  $V$  die Relation  $\sim$  durch

$$u \sim v : \Leftrightarrow \text{es existiert ein } u, v\text{-Weg } W, \text{ der } D \text{ in einer} \\ \text{geraden Anzahl von Kanten trifft.}$$

Die Relation  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $V$  (Reflexivität und Symmetrie sind klar, die Transitivität möge sich der Leser überlegen), die jede Komponente  $G_i$  von

$G$  in höchstens zwei Äquivalenzklassen  $V_{i,1}$  und  $V_{i,2}$  zerlegt. Es bleibt zu zeigen, dass  $D$  genau die von  $V_1 = \bigcup_i V_{i,1}$ ,  $V_2 = \bigcup_i V_{i,2}$  induzierte Bipartition ist. Jede Kante  $e = uv$  mit  $u \in V_1$ ,  $v \in V_2$  muss in  $D$  liegen, da ansonsten  $e$  ein  $u, v$ -Weg wäre, der  $D$  überhaupt nicht (d. h. in der geraden Anzahl 0) trifft. Falls umgekehrt die Kante  $e = uv \in D$  beide Enden in, sagen wir,  $V_1$  hätte, so existierte ein  $u, v$ -Weg  $W$  mit  $|W \cap D| = \text{gerade}$  und damit das Polygon  $C = W \cup e$  mit  $|C \cap D| = \text{ungerade}$ , im Widerspruch zu  $D \in \hat{A} = \hat{B}^\perp$ .

$\hat{A}$  besteht also genau aus den Bipartitionen, die in Anlehnung an die Homologie-Terminologie auch *Cozyklen* genannt werden.  $\hat{A}$  heißt daher auch *Cozyklenraum* und  $\hat{B}$  *Zyklenraum*. Ersichtlich ist jede nichtleere Bipartition trennende Kantenmenge und umgekehrt auch jedes Bond eine Bipartition und damit in  $\hat{A}$ . Mit diesen Vorbereitungen können wir den Satz von MacLane mühelos beweisen.

**Satz 4.13** (MacLane). *Ein Graph  $G$  ist genau dann plättbar, wenn eine Menge  $Z_0$  von Polygonen existiert, so dass*

- (i) *jede Kante in höchstens zwei Polygonen aus  $Z_0$  liegt,*
- (ii)  *$Z_0$  den Zyklenraum  $\hat{B}$  erzeugt.*

*Beweis.* Da Schlingen keinerlei Einfluss haben, lassen wir sie weg. Ist  $G$  plättbar, so nehmen wir die Randkanten der Länder irgendeiner ebenen Realisierung, und die Bedingungen sind erfüllt. Sei nun umgekehrt (i) und (ii) erfüllt. Wir können annehmen, dass  $G$  2-fach zusammenhängend ist, da schon im Beweis des Satzes von Kuratowski bemerkt wurde, dass wir die ebenen 2-fach zusammenhängenden Stücke von  $G$  zusammenfügen können. Es sei  $Z_0 = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ . Da wegen 3.10 jede Kante  $e$  in einem Polygon liegt, so muss wegen Bedingung (ii)  $e$  auch in mindestens einem  $Z_i$  liegen. Betrachten wir die Summe  $Z' = \sum_{i=1}^m Z_i$  über  $\text{GF}(2)$ , so besteht der Eulersche Untergraph  $Z'$  aus den Kanten, die in genau einem Polygon aus  $Z_0$  liegen.  $Z'$  zerfällt in disjunkte Polygone. Nehmen wir diese Polygone zu unserer Menge noch hinzu, so können wir also annehmen:

- (i') *Jede Kante liegt in genau zwei Polygonen aus  $Z_0$ .*

Wir definieren einen Graphen  $G^* = (V^*, E^*)$  wie folgt: Die Ecken  $V^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*\}$  entsprechen den Polygonen  $Z_1, \dots, Z_m$ , die Kanten  $E^*$  den Kanten  $E$  und die Kante  $e^*$  habe als Enden  $v_i^*, v_j^*$  genau dann, wenn  $e$  auf den beiden Polygonen  $Z_i, Z_j$  liegt.  $G^*$  ist wegen (i') ein schlingenloser Graph, und unter Beachtung von 4.11 müssen wir nur noch zeigen, dass  $G^*$  ein  $W$ -Dual von  $G$  ist mittels der Abbildung  $\varphi: E \rightarrow E^*$ ,  $e \mapsto e^*$ .

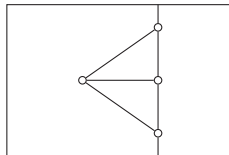
Es seien  $A, B$  die beiden vorweg eingeführten Inzidenzmatrizen für  $G$  und  $A^*, B^*$  die entsprechenden Matrizen für  $G^*$ . Die  $i$ -te Zeile von  $A^*$ , korrespondierend zu den mit  $v_i^*$  inzidenten Kanten, wollen wir der Kürze halber mit  $V_i^*$  bezeichnen. Sei  $C^*$  Bond von  $G^*$ . Dann ist  $C^* \in \hat{A}^*$ , also  $C^* = \sum_{i \in I} V_i^*$  für eine gewisse Indexmenge  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ . Da nach Konstruktion von  $G^*$  die Matrix  $A^*$  Untermatrix von  $B$  ist, erhalten wir daraus  $C = \sum_{i \in I} Z_i$ , also ist  $C$  Eulerscher Graph. Sei umgekehrt  $C$  Polygon in  $G$ . Dann haben wir  $C = \sum_{j \in J} Z_j$ , also  $C^* = \sum_{j \in J} V_j^* \in \hat{A}^*$ , d. h.  $C^*$  ist eine Bipartition. Da die Bonds genau die minimalen nichtleeren Bipartitionen und die Polygone genau die minimalen nichtleeren Eulerschen Untergraphen sind, folgt aus diesen beiden Aussagen sofort:  $C^*$  Bond in  $G^* \Leftrightarrow C$  Polygon in  $G$ , und damit der Satz.  $\square$



Genauso wie der Heawoodsche Farbensatz das Problem der Färbung auf Flächen höheren Geschlechts interessant erscheinen läßt, so weiten die diversen Charakterisierungen plättbarer Graphen den Blick auf andere Flächen. Für die projektive Ebene ist von Bodendieck, Schumacher und Wagner eine solche „Kuratowski“-Kennzeichnung erbracht worden, und aus einem fundamentalen Satz von Robertson-Seymour folgt, dass es für alle geschlossenen Flächen nur endlich viele „verbotene“ Untergraphen gibt (so wie  $K_5$  und  $K_{3,3}$  im Fall der Kugel).

Wenn ein Graph  $G$ , so wie etwa  $K_5$ , nicht in die Ebene einbettbar ist, so können wir uns zweierlei fragen: Wie weit müssen wir das Geschlecht  $h$  bzw.  $k$  erhöhen, damit  $G$  in  $S_h$  bzw.  $N_k$  eingebettet werden kann? Wir suchen also das *orientierbare Geschlecht*  $\gamma(G)$  bzw. das *nicht-orientierbare Geschlecht*  $\bar{\gamma}(G)$ . Wenn wir  $G$  schon nicht ohne Kreuzungen in die Ebene einbetten können, wie nahe können wir einer Einbettung kommen? Wir fragen hier nach der *Kreuzungszahl*  $cr(G)$ , der minimalen Anzahl von Kreuzungen, die in einer ebenen Einbettung auftreten.

Wir betrachten stets zusammenhängende Graphen. Ferner wollen wir annehmen, dass  $G$  weder Schlingen noch Mehrfachkanten besitzt, ohne dies noch eigens zu betonen. Für unsere Größen  $\gamma(G)$  und  $\bar{\gamma}(G)$  ziehen wir natürlich die Euler-Poincaré Formel 2.2 heran, um eine untere Schranke zu bekommen, so wie wir es für die vollständigen Graphen  $K_p$  schon in Kapitel 2 durchgeführt haben. Dazu noch eine Vorbemerkung: Wir haben die Formel 2.2 für *Landkarten*  $\mathcal{L}$  bewiesen. In einer Landkarte ist jede Kante homöomorph zu  $\mathbb{R}$  und jedes Land, und das war entscheidend, homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ . Solche Einbettungen nennt man auch *2-Zellen Einbettungen*. Ist ein zusammenhängender Graph auf andere Weise eingebettet, so stimmt die Formel nicht mehr: Figur 4.15 zeigt eine Einbettung von  $K_4$  auf dem Torus  $S_1$  mit 3 Ländern, so dass  $|V| - |E| + |R| = 4 - 6 + 3 = 1 \neq 0 = e(S_1)$  ist. Das äußere Land ist nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .



Figur 4.15

Ist die Einbettung von  $G$  in  $S$  keine Landkarte, so kann man aber unschwer feststellen, dass die Einbettung so modifiziert werden kann, dass eine Einbettung von  $G$  in  $S'$  erhalten wird mit  $e(S') > e(S)$ . Dies können wir fortsetzen, bis tatsächlich eine Landkarte entsteht, denn  $e(S)$  ist ja nach oben durch 2 beschränkt und auf der Kugel ist jede Einbettung eine Landkarte. Daraus ergibt sich nun sofort:

**Lemma 4.14.** *Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender einfacher Graph mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten, und sei  $g$  die Länge eines kürzesten Kreises (falls ein Kreis existiert). Ist  $G$  in die Fläche  $S$  einbettbar, so gilt*

$$q \leq \frac{g}{g-2}(p - e(S)).$$

Falls  $G$  keine Kreise enthält, also ein Baum ist, haben wir die triviale Ungleichung  $q \leq p - e(S) + 1$ .

*Beweis.* Nach unserer Vorbemerkung finden wir zunächst eine Fläche  $S'$  mit  $e(S') \geq e(S)$ , auf der  $G$  als Landkarte eingebettet ist mit  $r'$  Ländern. Da jedes Land mindestens  $g$  Randkanten hat, folgern wir  $gr' \leq 2q$  und mittels der Euler-Poincaré Formel  $e(S) \leq e(S') = p - q + r' \leq p - q + \frac{2q}{g}$ . Durch Umformung ergibt sich das Resultat.  $\square$

Als Folgerung erhalten wir Formeln, die wir in der Ebene schon verwendet haben. Dabei werden wir stets die Kugel auch als nicht-orientierbare Fläche vom Geschlecht 0 ansehen.

**Lemma 4.15.** *Sei  $G$  ein zusammenhängender einfacher Graph mit  $p \geq 3$  Ecken und  $q$  Kanten.*

- (i) *Falls  $G$  in die orientierbare Fläche  $S_h$  ( $h \geq 0$ ) eingebettet werden kann, so gilt  $q \leq 3(p + 2h - 2)$ . Hat  $G$  keine Kreise der Länge 3, so kann dies zu  $q \leq 2(p + 2h - 2)$  verschärft werden.*
- (ii) *Falls  $G$  in die nicht-orientierbare Fläche  $N_k$  eingebettet werden kann, so gilt  $q \leq 3(p + k - 2)$ . Hat  $G$  keine Kreise der Länge 3, so kann dies zu  $q \leq 2(p + k - 2)$  verschärft werden.*

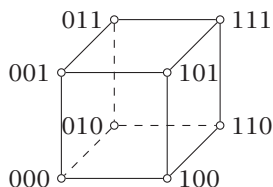
Sehr wenige allgemeine Resultate sind über die Parameter  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  bekannt. Im Wesentlichen beschränken sich die Ergebnisse auf drei Klassen von Graphen: Die *vollständigen Graphen*  $K_p$ , die *vollständigen bipartiten Graphen*  $K_{m,n}$  und die  *$n$ -dimensionalen Würfel*  $Q_n$ . Die erste Graphenfamilie haben wir schon in Kapitel 2 besprochen in unserem Bericht über den Heawoodschen Farbensatz und den endgültigen Beweis von Ringel und Youngs. Halten wir das Ergebnis noch einmal fest.

**Satz 4.16.**  $\gamma(K_p) = \lceil \frac{(p-3)(p-4)}{12} \rceil$  für  $p \geq 3$ ,  $\bar{\gamma}(K_p) = \lceil \frac{(p-3)(p-4)}{6} \rceil$  für  $p \geq 3$ ,  $p \neq 7$ ,  $\bar{\gamma}(K_7) = 3$ .

Für die Graphen  $K_{m,n}$  erhalten wir aus 4.15 und der Tatsache, dass diese Graphen keine Kreise der Länge 3 enthalten,  $mn \leq 2(m + n + 2\gamma - 2)$  und daraus  $\gamma(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil$ , und analog dazu  $\bar{\gamma}(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \rceil$ . Dass in diesen beiden Ungleichungen stets Gleichheit gilt, wurde von Ringel 1954 bzw. 1965 gezeigt.

**Satz 4.17.**  $\gamma(K_{m,n}) = \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil$ ,  $\bar{\gamma}(K_{m,n}) = \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \rceil$  für  $m, n \geq 2$ .

Was sind die  $n$ -dimensionalen Würfel  $Q_n$ ?  $Q_2$  ist der Kreis der Länge 4,  $Q_3$  der Gerüstgraph des 3-dimensionalen Würfels (Figur 4.16).



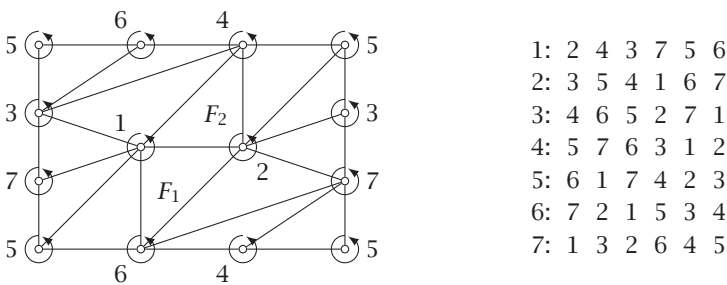
Figur 4.16

Wie schon in Figur 4.16 angedeutet ist, nehmen wir als Eckenmenge von  $Q_n$  alle  $2^n$  Vektoren der Länge  $n$  mit 0 und 1, und verbinden zwei Ecken durch eine Kante, falls sich die zugehörigen Vektoren in genau einer Koordinate unterscheiden. Wir sehen unmittelbar, dass jede Ecke Grad  $n$  hat, so dass  $Q_n$  genau  $p = 2^n$  Ecken und  $q = n2^{n-1}$  Kanten aufweist. Ferner sieht man sofort, dass  $Q_n$  keinen Kreis der Länge 3 hat, woraus mittels 4.15 die Ungleichung  $n2^{n-1} \leq 2(2^n + 2\gamma - 2)$  und durch Umformung  $\gamma(Q_n) \geq (n - 4)2^{n-3} + 1$  resultiert. Analog erhält man  $\bar{\gamma}(Q_n) \geq (n - 4)2^{n-2} + 2$ . Dass auch hier Gleichheit mit wenigen Ausnahmen gilt, wurde von mehreren Autoren (vornehmlich Ringel und Jungerman) nachgewiesen.

**Satz 4.18.**  $\gamma(Q_n) = (n - 4)2^{n-3} + 1$  für  $n \geq 2$ ,  $\bar{\gamma}(Q_n) = (n - 4)2^{n-2} + 2$  für  $n \geq 2$ ,  $n \neq 4, 5$ ,  $\bar{\gamma}(Q_4) = 3$ ,  $\bar{\gamma}(Q_5) = 11$ .

Ganz allgemein erkennen wir, dass zur Bestimmung des Geschlechts eines Graphen Lemma 4.15 eine untere Schranke ergibt. Die eigentliche Schwierigkeit besteht also darin, eine Einbettung in die nach 4.15 möglichen Flächen  $S_h$  oder  $N_k$  tatsächlich zu finden bzw. ihre Unmöglichkeit nachzuweisen. Für kleine Graphen bzw. Flächen kleinen Geschlechts kann man dies noch direkt nachprüfen, wie in Figur 2.10 für  $K_7$  auf dem Torus. Für kompliziertere Graphen muss offensichtlich eine systematische Methode gefunden werden. Als besonders erfolgreich (vor allem bei der Bewältigung des Heawoodschen Satzes) hat sich die *Rotationsmethode* erwiesen, deren Grundidee kurz skizziert werden soll.

Nehmen wir als Beispiel die Einbettung  $\mathcal{L}$  von  $K_7$  auf dem Torus in Figur 2.10. Wir können  $\mathcal{L}$  auf folgende Weise ein Schema von 7 Reihen korrespondierend zu den Ecken  $1, 2, \dots, 7$  zuordnen. Wir wählen für jede Ecke  $i$  einen Durchlaufsinne der zu  $i$  benachbarten Ecken und nennen dies eine *Rotation* bei  $i$ . Wählen wir beispielsweise stets den Gegenuhrzeigersinn (Figur 4.17), so ergibt sich folgendes *Rotationsschema*, wobei die Reihen als zyklisch angeordnet zu verstehen sind.



Figur 4.17

Das Rotationsschema gibt also zunächst nur die Nachbarschaften der einzelnen Ecken, jeweils angeordnet in einer gewissen zyklischen Weise. Wie erhalten wir aber daraus die Länder? Betrachten wir in Figur 4.17 das Land  $F_1$  mit den Randecken 1, 2, 6. Beginnen wir mit der Kante (1, 2) (aufgefasst als *gerichtete Kante* von 1 nach 2), so muss die nächste Kante (2,  $i$ ) sein, wobei in Reihe 2 : ... 1  $i$  ... nach 1 auftritt. Schauen wir in unserem Schema nach, so steht dort 2 : ... 1 6 ..., also ist die nächste Kante (2, 6). Sehen wir in 6 : ... 2  $j$  ... nach, so steht dort 6 : ... 2 1 ..., also ist die nächste

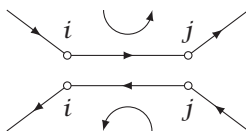
Kante  $(6, 1)$  und wir sind wieder bei 1 angelangt. Beginnen wir umgekehrt mit  $(2, 1)$ , so ergibt sich  $(1, 4)$  und dann  $(4, 2)$  und somit das Land  $F_2$ .

Wir haben also aus der gegebenen Landkarte ein Rotationsschema aufgestellt und gesehen, wie allein aus dem Schema die Länder abgelesen werden können. Das Wesentliche an der Idee des Rotationsschemas ist, dass die Umkehrung ebenfalls funktioniert.

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph, den wir ohne Schlingen und Mehrfachkanten voraussetzen, mit der Eckenmenge  $\{1, 2, \dots, p\}$ . Für jede Ecke  $i$  fassen wir die inzidenten Kanten  $(i, j)$  als orientiert von  $i$  nach  $j$  auf, also jede Kante  $ij$  determiniert zwei orientierte Kanten  $(i, j)$  und  $(j, i)$ . Als Nächstes geben wir für jede Ecke  $i$  eine zyklische Permutation  $\pi_i$  der Nachbarecken von  $i$  an, d. h.  $\pi_i(j)$  ist der Nachfolger von  $j$  in der Zeile korrespondierend zu  $i$ . Die Gesamtheit der Permutationen  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$  nennen wir eine Rotation  $\rho$  von  $G$ .

**Satz 4.19.** *Jede Rotation  $\rho = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  eines einfachen Graphen  $G$  ergibt eine Landkarte in einer gewissen orientierbaren Fläche  $S_h$ , wobei  $S_h$  so orientiert werden kann, dass für jede Ecke  $i$  die (orientierte) Kante  $(i, j)$  gefolgt wird von  $(j, \pi_j(i))$ . Ist umgekehrt  $G$  als Landkarte in  $S_h$  eingebettet, so gibt es eine Rotation von  $G$ , welche genau dieser Einbettung entspricht.*

*Beweisskizze.* Die Umkehrung haben wir in unserem Beispiel schon angedeutet. Sei nun die Rotation  $\rho = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  gegeben. Mit  $\vec{E}$  bezeichnen wir die Menge der orientierten Kanten. Wir definieren eine Bijektion  $\Pi_\rho : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$  durch  $\Pi_\rho(i, j) = (j, \pi_j(i))$ . Die einzelnen Zyklen der Permutation  $\Pi_\rho$  determinieren je ein Land, und diese Länder können durch Identifikation von  $(i, j)$  mit  $(j, i)$  zusammengeklebt werden (Figur 4.18).



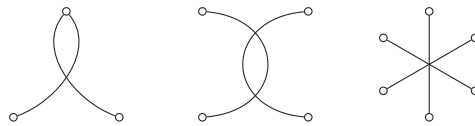
Figur 4.18

Da jede Permutation  $\pi_i$  zyklisch ist, sind alle diese Länder homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  und, da  $(i, j)$  stets mit  $(j, i)$  verklebt wird, ist die so entstehende Fläche orientierbar. Das Geschlecht  $h$  kann nun aus der Formel  $|V| - |E| + r = 2 - 2h$ ,  $r =$  Anzahl der Zyklen von  $\Pi_\rho$ , berechnet werden.  $\square$

Damit das Geschlecht  $h$  einer Einbettung von  $G$  möglichst klein wird, muss man also Rotationen  $\rho$  finden, deren zugeordnete Permutation  $\Pi_\rho$  möglichst viele Zyklen hat, im Grenzfall lauter 3-er Zyklen. Solche Einbettungen heißen dann *Triangulierungen*, das heißt jedes Land hat genau 3 Grenzen. Ringel und Youngs und andere Autoren haben zur Erzeugung geeigneter Rotationsschemata eine Anzahl interessanter Methoden entwickelt (auch für den nicht-orientierbaren Fall), mehr darüber kann man in Ringels Buch erfahren. Ringel selbst erzählt dazu, dass er in seiner Zusammenarbeit mit Youngs beim Beweis des Heawoodschen Farbensatzes den topologischen Part übernommen hatte, Youngs den kombinatorischen. Ein von Youngs produziertes Rotationsschema versuchte er einzubetten. Wo es nicht ging, kam es an Youngs zurück, der das Schema nach den neuen Angaben modifizierte, worauf wieder Ringel an der

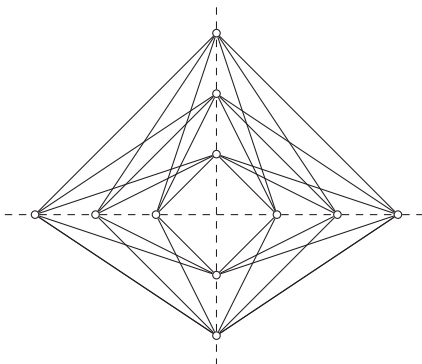
Reihe war, bis schließlich, wie wir gesehen haben, alle Schwierigkeiten überwunden werden konnten.

Nun zum Problem der Kreuzungen. Hier sind die Resultate noch sehr vereinzelt und keine allgemeinen Methoden bekannt. Zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen. Anstelle einer Einbettung eines Graphen  $G$  in die Ebene sprechen wir jetzt von einer *Zeichnung* von  $G$ . Gesucht ist also eine Zeichnung mit möglichst wenig Kreuzungspunkten. Ein paar Kreuzungstypen können wir sofort ausschließen: Keine zwei Kanten mit gemeinsamer Ecke sollen sich kreuzen, keine zwei Kanten treffen sich in mehr als einem Punkt, keine drei Kanten treffen sich in einem gemeinsamen Punkt (siehe Figur 4.19). Es ist klar, dass jede Zeichnung so geändert werden kann, dass diese drei Bedingungen erfüllt sind.



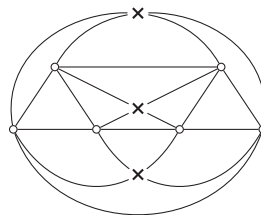
Figur 4.19

Beginnen wir mit den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{m,n}$ . Hier ist eine Zeichnung schon lange bekannt, die nach wie vor unübertroffen ist. Wir teilen die  $m$  Ecken von  $V_1$  in zwei Teile  $V'_1, V''_1$  mit  $|V'_1| = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, |V''_1| = \lceil \frac{m}{2} \rceil$  und ebenso  $V_2$  in  $V'_2, V''_2$  mit  $|V'_2| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, |V''_2| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Auf einem kartesischen Koordinatensystem tragen wir nun die Ecken aus  $V_1$  auf der  $x$ -Achse ein, und zwar  $V'_1$  auf der negativen  $x$ -Achse in den Punkten  $-1, -2, \dots, -\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, V''_1$  auf der positiven  $x$ -Achse in den Punkten  $1, 2, \dots, \lceil \frac{m}{2} \rceil$ . Analog tragen wir die Ecken aus  $V_2$  auf der negativen  $y$ -Achse ein und  $V''_2$  auf der positiven  $y$ -Achse. Nun verbinden wir alle Ecken aus  $V_1$  und  $V_2$  durch Geraden. Figur 4.20 zeigt die entsprechende Zeichnung für  $K_{6,5}$ .



Figur 4.20

Wie viele Kreuzungen ergeben sich dabei? Betrachten wir den ersten Quadranten. Die 4 Kanten, die zwei Ecken auf der positiven  $x$ -Achse mit zwei Ecken auf der positiven  $y$ -Achse verbinden, ergeben genau eine Kreuzung, und dies gilt ersichtlich für alle solche Eckenpaare und alle vier Quadranten. Also erhalten wir  $\binom{\lceil \frac{m}{2} \rceil}{2} \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} + \binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{2} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{m}{2} \rceil}{2} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{2} \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$  Kreuzungen, und durch eine kurze Rechnung



Figur 4.21

sieht man, dass diese Zahl gleich  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  ist. Mehrmals tauchten bereits Beweise auf, dass dies die genaue Anzahl wäre, aber alle bisherigen Versuche waren fehlerhaft. Gleichheit wurde bisher für  $\min(m, n) \leq 6$  bewiesen.

**Satz 4.20.**  $\text{cr}(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

Für den vollständigen Graphen  $K_p$  ist noch weniger bekannt. Auch hier gibt es eine einfache Konstruktion, dargestellt am Beispiel  $K_6$  in Figur 4.21. Die Leser werden vielleicht Vergnügen daran finden, die allgemeine Zeichenvorschrift zu finden, woraus sich die folgende Formel ergibt, mit der wir das Kapitel schließen wollen.

**Satz 4.21.**  $\text{cr}(K_p) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-3}{2} \rfloor$ .

Auch in 4.21 wurde Gleichheit für kleine  $p$  bewiesen. Während also für die Klassen  $K_{m,n}$  und  $K_p$  einiges dafür spricht, dass die oberen Schranken in 4.20 bzw. 4.21 die richtigen Werte sind, so ist für die  $n$ -dimensionalen Würfelgraphen  $Q_n$  nicht einmal eine Zeichnung bekannt, die vielversprechend erscheint.

## Übungen zu Kapitel 4

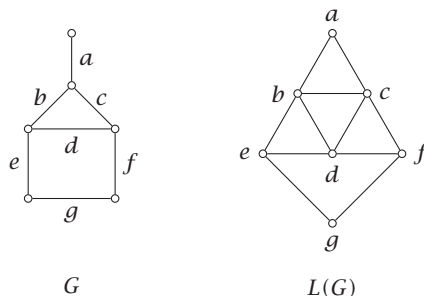
1. Die *Kanten-Zusammenhangszahl*  $\lambda(G)$  ist die Minimalzahl von Kanten, deren Entfernung den Graphen  $G$  trennt, mit der Zusatzdefinition  $\lambda(K_1) = 0$ . Zeige:  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ ,  $\delta(G) = \min_{u \in V} d(u)$ , und konstruiere Beispiele, in denen Gleichheit gilt.
- 2.\* Formuliere und beweise das Kanten-Analogon des Mengerschen Satzes 4.4.
3. Vervollständige den Beweis von 4.5.
4. Verifiziere 4.4, 4.5 und die Kanten-Version aus Übung 2 anhand des Petersen Graphen und der Platonischen Graphen.
5.  $G$  habe mindestens  $2n$  Ecken. Zeige:  $G$  ist  $n$ -fach zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  je zwei disjunkte Eckenmengen  $V_1, V_2$  mit  $|V_1| = |V_2| = n$  sind durch  $n$  eckendisjunkte Wege verbunden (auch was die Anfangs- und Endecken betrifft). (Hinweis: Rückführung auf 4.4)
- 6.\* Sei  $G$  eben. Zeige:  $G$  ist bipartit  $\Leftrightarrow G^*$  ist Eulersch  $\Leftrightarrow$  alle Kreise in  $G$  haben gerade Länge.
7. Zeige, dass jeder 3-fach zusammenhängende Graph mit  $p \geq 6$ , der eine Unterteilung von  $K_5$  enthält, auch eine von  $K_{3,3}$  enthält.
8. Vervollständige die Beweise von 4.8 und 4.9.
- 9.\* Zeige, dass  $K_{3,3}$  kein  $W$ -Dual besitzt.
10.  $G = (V, E)$  sei gegeben und  $E = E_R \dot{\cup} E_B \dot{\cup} \{e\}$  sei eine Partition der Kantenmenge in rote Kanten  $E_R$ , blaue Kanten  $E_B$  und eine einzelne weitere Kante  $e$ . Zeige, dass genau eine der beiden Alternativen vorliegt:
  - a. Es existiert ein Polygon  $C$  mit  $e \in C \subseteq E_R \cup \{e\}$ .
  - b. Es existiert ein Bond  $D$  mit  $e \in D \subseteq E_B \cup \{e\}$ .
11. Beweise 4.12.
12. Konstruiere eine Zyklen- und Cozyklenbasis:
  - a. für die Räder  $W_n$ ,
  - b. für den Petersen Graphen.
- 13.\* Versuche, einige „verbotene“ Kuratowski Graphen für den Torus und für die projektive Ebene zu finden.
14. Bestimme die Platonischen Graphen der projektiven Ebene (d. h. alle Ecken haben denselben Grad, alle Länder dieselbe Anzahl von Grenzen).
15. Zeige die Einbettbarkeit von  $K_{4,4}$  in den Torus mittels eines geeigneten Rotationsschemas.
- 16.\* Zeige Gleichheit in 4.20 für  $K_{4,5}$ .
17. Verifiziere 4.21 mittels einer geeigneten Zeichnungsvorschrift.
- 18.\* Sei  $G$  ein einfacher zusammenhängender Graph,  $G$  kein Baum, mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten. Die *Dicke*  $t(G)$  von  $G$  ist die kleinste Anzahl von plättbaren Untergraphen, in die  $G$  zerlegt werden kann. Also:  $t(G) = 1 \Leftrightarrow G$  plättbar. Zeige:  $t(G) \geq \lceil q \frac{q-2}{g(p-2)} \rceil$ , wobei  $g$  die Länge eines kürzesten Kreises ist.
- 19.\* Folgere aus der vorhergehenden Übung:  $t(K_p) \geq \lfloor \frac{p+7}{6} \rfloor$  und zeige Gleichheit für  $p \leq 8$ . Gilt auch Gleichheit für  $p = 9$ ?
20. Finde eine untere Schranke für die Dicke der Würfel  $Q_n$  und bestimme  $t(Q_4)$ .

# 5 Färbung

Neben Plättbarkeit ist Färbung der zweite Begriff, der in der 4-Farben Vermutung vorkommt. Wie schon im vorangegangenen Kapitel besprechen wir nun allgemein Färbungen von beliebigen Graphen – in der Hoffnung natürlich, dass wir dadurch auch Aufschluss über die Färbung plättbarer Graphen gewinnen.

Wiederholen wir noch einmal die Definition: Eine *Färbung* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow M$  (Farbmenge) mit  $f(u) \neq f(v)$  für  $uv \in E$ . Existiert eine Färbung mit  $n$  Farben, so heißt  $G$  *n-färbbar* und die kleinste Zahl  $n$ , für die  $G$  *n-färbbar* ist, ist die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$ . Aus der Definition folgt, dass ein Graph mit Schlingen überhaupt keine Färbung besitzt. Wir werden daher in diesem Kapitel *alle* Graphen als schlingenlos voraussetzen, ohne dies noch eigens zu erwähnen. Außerdem ist es für eine Färbung belanglos, ob zwei Ecken durch eine, zwei oder beliebig viele Kanten verbunden sind. Das heißt, ein schlingenloser Graph  $G$  und sein zugrundeliegender einfacher Graph haben dieselbe chromatische Zahl. Wir werden uns daher, wann immer vorteilhaft, auf einfache Graphen beschränken. Neben den (Ecken-) Färbungen haben wir auch Kantenfärbungen betrachtet. Eine *Kantenfärbung* von  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $\varphi : E \rightarrow M$ , so dass  $e$  inzident  $f$  impliziert  $\varphi(e) \neq \varphi(f)$ . Analog zu oben haben wir den Begriff *n-kantenfärbbar*. Die kleinste Zahl  $n$ , für die  $G$  *n-kantenfärbbar* ist, heißt der *chromatische Index*  $\chi'(G)$ .

Wir können Kantenfärbungen auch als gewöhnliche (Ecken-) Färbungen deuten, indem wir jedem Graphen  $G = (V, E)$  seinen *Kantengraphen*  $L(G)$  zuordnen. Die Ecken von  $L(G)$  entsprechen den Kanten von  $G$ , und wir verbinden zwei Ecken  $e, f$  in  $L(G)$  genau dann, wenn  $e$  und  $f$  inzidente Kanten in  $G$  sind. Offensichtlich gilt stets  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ . Figur 5.1 zeigt ein Beispiel eines Graphen  $G$  und seines zugehörigen Kantengraphen.



Figur 5.1

Rufen wir uns noch einmal die drei wesentlichen Farbensätze aus den Kapiteln 2 und 3 in Erinnerung.

- (a) Die Aussage, jeder 3-reguläre brückenlose plättbare Graph ist 3-kantenfärbbar, ist äquivalent zur 4-Farben Vermutung. (1.7)



(b) Jeder plättbare Graph ist 5-färbbar. (2.1)

(c) Die Anzahl  $p(\lambda)$  der  $\lambda$ -Färbungen ist ein Polynom in  $\lambda$ . (3.4)

Daraus ergeben sich sofort ein paar Fragen: Wie hängen die Eckengrade (oder andere Graphen-Parameter) mit der chromatischen Zahl bzw. dem chromatischen Index zusammen? Können wir minimale 5-chromatische oder allgemein minimale  $n$ -chromatische Graphen strukturell beschreiben? Was können wir weiter über das chromatische Polynom aussagen?

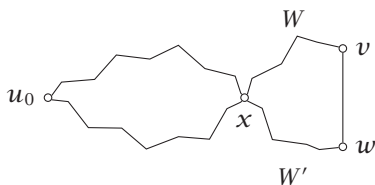
Beginnen wir mit einigen Beispielen: Der vollständige Graph  $K_p$  hat offensichtlich  $\chi(K_p) = p$ , die vollständigen bipartiten Graphen  $K_{m,n}$  haben  $\chi(K_{m,n}) = 2$ . Wie sieht es mit den Kreisen  $C_n$  der Länge  $n$  aus? Ist  $n$  gerade, so können wir die Ecken abwechselnd färben, also ist  $\chi(C_n) = 2$ . Ist aber  $n \geq 3$  ungerade, so erteilt diese (einzig mögliche) abwechselnde 2-Färbung der ersten und letzten Ecke dieselbe Farbe, also schließen wir  $\chi(C_n) = 3$ . Fassen wir zusammen:

**Satz 5.1.** (i)  $\chi(K_p) = p$ , (ii)  $\chi(K_{m,n}) = 2$ , (iii)  $\chi(C_n) = 2$  falls  $n \geq 2$  gerade,  $\chi(C_n) = 3$  falls  $n \geq 3$  ungerade.

Das ehrgeizigste Programm wäre natürlich eine Charakterisierung  $n$ -färbbarer Graphen für beliebiges  $n$ , da es ja wegen 1.7 für  $n = 3$  das 4-Farben Problem beinhalten würde. Ab  $n = 3$  ist so eine Charakterisierung demnach nicht zu erwarten. Wie sieht es nun für  $n = 1$  und 2 aus? 1-färbbare Graphen sind trivial beschrieben, es sind genau die kantenlosen. Die 2-färbbaren Graphen sind genau jene, für die die Eckenmenge  $V$  in zwei disjunkte Teilmengen  $V_1$  und  $V_2$  zerlegt werden kann, so dass alle Kanten zwischen Ecken von  $V_1$  und  $V_2$  verlaufen. Das heißt, die 2-färbbaren Graphen sind genau die Untergraphen der vollständigen bipartiten Graphen und heißen *bipartite Graphen*. Die Charakterisierung dieser Graphenklasse war der erste allgemeine Färbungssatz, enthalten in Königs Graphentheoriebuch von 1936.

**Satz 5.2.** Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar (bipartit), falls  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

*Beweis.* Die Bedingung ist sicherlich notwendig, da, wie wir gesehen haben, Kreise ungerader Länge 3 Farben benötigen. Nehmen wir nun umgekehrt an, dass die Bedingung erfüllt ist. Da wir die Zusammenhangskomponenten unabhängig voneinander färben, dürfen wir  $G$  als zusammenhängend voraussetzen. Sei  $u_0 \in V$  eine beliebige Ecke. Mit  $d(u_0, v)$  bezeichnen wir die Länge eines kürzesten Weges von  $u_0$  nach  $v$  und nennen  $d(u_0, v)$  den *Abstand* zwischen  $u_0$  und  $v$ . Nun färben wir  $u_0$  rot und erweitern die Färbung auf ganz  $V$ , indem wir  $v$  rot färben, falls  $d(u_0, v)$  gerade ist und blau, falls  $d(u_0, v)$  ungerade ist. Es bleibt nachzuweisen, dass benachbarte Ecken  $v$  und  $w$  stets verschiedene Farben erhalten. Sei o. B. d. A.  $d(u_0, v) = d \leq d(u_0, w)$ . Da ein kürzester Weg  $W$  von  $u_0$  nach  $v$  zusammen mit der Kante  $vw$  einen  $u_0, w$ -Weg der Länge  $d + 1$  ergibt, haben wir  $d(u_0, w) \leq d + 1$ , also  $d(u_0, w) = d$  oder  $d + 1$ . Falls  $d(u_0, w) = d + 1$  ist, erhielten  $v$  und  $w$  verschiedene Farben, was wir ja beweisen wollen. Wir müssen also noch den Fall  $d(u_0, w) = d$  ausschließen. Sei  $W'$  ein kürzester  $u_0, w$ -Weg und  $x$  die letzte gemeinsame Ecke von  $W$  und  $W'$  (siehe Figur 5.2). Dann haben die Teilwege  $W(x, v)$  und  $W'(x, w)$  dieselbe Länge  $\ell \geq 1$ , so dass wir zusammen mit der Kante  $vw$  einen Kreis der Länge  $2\ell + 1$  erhalten, im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$



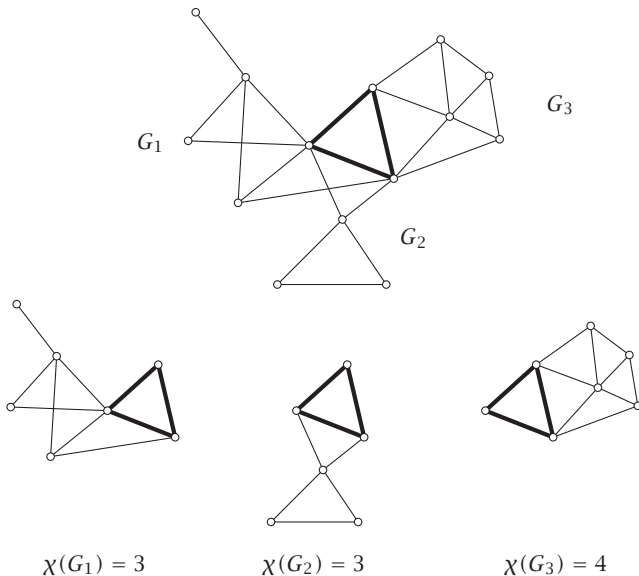
Figur 5.2

Da Bäume überhaupt keine Kreise enthalten, notieren wir als Folgerung.

**Folgerung 5.3.** *Jeder Baum ist 2-färbbar.*

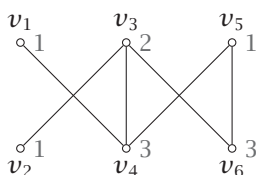
Damit, wie gesagt, sind die Charakterisierungen zu Ende, und wir wollen uns nun, bescheidener, unserem ersten Fragenkreis, der Darstellung der chromatischen Zahl durch andere Parameter zuwenden.

Zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen. Sind  $G_1, \dots, G_t$  die Komponenten von  $G$ , so gilt offensichtlich  $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ . Wir werden uns also meist auf zusammenhängende Graphen beschränken. Ist  $v$  Schnittknoten von  $G$ , so zerfällt  $G$  in mindestens zwei Untergraphen  $G_1, \dots, G_t$ , die sich genau in  $v$  schneiden. Beginnen wir die Färbung mit  $v$ , so sehen wir wiederum  $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ . Dieselbe Überlegung trifft zu, falls  $G$  eine trennende Eckenmenge  $\{w_1, \dots, w_\ell\}$  besitzt, die einen vollständigen Untergraphen  $H$  aufspannt. Dann zerfällt  $G$  wiederum in mehrere Teilgraphen  $G_1, \dots, G_t$  mit  $\bigcap_{i=1}^t V(G_i) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$  und durch anfängliche Färbung der  $w_i$ 's sieht man wiederum  $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ . Figur 5.3 zeigt einen Graphen  $G$  mit einem vollständigen Untergraphen  $K_3$  als trennender Eckenmenge.



Figur 5.3

Wie würden wir an die Färbung eines gegebenen Graphen  $G$  herangehen? Die naheliegendste Methode ist es, die Ecken irgendwie in einer Liste  $v_1, v_2, \dots, v_p$  aufzuschreiben und dann die Ecken der Reihe nach zu färben. Als Farbmenge nehmen wir  $M = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Wir beginnen, indem wir  $v_1$  mit der Farbe 1 färben. Ist  $v_2$  nicht mit  $v_1$  verbunden, so wählen wir für  $v_2$  wieder 1, ist aber  $v_2$  mit  $v_1$  verbunden, so wählen wir die nächste Farbe 2. Allgemein wählen wir für  $v_i$  die kleinste Farbe, die unter Berücksichtigung der schon erfolgten Färbung von  $v_1, \dots, v_{i-1}$  möglich ist. Diese naive Methode wird im Allgemeinen mehr Farben als nötig verbrauchen. Figur 5.4 zeigt einen Graphen  $G$ , der bei der gegebenen Nummerierung der Ecken 3 Farben verbraucht, während  $\chi(G) = 2$  ist. Es ist aber leicht gezeigt, dass die Ecken stets so angeordnet werden können, dass dieser Algorithmus tatsächlich nicht mehr als  $\chi(G)$  Farben verbraucht. Wir werden diese Färbungsmethode also im Auge behalten und für den Algorithmus bei einer gegebenen Eckennummerierung das Symbol  $\mathcal{A}$  verwenden.



Figur 5.4

Taits Satz 1.7 legt als ersten Vergleichsparameter den Grad der Ecken nahe. Dazu zwei Bezeichnungen: Für einen Graphen  $G = (V, E)$  bezeichnen wir mit  $\delta(G) := \min_{v \in V} d(v)$ ,  $\Delta(G) := \max_{v \in V} d(v)$  den *minimalen* bzw. *maximalen Eckengrad*. Einen Untergraphen  $H = (V', E')$  von  $G = (V, E)$  nennen wir *induzierten Untergraphen*, falls  $H$  auf der Eckenmenge  $V'$  alle Kanten enthält, die auch in  $G$  vorkommen. Natürlich gilt für jeden Untergraphen  $H$ , dass  $\chi(H) \leq \chi(G)$  ist.

Nummerieren wir die Ecken irgendwie,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , so ist jede Ecke zu höchstens  $\Delta(G)$  Vorgängern benachbart. Der Algorithmus  $\mathcal{A}$  verwendet also stets höchstens  $\Delta(G) + 1$  Farben, und wir schließen  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Wir können dies sofort verschärfen.

**Satz 5.4.**  $\chi(G) \leq \max_H \delta(H) + 1$ , wobei das Maximum über alle induzierten Untergraphen  $H$  von  $G$  genommen wird.

*Beweis.* Sei  $n = \max \delta(H)$ . Dann existiert in  $G$  eine Ecke vom Grad  $\leq n$ . Wir nehmen so eine Ecke und nennen sie  $v_p$ . In dem induzierten Untergraphen  $H_{p-1} = G \setminus v_p$  gibt es nach Voraussetzung wieder eine Ecke vom Grad  $\leq n$ . Wir wählen eine solche und nennen sie  $v_{p-1}$ . Nun betrachten wir den induzierten Untergraphen  $H_{p-2} = G \setminus \{v_{p-1}, v_p\}$  usf. Auf diese Weise nummerieren wir alle Ecken rückwärts bis  $v_1$ . Betrachten wir die Liste  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , so erkennen wir, dass jede Ecke  $v_i$  zu höchstens  $n$  Vorgängern benachbart ist, so dass der Algorithmus  $\mathcal{A}$  niemals mehr als die  $(n+1)$ -ste Farbe verwendet. Also gilt  $\chi(G) \leq n + 1$ .  $\square$

Wir haben schon  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  gesehen. Wir wollen uns überlegen, ob diese Schranke noch verbessert werden kann. Nach unserer eingangs gemachten Bemerkung ist es keine Einschränkung, wenn wir  $G$  als zusammenhängend voraussetzen. Ist  $G$  nicht  $\Delta(G)$ -regulär, so enthält jeder Untergraph eine Ecke  $v$  mit  $d(v) < \Delta(G)$ , so dass  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  aus 5.4 resultiert. Sei nun  $G$   $\Delta$ -regulär. Dann finden wir sofort Beispiele, wo  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  nicht mehr verbessert werden kann, nämlich  $G = K_p$  und  $G = C_n$  für  $n$  ungerade. Im ersten Fall ist  $\chi = p = \Delta + 1$  und im zweiten  $\chi = 3 = \Delta + 1$ . Der Färbungssatz von Brooks aus dem Jahr 1941 besagt, dass dies alle Ausnahmen zu  $\chi \leq \Delta$  sind.

**Satz 5.5** (Brooks). *Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $p \geq 2$  Ecken und Maximalgrad  $\Delta$ . Dann gilt  $\chi(G) \leq \Delta$ , außer wenn  $G$  vollständig oder ein Kreis ungerader Länge  $\geq 3$  ist; in diesen Fällen ist  $\chi(G) = \Delta + 1$ .*

*Beweis.* Für  $p = 2$  ist die Behauptung trivial. Sei also  $p \geq 3$ . Nach unseren zuvor gemachten Bemerkungen können wir annehmen, dass  $G$   $\Delta$ -regulär ist, und zwar mit  $\Delta \geq 3$ , da ein 2-regulärer zusammenhängender Graph ein Kreis ist, für den die Sache ja schon geklärt ist. Ferner können wir annehmen, dass  $G$  2-fach zusammenhängend ist, denn nach der Überlegung zu Beginn gilt  $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ , wobei  $G_i$  alle an der Schnittstelle  $v$  angehefteten Untergraphen durchläuft. Da der Grad von  $v$  in jedem der Graphen  $G_i$  kleiner als  $\Delta$  ist, sind die Untergraphen  $G_i$  nicht  $\Delta$ -regulär, so dass  $\chi(G_i) \leq \Delta$  für alle  $i$  gilt. Schließlich können wir voraussetzen, dass  $G$  einfach ist, da nach Weglassen einer Mehrfachkante ein nicht mehr  $\Delta$ -regulärer Graph  $G'$  mit derselben chromatischen Zahl resultiert.

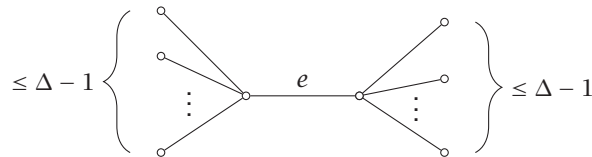
Falls  $G$  eine Ecke  $u$  mit zwei nichtbenachbarten Nachbarn  $v_1, v_2$  besitzt, so dass  $G \setminus \{v_1, v_2\}$  zusammenhängend ist, so wenden wir den Algorithmus  $\mathcal{A}$  wie folgt an. Zunächst setzen wir  $v_p = u$ ;  $v_{p-1} \in V \setminus \{v_1, v_2, v_p\}$  sei zu  $v_p$  benachbart ( $v_{p-1}$  existiert wegen  $\Delta \geq 3$ ),  $v_{p-2} \in V \setminus \{v_1, v_2, v_p, v_{p-1}\}$  sei zu  $v_p$  oder  $v_{p-1}$  benachbart usw. Für jedes  $3 \leq i < p$  existiert eine Ecke  $v_i \in V \setminus \{v_1, v_2, v_p, \dots, v_{i+1}\}$ , die zu mindestens einer der Ecken  $v_{i+1}, \dots, v_p$  benachbart ist, da ansonsten  $G \setminus \{v_1, v_2\}$  nicht zusammenhängend wäre. Der Algorithmus  $\mathcal{A}$ , beginnend mit  $v_1$ , erteilt  $v_1, v_2$  die Farbe 1 und braucht niemals mehr als  $\Delta$  Farben, da jede Ecke  $v_i$ ,  $3 \leq i < p$ , zu höchstens  $\Delta - 1$  Vorgängern benachbart ist, und  $v_p$  zu  $v_1$  und  $v_2$  benachbart ist.

Es genügt daher, solch eine Ecke  $u$  zu finden. Falls  $G$  3-fach zusammenhängend ist, so können wir jede Ecke nehmen (wegen  $G \neq K_p$ ). Sei  $G$  also 2-fach zusammenhängend,  $x \in V$  beliebig. Falls  $\kappa(G \setminus x) \geq 2$  ist, so setzen wir  $v_1 = x$  und wählen eine Ecke  $v_2$  mit Abstand 2 von  $x$  ( $v_2$  existiert wegen  $G \neq K_p$ ). Die Ecke  $u$  auf dem Weg  $(v_1, u, v_2)$  erfüllt dann das Gewünschte. Falls  $\kappa(G \setminus x) = 1$  ist, so betrachten wir die Blockzerlegung von  $G \setminus x$  (siehe 3.10 und Übung 18 in Kap. 3). Die Ecke  $x = u$  hat Nachbarn in jedem Endblock (der nur Schnittstellen mit einem weiteren Block gemeinsam hat), da  $G$  2-fach zusammenhängend ist. Nachbarn  $v_1, v_2$  von  $u$  in verschiedenen Endblöcken sind nicht benachbart, und  $G \setminus \{v_1, v_2\}$  ist zusammenhängend, da Blöcke keine Schnittstellen enthalten.  $\square$

Wenden wir unsere Ergebnisse auf plättbare Graphen an. Nach 2.9 wissen wir, dass jeder einfache plättbare Graph  $G$  eine Ecke vom Grad höchstens 5 enthält. Da jeder Untergraph  $H$  ebenfalls plättbar ist, folgt  $\delta(H) \leq 5$  und somit  $\chi(G) \leq 6$

nach 5.4. Da wir bereits  $\chi(G) \leq 5$  wissen, ist dieses Resultat nicht bemerkenswert. Interessanter ist schon der Zusammenhang mit dem Tait'schen Satz. Sei  $G$  ein 3-regulärer brückenloser plättbarer Graph. Der Kantengraph  $L(G)$  ist dann offensichtlich 4-regulär und sicherlich kein Kreis ungerader Länge oder vollständig. Also gilt nach dem Satz von Brooks  $\chi(L(G)) \leq 4$ , d.h.  $\chi'(G) \leq 4$ . Da je drei an eine Ecke anstoßenden Kanten verschiedene Farben erhalten müssen, ist somit  $\chi'(G) = 4$  auszuschließen.

Es lohnt sich demnach, *Kantenfärbungen* zu studieren. Der (wie üblich als schlingenlos vorausgesetzte) Graph  $G$  habe Maximalgrad  $\Delta$ . Alle zu einer Ecke  $v$  mit  $d(v) = \Delta$  inzidenten Kanten müssen verschieden gefärbt werden, also ist  $\chi'(G) \geq \Delta$ . Da eine Kante  $e$  höchstens zu  $2\Delta - 2$  weiteren Kanten inzident ist (siehe Figur 5.5), folgt aus 5.5 angewandt auf  $L(G)$ , dass  $\chi'(G) \leq 2\Delta - 1$  ist. Diese obere Schranke wurde 1949 von Shannon verbessert, der  $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor$  nachwies. Vizing zeigte schließlich 1964 in einer bemerkenswerten Arbeit, dass für einfache Graphen  $G$  der chromatische Index höchstens um 1 von der trivialen unteren Schranke  $\Delta(G)$  abweichen kann.

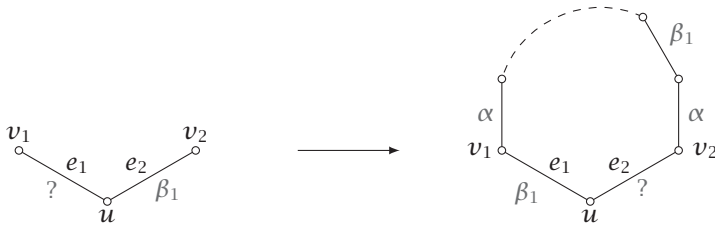


Figur 5.5

**Satz 5.6** (Vizing). Sei  $\Delta(G)$  der Maximalgrad des einfachen Graphen  $G = (V, E)$ . Dann gilt  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

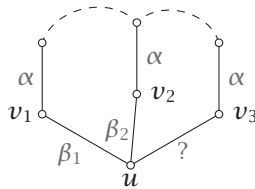
*Beweis.* Wir führen Induktion nach der Anzahl der Kanten. Für  $|E| = 0$  ist die Behauptung trivial. Nehmen wir nun an, dass alle Kanten bis auf  $e_1 = uv_1$  ordnungsgemäß mit höchstens  $\Delta + 1$  Farben gefärbt wurden. Wir wollen zeigen, dass dann auch eine  $(\Delta + 1)$ -Färbung von ganz  $E$  existiert. Wir sagen, die Farbe  $\alpha$  fehlt bei der Ecke  $w$ , falls keine der mit  $w$  inzidenten Kanten mit  $\alpha$  gefärbt wurde. Sind  $\alpha, \beta$  zwei verschiedene Farben, so bezeichnen wir mit  $G(\alpha, \beta)$  den von den  $\alpha$ - und  $\beta$ -gefärbten Kanten aufgespannten Untergraphen. Klarerweise hat jede Ecke in  $G(\alpha, \beta)$  höchstens den Grad 2, also sind die Komponenten entweder Wege oder Kreise (gerader Länge). Sowohl bei  $u$  wie bei  $v_1$  muss eine Farbe fehlen (wegen  $d(u), d(v_1) \leq \Delta$ ). Fehlt dieselbe Farbe bei beiden Ecken, so können wir diese Farbe für die Kante  $e_1$  verwenden und sind damit fertig. Sei also  $\alpha$  eine fehlende Farbe bei  $u$  und  $\beta_1 \neq \alpha$  eine fehlende Farbe bei  $v_1$ . Der Beweis erfolgt nun in drei Schritten.

(i) Sei  $e_2 = uv_2$  die mit  $u$  inzidente Kante, welche mit  $\beta_1$  gefärbt wurde. Wir löschen die Färbung von  $e_2$  und färben stattdessen  $e_1$  mit  $\beta_1$ . Fehlt  $\alpha$  bei  $v_2$ , so können wir  $\alpha$  für  $e_2$  nehmen und sind fertig. Also nehmen wir an,  $\alpha$  erscheint bei  $v_2$ . Sind die Ecken  $u, v_1, v_2$  nicht in derselben Komponente von  $G(\alpha, \beta_1)$ , so könnten wir in der  $G(\alpha, \beta_1)$ -Komponente, welche  $v_2$  enthält, die Farben  $\alpha$  und  $\beta_1$  austauschen, ohne die  $\beta_1$ -Färbung von  $e_1$  zu ändern, wodurch  $\alpha$  für die Kante  $e_2$  frei würde. Wir haben somit die Situation von Figur 5.6:



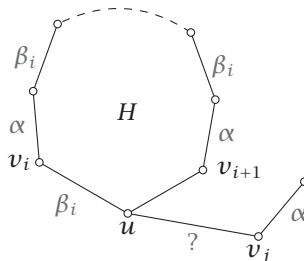
Figur 5.6

(ii) Sei nun  $\beta_2 \neq \beta_1$  eine bei  $v_2$  fehlende Farbe. Wieder können wir annehmen, dass  $\beta_2$  bei  $u$  erscheint, da wir sonst  $\beta_2$  zur Färbung von  $e_2$  verwenden könnten. Sei also  $e_3 = uv_3$  mit  $\beta_2$  gefärbt. Wir löschen die Färbung von  $e_3$  und färben stattdessen  $e_2$  mit  $\beta_2$ . Dieselbe Überlegung wie in (i) zeigt, dass wir annehmen können, dass  $\alpha$  bei  $v_3$  erscheint und dass  $u, v_2, v_3$  in derselben Komponente von  $G(\alpha, \beta_2)$  liegen (Figur 5.7).



Figur 5.7

(iii) Setzen wir diese Umfärbungsprozedur fort, so kommen wir früher oder später an eine Ecke  $v_j$  benachbart zu  $u$ , so dass die Kante  $e_j = uv_j$  ungefärbt ist und eine bei  $v_j$  fehlende Farbe  $\neq \beta_{j-1}$  auch bei  $u$  fehlt (dann färben wir damit  $e_j$  und sind fertig) oder eine Farbe  $\beta_i$  bei  $v_j$  fehlt mit  $i < j - 1$ . Wie in Schritt (i) liegen  $u, v_i, v_{i+1}$  in derselben  $G(\alpha, \beta_i)$ -Komponente  $H$ . Da  $\alpha$  bei  $u$  fehlt und  $\beta_i$  bei  $v_{i+1}$ , muss diese Komponente ein  $u, v_{i+1}$ -Weg sein, dessen Kanten abwechselnd  $\beta_i$  und  $\alpha$  gefärbt sind (Figur 5.8). Dieser Weg enthält nicht die Ecke  $v_j$ , da  $\beta_i$  bei  $v_j$  fehlt. Daraus folgt, dass die  $G(\alpha, \beta_i)$ -Komponente  $H'$ , welche  $v_j$  enthält, disjunkt zu  $H$  ist. Wir können daher in  $H'$  die Farben austauschen und nun endgültig die freie Farbe  $\alpha$  zur Färbung von  $e_j = uv_j$  verwenden.  $\square$



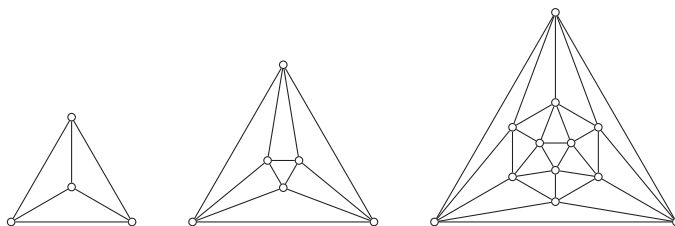
Figur 5.8

Man beachte, dass die Beweisführung einen Algorithmus zur Kantenfärbung mit  $\Delta + 1$  Farben ergibt. Vizings Satz legt sofort die folgende Klassifizierung nahe. Ein Graph  $G$  liegt in der Klasse  $\Gamma_0$ , falls  $\chi'(G) = \Delta$  und in der Klasse  $\Gamma_1$ , falls  $\chi'(G) = \Delta + 1$  ist. Hätten wir eine Entscheidungsmethode, ob ein gegebener Graph in  $\Gamma_0$  oder  $\Gamma_1$  ist, so wäre natürlich auch das 4-Farben Problem im Lichte des Tait'schen Satzes gelöst.

Eben wegen dieses Satzes interessieren vor allem reguläre Graphen. Angenommen, ein  $r$ -regulärer Graph  $G$  ist in  $\Gamma_0$ . Die einzelnen Farbklassen einer  $r$ -Kantenfärbung bestehen aus lauter nicht inzidenten Kanten und können somit höchstens  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  Kanten enthalten. Daraus erhalten wir  $r \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \geq q = \frac{rp}{2}$  (nach 1.2). Ist also  $p$  ungerade, so kann  $G$  nicht in  $\Gamma_0$  liegen. Ist aber  $p$  gerade, so folgt aus  $G \in \Gamma_0$ , dass die einzelnen Farbklassen ein 1-Faktor von  $G$  sind, und somit die genannte Kantenfärbung eine 1-Faktorisierung von  $G$  im Sinne von Kapitel 3 ist. Wir sehen also den engen Zusammenhang zum Begriff der Faktorisierung, den wir im nächsten Kapitel weiter vertiefen wollen.

**Satz 5.7.** *Sei  $G$  ein regulärer Graph. Ist die Eckenzahl  $p$  ungerade, so ist  $G \in \Gamma_1$ ; ist  $p$  gerade, so liegt  $G$  genau dann in  $\Gamma_0$ , wenn  $G$  1-faktorisierbar ist.*

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die plättbaren Graphen. Ist  $\Delta(G) \leq 5$ , so kann  $G$  sowohl in  $\Gamma_0$  wie in  $\Gamma_1$  liegen. Beispiele für  $\Gamma_0$  sind die geraden Kreise ( $\Delta = 2$ ), der Tetraeder Graph ( $\Delta = 3$ ), der Oktaeder Graph ( $\Delta = 4$ ) und der Ikosaeder Graph ( $\Delta = 5$ ). Die letzten drei sind in Figur 5.9 abgebildet. Die Leser mögen selbst eine entsprechende Kantenfärbung eintragen.



Figur 5.9

Die ungeraden Kreise sind in  $\Gamma_1$  ( $\Delta = 2$ ), und fügen wir jeweils eine Ecke in irgendeine Kante der drei in Figur 5.9 abgebildeten Graphen ein, so erhalten wir jeweils Graphen in  $\Gamma_1$ . Prüfen wir dies für das Tetraeder nach. Ist der neue Graph  $G'$  in  $\Gamma_0$ , so lassen sich die Kanten in 3 Farbklassen zerlegen. Da  $G'$  5 Ecken hat, enthält jede solche Klasse höchstens  $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$  Kanten, so dass wir insgesamt 6 Kanten färben können,  $G'$  enthält aber 7 Kanten. Genauso verläuft der Beweis in den beiden anderen Fällen.

Umso überraschender ist das Resultat von Vizing (1965), dass jeder einfache plättbare Graph  $G$  mit  $\Delta(G) \geq 8$  in  $\Gamma_0$  ist. Vizing hat darüber hinaus die Vermutung geäußert, dass dies schon ab  $\Delta(G) \geq 6$  gilt.

Kehren wir zurück zur chromatischen Zahl  $\chi(G)$ . Nachdem wir  $\Delta$  als interessante obere Schranke erkannt haben, überlegen wir uns, welche Parameter als untere Schranke in Frage kommen. Eine erste triviale, aber nützliche Schranke ergibt sich sofort aus folgender Beobachtung. Färben wir  $G$  mit  $n$  Farben, so haben die Ecken gleicher Farbe die Eigenschaft, dass zwischen ihnen überhaupt keine Kanten verlaufen. Allgemein

nennen wir eine Teilmenge  $A \subseteq V$  *unabhängig*, falls keine zwei Ecken von  $A$  durch eine Kante verbunden sind. Definieren wir die *Unabhängigkeitszahl*  $\alpha(G)$  als die Mächtigkeit einer größten unabhängigen Menge, so folgt unmittelbar:

**Lemma 5.8.** Für einen Graphen  $G$  mit  $p$  Ecken gilt  $\chi(G) \geq \frac{p}{\alpha(G)}$ .

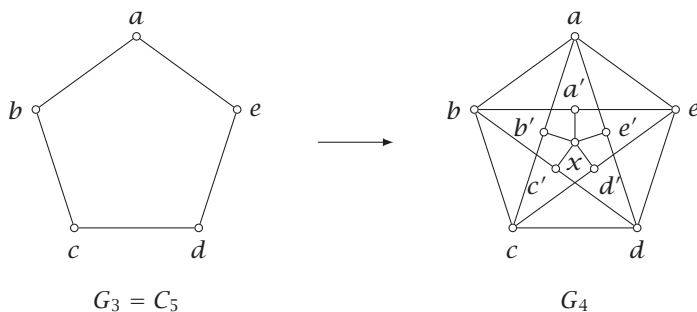
Für Kreise  $C_p$  ungerader Länge folgt wegen  $\alpha(C_p) = \frac{p-1}{2}$  wiederum  $\chi(C_p) \geq 3$ , Andererseits lassen sich leicht Beispiele angeben, für die 5.8 wenig hergibt.

Eine weitere Überlegung bietet sich an. Enthält  $G$  einen vollständigen Untergraphen mit  $n$  Ecken, so muss trivialerweise  $\chi(G) \geq n$  gelten. Dies legt folgende Definition nahe. Die *Clique-Zahl*  $\omega(G)$  sei die Anzahl der Ecken eines größten vollständigen Untergraphen von  $G$ . Offensichtlich gilt:

**Lemma 5.9.**  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

Wie gut ist diese Schranke? Hat ein Graph mit niedriger Clique-Zahl auch eine niedrige chromatische Zahl? Leider nein. Blanche Descartes (hinter diesem Namen verbirgt sich der unvergleichliche Tutte), Mycielski und Zykov haben unabhängig voneinander und beinahe gleichzeitig gezeigt, dass Graphen  $G$  mit beliebig großer chromatischer Zahl  $\chi(G)$  existieren, die nicht einmal Dreiecke besitzen, für die also  $\omega(G) = 2$  ist.

Sehen wir uns die Konstruktion von Mycielski an. Wir beginnen mit  $G_3 = C_5$ , dem Kreis der Länge 5, für den  $\chi(G_3) = 3$  und  $\omega(G_3) = 2$  gilt. Angenommen, wir haben schon  $G_n$  mit  $\chi(G_n) = n$ ,  $\omega(G_n) = 2$  konstruiert. Zu jeder Ecke  $v$  von  $G_n$  erklären wir eine neue Ecke  $v'$ , und verbinden  $v'$  genau mit den Nachbarn von  $v$ . Keinerlei Nachbarschaften werden zwischen den neuen Ecken  $v'$  eingeführt. Schließlich nehmen wir eine weitere Ecke  $x$  hinzu, die wir mit allen Ecken  $v'$  verbinden. Dies ist der Graph  $G_{n+1}$ . Figur 5.10 zeigt den Schritt von  $G_3$  nach  $G_4$ .



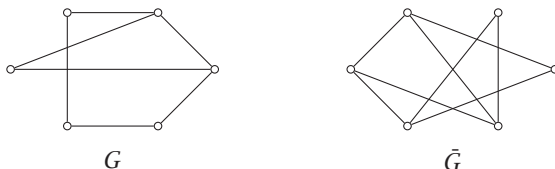
Figur 5.10

Es ist unmittelbar klar, dass wiederum  $\omega(G_{n+1}) = 2$  ist. Angenommen,  $G_{n+1}$  ist  $n$ -färbbar, dann betrachten wir die auf  $G_n$  induzierte  $n$ -Färbung. In jeder Farbklasse  $i$  von  $G_n$  muss es eine Ecke  $v_i$  geben, die zu mindestens einer Ecke aus jeder anderen Farbklasse benachbart ist. Ansonsten könnten wir nämlich die Ecken aus der Farbklasse  $i$  auf die anderen Klassen verteilen und  $G_n$  wäre  $(n-1)$ -färbbar, im Widerspruch zu  $\chi(G_n) = n$ . Da  $v'_i$  genau dieselben Nachbarn wie  $v_i$  in  $G_n$  hat, muss also  $v'_i$  dieselbe Farbe wie  $v_i$  erhalten. Somit tauchen alle  $n$  Farben unter den Ecken  $v'$  auf und



wir könnten  $x$  nicht mehr färben; also ist  $G_{n+1}$  nicht  $n$ -färbbar. Übertragen wir die Färbung der Ecken  $v$  von  $G_n$  auf die Ecken  $v'$  und färben  $x$  mit der  $(n+1)$ -ten Farbe, so erhalten wir eine  $(n+1)$ -Färbung von  $G_{n+1}$ , und es gilt folglich  $\chi(G_{n+1}) = n+1$ .

Die Clique-Zahl  $\omega(G)$  ist also im Allgemeinen ohne Auswirkung auf die Anzahl der benötigten Farben. Eine sehr interessante Graphenklasse ergibt sich aber aus der Gleichung  $\chi = \omega$ . Wir nennen einen einfachen Graphen  $G$  *perfekt*, falls für alle induzierten Untergraphen  $H$  (also auch für  $G$  selber) stets  $\chi(H) = \omega(H)$  gilt. Der kleinste nicht-perfekte Graph ist  $C_5$  mit  $\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5)$ , und natürlich sind auch alle weiteren Kreise ungerader Länge  $\geq 5$  nicht-perfekt. Ein bemerkenswerter Satz von Lovász besagt, dass ein einfacher Graph  $G$  genau dann perfekt ist, wenn dies auch für das Komplement  $\bar{G}$  zutrifft. Dabei erhalten wir das *Komplement eines Graphen*, indem wir aus  $G$  alle Kanten entfernen und genau die vorher fehlenden Kanten einfügen. Figur 5.11 zeigt einen Graphen  $G$  und sein Komplement  $\bar{G}$ .



Figur 5.11

Nach dem Resultat von Lovász ist also das Komplement eines Kreises ungerader Länge wieder nicht-perfekt, und eine berühmte Vermutung von Berge aus dem Jahr 1961 besagt, dass diese Graphen die Nicht-Perfektheit determinieren: Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann perfekt, wenn  $G$  weder einen Kreis ungerader Länge  $\geq 5$  noch einen dazu komplementären Graphen als induzierten Untergraphen enthält. Diese „Perfekte Graphen Vermutung“ von Berge wurde schließlich über 40 Jahre später von Chudnovsky, Robertson, Seymour und Thomas mit massivem Computereinsatz bewiesen.

Wir wenden uns dem zweiten Problemkreis zu, die *Struktur*  $n$ -chromatischer Graphen zu untersuchen. Schon bei der Behandlung des 4-Farben Problems waren wir auf die Bestimmung einer hypothetischen minimalen 5-chromatischen Landkarte gestoßen. In der dualen Formulierung ist dies ein plättbarer Graph  $G$  mit  $\chi(G) = 5$ , für den aber  $\chi(G \setminus v) < 5$  für jede Ecke  $v$  gilt. Diese Idee wollen wir nun aufgreifen.

**Definition.** Ein einfacher Graph  $G$  heißt *kritisch*, falls  $\chi(G \setminus v) < \chi(G)$  für jede Ecke  $v$  gilt. Ist  $\chi(G) = n$ , so heißt  $G$  *n-kritisch*.

Ist  $G$  kritisch, so gilt natürlich  $\chi(G \setminus v) = \chi(G) - 1$  für jede Ecke  $v$ . Die Wichtigkeit dieses Begriffes besteht darin, dass jeder  $n$ -chromatische Graph  $G$  einen  $n$ -kritischen Graphen enthält, denn offensichtlich ist jeder kleinste induzierte Untergraph  $H$  von  $G$  mit  $\chi(H) = \chi(G)$   $n$ -kritisch. Kritische Graphen weisen mehr Struktur auf - und es ist ja unser Ziel, so viel wie möglich über die Struktur  $n$ -chromatischer Graphen zu erfahren. Die meisten der nun folgenden Resultate wurden von Dirac in den 1950'er Jahren bewiesen.

1-kritische Graphen gibt es trivialerweise nicht, und der einzige 2-kritische Graph ist  $K_2$ . Auch die 3-kritischen Graphen sind leicht bestimmt. Nach 5.2 sind dies genau die Kreise ungerader Länge. Für  $n$ -kritische Graphen mit  $n \geq 4$  ist keine Charakterisierung bekannt und auch nicht zu erwarten.

**Lemma 5.10.** *In einem  $n$ -kritischen Graphen  $G$  ist der Minimalgrad  $\delta(G) \geq n - 1$ . Hat  $G$   $p$  Ecken und  $q$  Kanten, so gilt  $q \geq \frac{1}{2}(n - 1)p$ .*

*Beweis.* Nehmen wir im Gegenteil an, dass  $G$  eine Ecke  $v$  mit  $d(v) \leq n - 2$  besitzt. Da  $G$   $n$ -kritisch ist, können wir  $G \setminus v$  mit  $n - 1$  Farben färben und diese  $(n - 1)$ -Färbung, da  $v$  höchstens  $n - 2$  Nachbarn hat, auf  $v$  erweitern, Widerspruch. Die letzte Behauptung folgt aus 1.2.  $\square$

Da ein  $n$ -kritischer Graph natürlich mindestens  $n$  Ecken hat, folgt daraus:

**Folgerung 5.11.** *Ein  $n$ -chromatischer Graph besitzt mindestens  $n$  Ecken vom Grad  $\geq n - 1$ .*

Offensichtlich ist ein kritischer Graph zusammenhängend. Aber wir können noch wesentlich mehr sagen:

**Lemma 5.12.** *Ein kritischer Graph  $G$  kann nicht durch einen vollständigen Untergraphen getrennt werden, d. h. ist  $S$  trennende Eckenmenge, so ist der von  $S$  induzierte Untergraph niemals vollständig. Insbesondere muss ein  $n$ -kritischer Graph mit  $n \geq 3$  zweifach zusammenhängend sein.*

*Beweis.* Sei  $G_S$  der von  $S$  aufgespannte Untergraph. Dann zerfällt  $G$  in Untergraphen  $G_i$  mit  $\bigcap V(G_i) = S$  und es gilt, wie wir schon früher gesehen haben,  $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ , falls  $G_S$  vollständig ist. Da alle  $G_i$  echte Untergraphen sind, haben wir  $\chi(G_i) < \chi(G)$  für alle  $i$ , und erhalten daraus den Widerspruch  $\chi(G) < \chi(G)$ .  $\square$

Betrachten wir nochmals die Abschätzung  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Wir haben bemerkt, dass diese Ungleichung beliebig schlecht gegenüber den tatsächlichen Verhältnissen sein kann. Und doch hat man das Gefühl, dass ein  $n$ -chromatischer Graph, wenn schon keinen Untergraphen  $K_n$ , so doch einen Untergraphen enthalten muss, der in einem gewissen Sinne die Struktur des vollständigen Graphen  $K_n$  widerspiegelt. Genau dies ist der Inhalt der berühmten Vermutung, die Hadwiger 1943 ausgesprochen hat.

**Vermutung (Hadwiger).** *Für alle  $n$  gilt: Ist  $\chi(G) \geq n$ , so enthält  $G$  einen Untergraphen, der zu  $K_n$  kontrahiert werden kann.*

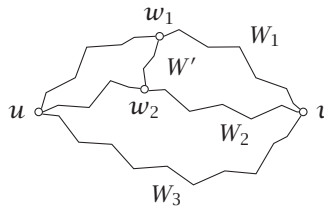
Die Vermutung für  $n$  sei durch das Symbol  $(H_n)$  abgekürzt. Wir erinnern uns, dass die Kontraktion eines Graphen  $G$  auf  $H$  bedeutet, dass  $H$  aus  $G$  durch eine Folge von Kantenkontraktionen (d. h. Identifizierung der jeweiligen Enden) hervorgeht.

**Satz 5.13.**  *$(H_n)$  ist richtig für  $n \leq 4$ .*

*Beweis.* Für  $n = 1$  und  $2$  ist die Behauptung trivial. Hat  $G$  eine chromatische Zahl  $\chi(G) \geq 3$ , so muss  $G$  nach 5.2 einen Kreis ungerader Länge  $\geq 3$  enthalten. Ein solcher

Kreis kann offensichtlich auf einen vollständigen Graphen  $K_3$  kontrahiert werden. Sei nun  $\chi(G) \geq 4$ . Wir können  $G$  als einfach voraussetzen. Wir führen Induktion nach der Eckenzahl  $p$ . Ist  $p = 4$ , so muss  $G = K_4$  sein. Die Behauptung sei richtig für alle Graphen mit weniger als  $p$  Ecken. Ist  $G$  nicht kritisch, so wählen wir einen kritischen Untergraphen  $H$ , für den  $\chi(H) = \chi(G) \geq 4$  gilt, und sind fertig mit Induktion. Sei also  $G$  kritisch. Nach 5.12 ist  $G$  2-fach zusammenhängend.

Nehmen wir an,  $G$  ist sogar 3-fach zusammenhängend. Ist  $G = K_p$ , so sind wir fertig. Andernfalls wählen wir zwei nicht verbundene Ecken  $u, v$ . Nach dem Satz von Menger 4.4 existieren drei disjunkte  $u, v$ -Wege  $W_1, W_2, W_3$ . Seien  $w_1$  und  $w_2$  Ecken auf  $W_1$  bzw.  $W_2$  verschieden von  $u, v$ . Wiederum nach 4.4 existiert mindestens ein Weg  $W'$  von  $w_1$  nach  $w_2$ , der weder  $u$  noch  $v$  enthält (siehe Figur 5.12). Nun ist aber sofort zu sehen, dass  $W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W'$  eine Unterteilung  $H$  von  $K_4$  enthält. Also kann  $H$  auf  $K_4$  kontrahiert werden.



Figur 5.12

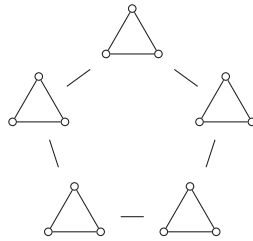
Sei nun, als letzte Möglichkeit,  $G$  2-fach zusammenhängend und  $\{u, v\}$  eine trennende Eckenmenge. Nach 5.12 sind  $u$  und  $v$  nicht benachbart. Wir fügen die Kante  $e = uv$  ein und zerlegen  $G \cup e$  wie üblich in zwei Untergraphen  $G_1, G_2$  mit  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ . Wir wissen schon, dass einer der beiden Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  eine chromatische Zahl  $\geq 4$  haben muss. Nehmen wir an, für  $G_1$  trifft dies zu. Nach Induktionsvoraussetzung enthält  $G_1$  einen Untergraphen  $H$ , der zu  $K_4$  kontrahiert werden kann. Da  $u$  und  $v$  in  $G_2 \setminus e$  durch einen Weg  $W$  verbunden sind ( $G$  ist 2-fach zusammenhängend!), so können wir die Kante  $e$  in  $H$ , falls sie auftritt, durch  $W$  ersetzen und dann ebenfalls auf  $K_4$  kontrahieren.  $\square$

Wie sieht es für  $n = 5$  aus? Wir wissen aus 4.12, dass ein plättbarer Graph keinen Untergraphen enthält, der auf  $K_5$  kontrahiert werden kann. Ist demnach  $(H_5)$  richtig, so muss auch die 4-Farben Vermutung richtig sein. Wagner hat 1960 den überraschenden Sachverhalt aufgezeigt, dass umgekehrt die Richtigkeit der 4-Farben Vermutung auch die Richtigkeit von  $(H_5)$  nach sich zieht. Also: 4-FV  $\Leftrightarrow (H_5)$ . 1993 konnte sogar  $(H_6)$  gezeigt werden (allerdings unter Verwendung des damals schon bekannten 4-Farben Satzes). Da man sich leicht überlegt, dass  $(H_{n+1})$  stets  $(H_n)$  impliziert, so sind wir vor zwei nach wie vor unentschiedene Möglichkeiten gestellt: Entweder ist  $(H_n)$  richtig für alle  $n$  oder es gibt eine kleinste Zahl  $n_0$ , so dass  $(H_n)$  falsch ist für alle  $n \geq n_0$ .

Im Kapitel über plättbare Graphen haben wir außer dem Begriff der Kontraktion noch den der Unterteilung kennengelernt. Im Lichte des Satzes von Kuratowski 4.6 ist die folgende Vermutung (aufgestellt von Hajós) ebenfalls plausibel:

$(U_n)$  *Ist  $\chi(G) \geq n$ , so enthält  $G$  eine Unterteilung von  $K_n$ .*

Da jede Unterteilung  $H$  von  $K_n$  natürlich auf  $K_n$  kontrahiert werden kann, so ist  $(U_n)$  stärker als  $(H_n)$  für jedes  $n$ . In unserem Beweis von 5.13 haben wir tatsächlich immer Unterteilungen gefunden, also ist auch  $(U_n)$  richtig für  $n \leq 4$ . Ferner würde aus  $(U_5)$  aufgrund des Satzes von Kuratowski wieder die Richtigkeit der 4-Farben Vermutung folgen. Und ebenso wie für die Hadwiger Vermutung gilt auch hier:  $(U_{n+1}) \Rightarrow (U_n)$ . Lange Zeit glaubte man, dass  $(U_n)$  für alle  $n$  tatsächlich richtig ist, bis 1979 Catlin das einfache Gegenbeispiel  $G$  aus Figur 5.13 angab. Figur 5.13 ist so zu verstehen, dass wir die Ecken eines Kreises der Länge 5 jeweils durch ein Dreieck  $K_3$  ersetzen und zwei Ecken aus verschiedenen  $K_3$ 's genau dann verbinden, wenn die zugrundeliegenden Ecken des 5-Kreises verbunden waren.  $G$  hat also 15 Ecken und ist regulär vom Grad 8. Da  $G$  ersichtlich keine unabhängige Menge mit mehr als 2 Ecken enthält, folgt aus 5.8  $\chi(G) \geq \frac{15}{2}$ , d.h.  $\chi(G) \geq 8$ . Übrigens ist wegen des Satzes von Brooks 5.5 genau  $\chi(G) = 8$ . Man überzeugt sich aber leicht, dass  $G$  keine Unterteilung eines  $K_8$  enthält. Also ist  $(U_8)$  falsch, und damit auch  $(U_n)$  für  $n \geq 8$ . Ob  $(U_n)$  für  $n$  zwischen 5 und 7 zutrifft, ist eine offene Frage. Man beachte aber, dass  $G$  kein Gegenbeispiel zu  $(H_8)$  ist. Die Leser mögen sich die Mühe nehmen, einen entsprechenden Untergraphen aufzuspüren, ja es existieren sogar Untergraphen, die zu  $K_9$  kontrahiert werden können.



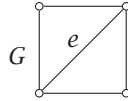
Figur 5.13

Wir kommen zum dritten Problemkreis: Wie viele Färbungen gibt es? In Kapitel 3 haben wir die Arbeiten von Birkhoff besprochen und vor allem sein Resultat 3.4, dass die Anzahl  $p(G; \lambda)$  der  $\lambda$ -Färbungen von  $G$  ein Polynom in  $\lambda$  ist. Wir haben in 3.4 gesehen, dass die Koeffizienten des chromatischen Polynoms einige Auskunft über den Graphen selbst geben. Der Idealfall wäre natürlich, wenn aus dem chromatischen Polynom der Graph eindeutig zurückgewonnen werden könnte. Doch dies ist keineswegs der Fall, wie wir anhand der Bäume sogleich demonstrieren werden. Zuvor noch ein nützlicher Hilfssatz.

**Hilfssatz 5.14.** *Ist  $G$  die Vereinigung zweier Untergraphen  $G_1, G_2$ , deren Durchschnitt ein vollständiger Graph  $K_n$  ist, so gilt  $p(G; \lambda) = \frac{p(G_1; \lambda)p(G_2; \lambda)}{p(K_n; \lambda)}$ .*

*Beweis.* Jede Färbung von  $G$  entspricht genau einem Paar  $(f_1, f_2)$  von Färbungen von  $G_1$  bzw.  $G_2$ , die auf  $K_n$  übereinstimmen. Ist nun  $f_1$  eine  $\lambda$ -Färbung von  $G_1$ , so gibt es ersichtlich genau  $\frac{p(G_2; \lambda)}{p(K_n; \lambda)}$   $\lambda$ -Färbungen  $f_2$  von  $G_2$ , die auf  $K_n$  mit  $f_1$  übereinstimmen, und daraus folgt sofort die Behauptung.  $\square$

**Beispiel.** Wir wollen das chromatische Polynom des Graphen  $G$  aus Figur 5.14 berechnen. Die beiden  $K_3$ 's sind längs der Kante  $e$  zusammengeheftet, also erhalten wir  $p(G; \lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2}{\lambda(\lambda-1)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ .



Figur 5.14

Lassen wir  $e$  weg, so resultiert aus der üblichen Rekursion (vergleiche den Beweis von 3.4) das chromatische Polynom des Kreises der Länge 4,  $p(C_4; \lambda) = p(G; \lambda) + p(G/e; \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + \lambda(\lambda-1)^2 = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ , wobei  $G/e$  der durch Kontraktion von  $e$  entstehende Graph ist.

**Lemma 5.15.** *Jeder Baum  $T$  mit  $p$  Ecken hat das chromatische Polynom*

$$p(T; \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} \lambda^{p-i}.$$

*Beweis.* Induktion nach  $p$ . Für  $p = 1$  ist nichts zu beweisen. Sei nun  $p > 1$ . Wegen  $2q = 2p - 2 = \sum_{i=1}^p d(v_i)$  gibt es eine Ecke  $u$  mit  $d(u) = 1$ . Für den nach Entfernung von  $u$  entstehenden Baum  $T'$  gilt nach Induktion  $p(T'; \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{p-2}$ . Die Kante  $uv$  schneidet  $T'$  in  $v$ , so dass wir mit 5.14 sofort  $p(T; \lambda) = \frac{p(T'; \lambda)p(K_2; \lambda)}{p(K_1; \lambda)} = \frac{\lambda(\lambda-1)^{p-2}\lambda(\lambda-1)}{\lambda} = \lambda(\lambda-1)^{p-1}$  erhalten.  $\square$

Im Übrigen gilt auch die Umkehrung: Ist  $G = \lambda(\lambda-1)^{p-1}$ , so muss  $G$  ein Baum sein, wie aus Satz 3.4(i)-(iii) sofort folgt.

Eine interessante Frage ergibt sich aus diesen Bemerkungen: Angenommen, die einfachen Graphen  $G$  und  $H$  haben identische chromatische Polynome  $p(G; \lambda) = p(H; \lambda)$ . Was kann man über die gemeinsame Struktur aussagen? Aus 3.4 wissen wir, dass  $G$  und  $H$  gleichviele Ecken, Kanten und Komponenten haben müssen. Was gilt darüber hinaus noch? Mit einem Wort, wir müssten auch die weiteren Koeffizienten  $a_i$  von  $p(G; \lambda)$  graphentheoretisch interpretieren können, d. h. angeben können, was sie im Graphen wirklich zählen. Solch eine Interpretation wurde von Whitney 1932 gefunden, bei deren Beweis wir eine der wichtigsten kombinatorischen Abzählmethoden kennenlernen.

Zuerst das kombinatorische Prinzip: Es ist die Methode der *Inklusion-Exklusion*. Um beim Färbungsthema zu bleiben, nehmen wir an, 10 Schachteln liegen auf dem Tisch. Person  $A$  kommt und markiert einige davon rot, dann kommt  $B$  und markiert einige der 10 Schachteln blau, und schließlich noch  $C$ , der einige Schachteln gelb markiert. Frage: Wie viele bleiben ohne jede Markierung? Um diese Zahl  $E_0$  zu bestimmen, ziehen wir zunächst von 10 die Zahl  $r$  der rot markierten, die Zahl  $b$  der blau markierten und schließlich die Zahl  $g$  der gelb markierten ab.  $10 - r - b - g$  wird im Allgemeinen nicht das richtige Ergebnis sein, da wir z. B. eine rot und blau markierte Schachtel zweimal abgezogen haben. Also addieren wir die Zahlen  $rb + rg + bg$  wieder hinzu, wobei  $rb$  die Anzahl der sowohl rot wie blau markierten Schachteln bedeutet, und ebenso für

$rg, bg$ . Nun haben wir schon fast richtig gezählt, mit Ausnahme jener Schachteln, die rot, grün und blau markiert sind, diese haben wir nämlich je dreimal abgezogen und dazu addiert, so dass sie noch nicht berücksichtigt sind. Das richtige Ergebnis ist demnach:  $E_0 = 10 - r - b - g + rb + rg + bg - rgb$ .

**Prinzip der Inklusion-Exklusion 5.16.** Sei  $S$  eine endliche Menge und  $P = \{P_1, \dots, P_t\}$  eine Menge von Eigenschaften, welche die Elemente von  $S$  besitzen können oder nicht. Für  $A \subseteq P$  bezeichnen wir mit  $S(A) \subseteq S$  jene Teilmenge von Elementen, welche alle Eigenschaften aus  $A$  aufweisen (und möglicherweise noch weitere). Insbesondere ist also  $S(\emptyset) = S$ . Sei  $N_i = \sum_{A \subseteq P, |A|=i} |S(A)|$ ,  $i = 0, \dots, t$ . Dann gilt für die Anzahl  $E_0$  der Elemente aus  $S$ , die keine einzige Eigenschaft besitzen:

$$E_0 = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots + (-1)^t N_t.$$

*Beweis.* Setzen wir für  $N_i$  den definierenden Ausdruck ein, so ist die Behauptung gleichwertig mit  $E_0 = \sum_{A \subseteq P} (-1)^{|A|} |S(A)|$ . Angenommen das Element  $s$  hat genau die Eigenschaften  $B \subseteq P$ . Dann wird  $s$  auf der rechten Seite genau in den Ausdrücken  $(-1)^{|A|} |S(A)|$  für  $A \subseteq B$  gezählt. Ist  $|B| = k$ , so ist daher der Beitrag von  $s$  genau  $1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots + (-1)^k$  und dies ist nach dem binomischen Lehrsatz 0, falls  $k \geq 1$  ist, und 1 falls  $k = 0$  ist.  $\square$

So simpel dieses Prinzip auch aussieht, es ist eine der fruchtbarsten Methoden in der abzählenden Kombinatorik. Zurück zu Whitney. Ist  $G = (V, E)$  gegeben, so nennen wir jeden Untergraphen  $H$  einen *spannenden Untergraphen*, falls  $H$  auf der gesamten Eckenmenge definiert ist. Mit  $c(H)$  bezeichnen wir die Anzahl der Komponenten von  $H$ . Betrachten wir zunächst *alle* Abbildungen  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ . Dies sei unsere Menge  $S$ , für die somit  $|S| = \lambda^p$  gilt. Zu jeder Kante  $e = uv \in E$  definieren wir eine Eigenschaft  $P_e$ , indem wir sagen  $f \in S$  besitzt die Eigenschaft  $P_e$ , falls  $f(u) = f(v)$  ist. Nach dieser Definition ist also unser chromatisches Polynom  $p(G; \lambda)$  genau gleich der Zahl  $E_0$  von oben. Es verbleibt uns noch, einen Ausdruck für  $|S(A)|$ ,  $A \subseteq E$ , zu finden. Es sei  $H_A = (V, A)$  der spannde Untergraph mit Kantenmenge  $A$ . Eine Abbildung  $f \in S(A)$  muss dann ersichtlich allen Ecken einer Komponente von  $H_A$  denselben Wert in  $\{1, 2, \dots, \lambda\}$  zuteilen. Aber auch die Umkehrung ist richtig: Ist eine Abbildung  $f$  auf den Ecken jeder einzelnen Komponente konstant (Ecken in verschiedenen Komponenten können verschiedene Werte erhalten), so ist  $f \in S(A)$ . Die Anzahl dieser Abbildungen  $f$  ist aber offensichtlich  $\lambda^{c(H_A)}$ , und wir erhalten  $p(G; \lambda) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{c(H_A)}$ , und durch Zusammenfassung der Kantenmengen  $A$  mit gleichem  $c(H_A)$  das folgende Resultat.

**Satz 5.17** (Whitney). Sei  $p(G; \lambda) = \sum_{i=0}^p a_i \lambda^{p-i}$  das chromatische Polynom des Graphen  $G$ . Dann ist  $a_i = \sum_{\ell=0}^q (-1)^\ell N(\ell, p-i)$ , wobei  $N(\ell, j)$  die Anzahl der spannenden Untergraphen mit  $\ell$  Kanten und  $j$  Komponenten ist.

Man beachte, dass aus der Formel sofort wieder  $a_0 = 1$  und  $a_1 = -q$  für einfache Graphen folgt. Interessant ist auch der lineare Koeffizient  $a_{p-1}$ , falls  $G$  zusammenhängend ist. Wir lesen ab, dass  $a_{p-1}$  gleich der Differenz zwischen der Anzahl zusammenhängender spannender Untergraphen mit einer geraden Zahl von Kanten ist und derer mit einer ungeraden Zahl von Kanten - ein bemerkenswertes Resultat. Für

unser Entscheidungsproblem, ob zwei Graphen gleiches chromatisches Polynom haben, ist 5.17 natürlich nur in sehr beschränktem Umfang anwendbar. Wir müssten ja alle spannenden Untergraphen durchtesten. Whitney hat zwar in derselben Arbeit gezeigt, dass wir uns schon auf eine Teilmenge von Untergraphen beschränken können, doch ist auch dieses Resultat weit von einem übersichtlichen Entscheidungsverfahren entfernt.

Trotzdem ist es wünschenswert, nähere Auskunft über die Koeffizienten chromatischer Polynome zu gewinnen. Dazu bietet sich vor allem die Rekursion in der Beweisführung von Satz 3.4 an. Wir haben dort gezeigt: Ist  $e$  eine Kante von  $G$  und sind  $G \setminus e$ ,  $G/e$  die Graphen, die durch Entfernung der Kante  $e$  bzw. durch Kontraktion von  $e$  entstehen, so gilt:  $p(G; \lambda) = p(G \setminus e; \lambda) - p(G/e; \lambda)$ . Zur Vereinfachung der Induktionsbeweise ist es günstig, statt der Koeffizienten  $a_i$  in  $p(G; \lambda) = \sum_{i=0}^p a_i \lambda^{p-i}$  die Absolutbeträge  $\alpha_i = |a_i|$  zu betrachten. Wir schreiben  $p(G; \lambda) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \alpha_i \lambda^{p-i}$ , dann sind alle  $\alpha_i \geq 0$ , da laut 3.4(ii) die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots$  alternierendes Vorzeichen haben.

**Lemma 5.18.** Sei  $p(G; \lambda) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \alpha_i \lambda^{p-i}$  das chromatische Polynom von  $G$  und  $\psi(G; \lambda) = \sum_{i=0}^p \alpha_i \lambda^{p-i}$ . Dann gilt

- (i)  $\psi(G; \lambda) = (-1)^p p(G; -\lambda)$  für alle  $\lambda$ ,
- (ii)  $\psi(G; \lambda) = \psi(G \setminus e; \lambda) + \psi(G/e; \lambda)$ ,
- (iii)  $\psi(G; \lambda) = \lambda^r \sum_{j=0}^{p-r} t_j (\lambda + 1)^{p-r-j}$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $t_j \geq 0$ , wobei  $r$  die Anzahl der Komponenten von  $G$  ist.

*Beweis.* Wir haben  $(-1)^p p(G; -\lambda) = \sum (-1)^{p+i} \alpha_i (-1)^{p-i} \lambda^{p-i} = \sum \alpha_i \lambda^{p-i} = \psi(G; \lambda)$ . Die Rekursion (ii) folgt nun unmittelbar durch Einsetzen aus der entsprechenden Rekursion für die chromatischen Polynome. In (iii) genügt es wegen 3.4(iv), zusammenhängende Graphen  $G$  zu betrachten und hier  $\psi(G; \lambda) = \lambda \sum_{j=0}^{p-1} t_j (\lambda + 1)^{p-1-j}$  nachzuweisen. Für Bäume  $T$  gilt laut 5.15,  $\psi(T; \lambda) = (-1)^p p(T; -\lambda) = (-1)^p (-\lambda)(-\lambda - 1)^{p-1} = \lambda(\lambda + 1)^{p-1}$ , also ist für Bäume (iii) erfüllt. Der Rest folgt mit Induktion nach der Kantenzahl aus der Rekursion (ii), wobei eine Kante  $e$  gewählt wird, die keine Brücke ist.  $\square$

Aus 5.18(iii) lassen sich nun leicht ein paar bemerkenswerte Folgerungen ziehen. Wegen 3.4(iv) beschränken wir uns dabei wieder auf zusammenhängende Graphen. Die entsprechenden Ergebnisse gelten ganz allgemein.

**Satz 5.19.** Sei  $G$  ein zusammenhängender einfacher Graph mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten, und  $p(G; \lambda) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \alpha_i \lambda^{p-i}$  das chromatische Polynom. (Beachte:  $\alpha_p = 0$  wegen 3.4(iii).) Dann gilt für alle  $i \geq 1$ :

$$\binom{p-1}{i} + (q-p+1) \binom{p-2}{i-1} \leq \alpha_i \leq \binom{q}{i}.$$

*Beweis.* Die obere Schranke ist nach 5.15 für Bäume richtig. Seien  $\alpha'_i, \alpha''_i$  die Koeffizienten von  $G \setminus e$  bzw.  $G/e$ , so gilt laut 5.18(ii)  $\alpha_i = \alpha'_i + \alpha''_{i-1}$  für  $i \geq 1$ ,  $\alpha_0 = \alpha'_0 = 1$ . Mit Induktion schließen wir aus  $\alpha'_i \leq \binom{q-1}{i}$ ,  $\alpha''_{i-1} \leq \binom{q-1}{i-1}$  mittels der Rekursion für die Binomialkoeffizienten, dass  $\alpha_i = \alpha'_i + \alpha''_{i-1} \leq \binom{q-1}{i} + \binom{q-1}{i-1} = \binom{q}{i}$ . Setzen wir in

5.18(iii)  $r = 1$ , so erhalten wir  $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \lambda^{p-i} = \lambda \sum_{j=0}^{p-1} t_j (\lambda + 1)^{p-1-j}$ , und daraus durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^i \binom{p-1-j}{i-j} t_j. \quad (*)$$

Da alle  $t_j \geq 0$  sind, folgt insbesondere  $\alpha_i \geq \binom{p-1}{i} t_0 + \binom{p-2}{i-1} t_1$ . Mit  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = q$  eingesetzt in (\*) ergeben sich aber sofort die Werte  $t_0 = 1$ ,  $t_1 = q - p + 1$ , und daraus die untere Schranke.  $\square$

Aus dem Beweis der oberen Schranke ist übrigens klar, dass Gleichheit für alle  $i$  nur für die Bäume gelten kann. Für Gleichheit in der unteren Schranke gibt es außer den Bäumen noch weitere Beispiele, die leicht zu bestimmen sind.

Außer Schranken erlaubt 5.18 auch noch eine Aussage über den Gesamtverlauf der Zahlenfolge  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1})$ . Bei Bäumen erhalten wir nach Satz 5.15 die Folge der Binomialkoeffizienten  $\binom{p-1}{0}, \binom{p-1}{1}, \dots, \binom{p-1}{p-1}$ . Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass diese Folge zunächst strikt bis zum Maximum  $\binom{p-1}{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$  steigt (das für gerades  $p$  zweimal angenommen wird) und danach strikt fällt. Allgemein nennt man Folgen mit dieser Eigenschaft *unimodal*, und es wird vermutet, dass die Folge  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$  für *jedes* chromatische Polynom unimodal ist. Der folgende Satz beweist die Hälfte dieser Vermutung.

**Satz 5.20.** *Sei  $G$  ein zusammenhängender einfacher Graph mit  $p \geq 3$  Ecken und  $p(G; \lambda) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \alpha_i \lambda^{p-i}$  das chromatische Polynom. Dann gilt:*

(i)  $\alpha_k < \alpha_\ell$  für  $0 \leq k < \frac{p-1}{2}$  und  $k < \ell < p - 1 - k$ ,

(ii)  $\alpha_k \leq \alpha_{p-1-k}$  für  $0 \leq k < \frac{p-1}{2}$ ,

und somit insbesondere

(iii)  $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor - 1} \leq \alpha_{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$ ,

wobei in (ii) und (iii) jeweils Ungleichungen stehen, falls  $G$  kein Baum ist.

*Beweis.* Für Bäume haben wir die Behauptungen schon nachgewiesen. Sei also  $G$  kein Baum, dann ist der Koeffizient  $t_1 = q - p + 1 > 0$ . Wir verwenden den Ausdruck (\*) aus dem Beweis des vorigen Satzes für die  $\alpha_i$ 's. Für  $0 \leq k < \frac{p-1}{2}$  und  $k < \ell \leq p - 1 - k$  ist  $\binom{p-1-j}{k-j} \leq \binom{p-1-j}{\ell-j}$  für  $j = 0, 1, \dots, k$  und somit  $\binom{p-1-j}{k-j} t_j \leq \binom{p-1-j}{\ell-j} t_j$ . Wegen  $t_1 > 0$  haben wir strikte Ungleichung für  $j = 1$ , woraus laut (\*)  $\alpha_k < \alpha_\ell$  resultiert. Daraus folgen (ii) und (iii) unmittelbar.  $\square$

Wir haben in 3.4 und 5.19, 5.20 eine ganze Anzahl von Eigenschaften zusammengetragen, welche die Koeffizienten eines chromatischen Polynoms erfüllen müssen. Diese Eigenschaften reichen jedoch keineswegs aus, um ein gegebenes Polynom als chromatisch auszuweisen. Als Beispiel diene  $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda$ . Man kann sich leicht überlegen, dass alle angeführten Bedingungen erfüllt sind, aber kein zugehöriger Graph existiert. Hier ist also ein weiteres offenes Problem: Man charakterisiere die chromatischen Polynome!

Nach den Koeffizienten wenden wir uns als letzter Fragestellung den *Nullstellen* von chromatischen Polynomen zu. Ausgangspunkt und Triebfeder war natürlich wiederum das 4-Farben Problem in der äquivalenten Fassung: Gilt  $p(G; 4) > 0$  für jeden



ebenen Graphen? Oder andersherum formuliert: Ist 4 niemals Nullstelle von  $p(G; \lambda)$ , wenn  $G$  eben ist?

Wo liegen die reellen Nullstellen eines beliebigen chromatischen Polynoms? Wegen 3.4(iv) können wir uns wieder auf zusammenhängende Graphen beschränken. Eine erste Aussage ist im folgenden Lemma enthalten.

**Lemma 5.21.** *Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $p \geq 3$  Ecken. Dann gilt:*

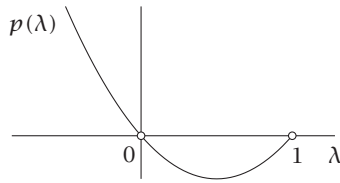
- (i)  $p(G; \lambda) \neq 0$  für  $\lambda < 0$ ,
- (ii)  $p(G; \lambda) \neq 0$  für  $0 < \lambda < 1$ ,
- (iii)  $p(G; 0) = p(G; 1) = 0$ ; 0 ist eine einfache Nullstelle, 1 ist eine  $m$ -fache Nullstelle, wobei  $m$  die Anzahl der Blöcke ist.
- (iv) Für die größte reelle Nullstelle  $\lambda_0$  gilt  $\lambda_0 \leq p - 1$ .

*Beweis.* Schreiben wir  $p(G; \lambda)$  in der Form  $p(G; \lambda) = \lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} + \alpha_2 \lambda^{p-2} - \dots + (-1)^{p-1} \alpha_{p-1} \lambda$ , so lesen wir für  $\lambda < 0$  wegen  $\alpha_i > 0$  für alle  $i$  sofort  $p(G; \lambda) > 0$  für  $p$  gerade und  $p(G; \lambda) < 0$  für  $p$  ungerade ab. Damit ist (i) bewiesen. Zu (ii) zeigen wir genauer  $(-1)^{p-1} p(G; \lambda) > 0$  für  $0 < \lambda < 1$ . Für Bäume ist dies nach 5.15 sicherlich richtig. Wir schließen wie bisher mit Induktion nach der Kantenzahl. Ist  $G$  kein Baum und  $e$  keine Brücke, so sind  $G \setminus e$  und  $G/e$  zusammenhängend und wir erhalten  $(-1)^{p-1} p(G; \lambda) = (-1)^{p-1} p(G \setminus e; \lambda) + (-1)^{p-2} p(G/e; \lambda) > 0$ .

Offenbar sind 0 und 1 Nullstellen, da  $G$  nicht 1-färbbar ist, und da  $G$  zusammenhängend ist, ist 0 wegen 3.4(ii) einfache Nullstelle. Sind zwei Blöcke  $B, B'$  in der Schnittcke  $v$  zusammengeheftet, so haben wir  $p(B \cup B'; \lambda) = \frac{p(B; \lambda) p(B'; \lambda)}{\lambda}$  nach 5.14 und folgern daraus durch Induktion sofort  $p(G; \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^m p(B_i; \lambda)}{\lambda^{m-1}}$ , wobei  $B_1, \dots, B_m$  die Blöcke von  $G$  sind. Für alle diese Blöcke gilt natürlich  $p(B_i; 1) = 0$ , d. h. es bleibt zu zeigen, dass 1 eine einfache Nullstelle für jeden 2-fach zusammenhängenden Graphen ist. Wir zeigen genauer, dass dann  $(-1)^p \frac{p(G; \lambda)}{\lambda-1} \Big|_{\lambda=1} > 0$  ist. Wie immer können wir  $G$  als einfach voraussetzen. Für  $p = 3$  muss  $G = K_3$  sein, und für  $K_3$  gilt  $(-1)^3 \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{\lambda-1} \Big|_{\lambda=1} > 0$ . Sei also  $p \geq 4$ . Nach Induktion genügt der Nachweis, dass entweder  $G \setminus e$  oder  $G/e$  2-fach zusammenhängend ist. Nehmen wir an,  $G/e$  hat eine Schnittcke, dann muss dies die durch Kontraktion von  $e = uv$  entstandene Ecke sein, d. h.  $\{u, v\}$  muss eine trennende Eckenmenge von  $G$  sein. Seien  $W_1$  und  $W_2$  zwei  $u, v$ -Wege in verschiedenen Komponenten von  $G \setminus \{u, v\}$ .  $W_1 \cup W_2$  ergibt einen Kreis, und daraus folgt ohne größere Mühe, dass  $G \setminus e$  2-fach zusammenhängend ist.

Zum Beweis von (iv) überlegen wir uns einen alternativen Ausdruck für  $p(G; \lambda)$ . Jede Färbung von  $G$  entspricht einer Partition  $P$  der Eckenmenge in Klassen von unabhängigen Mengen. Zu jeder solchen Partition  $P$  gibt es offensichtlich genau  $\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-|P|+1)$   $\lambda$ -Färbungen ( $|P| =$  Anzahl der Klassen), deren Farbklassen genau die Klassen von  $P$  sind. Daraus folgt nun  $p(G; \lambda) = \sum_P \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-|P|+1)$  über alle Partitionen  $P$ . Der rechte Ausdruck ist aber für  $\lambda > p-1$  stets positiv, da für alle Partitionen  $|P| \leq p$  gilt, und somit ist auch  $p(G; \lambda) > 0$  für alle  $\lambda > p-1$ .  $\square$

Laut 5.21 verläuft die Kurve eines chromatischen Polynoms etwa wie in Figur 5.15 angedeutet.



Figur 5.15

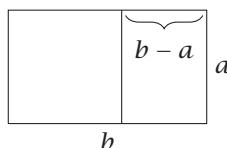
Wo liegen die weiteren Nullstellen? Selbstverständlich sind alle natürlichen Zahlen  $0, 1, 2, \dots, \chi(G) - 1$  Nullstellen, aber wir wollen ja gerade umgekehrt von der Struktur des chromatischen Polynoms auf die kleinste natürliche Zahl  $\chi(G)$  schließen, für die  $p(G; \chi(G)) > 0$  ist. Insbesondere interessieren ebene Graphen. Wir wissen aus Kapitel 1, dass es genügt, die 4-Farben Vermutung für normale kubische Landkarten zu beweisen. Deren duale Graphen haben die Eigenschaft, dass alle Länder von 3 Kanten begrenzt werden. Sie heißen daher *Triangulierungen* der Ebene, und unser Problem nimmt somit die Form an: Wo liegen die Nullstellen von  $p(G; \lambda)$ , wenn  $G$  eine Triangulierung ist?

Mit einer ähnlichen Überlegung wie in 5.21 kann gezeigt werden, dass das chromatische Polynom einer Triangulierung auch keine Nullstelle zwischen 1 und 2 besitzt. Gehen wir zum nächsten Intervall  $2 < \lambda < 3$ . Hier haben 1969 Berman und Tutte ein interessantes Phänomen entdeckt. Sei  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  die positive Wurzel der Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$ . Dann hatten alle bis dahin berechneten chromatischen Polynome eine Nullstelle in der Nähe von  $\tau + 1 = 2,61803\dots$ , während  $\tau + 1$  merkwürdigerweise selber keine Nullstelle sein kann, wie wir gleich zeigen werden. Ein Jahr später vermochte Tutte die Erklärung für dieses Phänomen quantitativ zu fassen: Für jede Triangulierung  $G$  mit  $p$  Ecken gilt  $|p(G; \tau + 1)| \leq \tau^{5-p}$ . Daraus folgt insbesondere: Ist die Eckenzahl einer Triangulierung nur genügend groß, so wird  $|p(G; \tau + 1)|$  beliebig klein, und es steht zu erwarten, dass eine Nullstelle nahe bei  $\tau + 1$  liegt.

**Lemma 5.22.**  $p(G; \tau + 1) \neq 0$  für jeden Graphen  $G$ .

*Beweis.* Wir können  $G$  als zusammenhängend voraussetzen. Das Polynom  $\lambda^2 - 3\lambda + 1$  hat die Nullstellen  $\tau + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  und  $\eta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Da  $\lambda^2 - 3\lambda + 1$  ein über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen irreduzibles, d. h. nicht weiter zerlegbares Polynom ist, so folgt aus Sätzen der Algebra, dass  $p(G; \lambda)$  mit  $\tau + 1$  auch  $\eta$  als Nullstelle haben müsste. Dies ist aber wegen  $0 < \eta < 1$  und 5.21(ii) unmöglich.  $\square$

Die Zahl  $\tau$  ist eine der Fundamentalzahlen der gesamten Mathematik, genannt der „Goldene Schnitt“. Der Grund dafür ist folgender: Nehmen wir ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$ ,  $a \leq b$ . Dann wird dieses Rechteck ästhetisch als besonders ausgewogen empfunden (und dies ist empirisch nachgewiesen), wenn das Verhältnis von  $b$  zu  $a$  etwa gleich dem Verhältnis von  $a$  zur Differenz  $b - a$  ist (Figur 5.16).



Figur 5.16

Bezeichnen wir mit  $\tau = \frac{b}{a}$  das gesuchte Verhältnis, so erhalten wir  $\tau = \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{1}{\frac{b}{a}-1} = \frac{1}{\tau-1}$  und somit  $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ . Das heißt,  $\tau$  ist genau die vorhin bestimmte Zahl  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$  Die Zahl  $\tau$  taucht in nahezu allen Bereichen der Mathematik auf, vornehmlich in der Kombinatorik. Als bekanntestes Beispiel seien die Fibonacci Zahlen erwähnt, definiert durch die Rekursion  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , also  $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$  usw. Die Folge der Brüche  $(\frac{F_{n+1}}{F_n}) = (1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots)$  strebt gegen den Goldenen Schnitt.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem Satz von Tutte (1968), der oft der Goldene Schnitt Satz in der Theorie der chromatischen Polynome genannt wird.

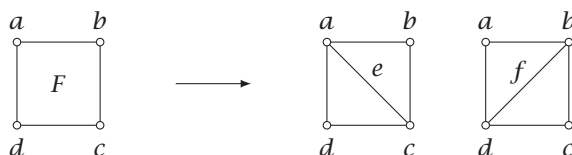
**Satz 5.23** (Tutte). *Sei  $G$  eine Triangulierung mit  $p$  Ecken. Dann gilt*

$$p(G; \tau + 2) = (\tau + 2)\tau^{3p-10}p^2(G; \tau + 1).$$

*Beweis.* Aus der Gleichung  $\tau^2 - \tau - 1 = 0$  folgern wir die Relationen:

$$(i) \tau^{-1} = \tau - 1, \quad (ii) \tau^2 = \tau + 1, \quad (iii) \tau^3 = 2\tau + 1.$$

Wir schließen mit Induktion nach der Eckenzahl  $p$ . Für  $p = 3$  ist  $G = K_3$ , und durch Einsetzen in  $p(K_3; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$  erkennt man, dass die Identität gilt. Zur Vorbereitung der Induktion beweisen wir zunächst zwei Gleichungen. Sei  $G$  ein ebener Graph mit einem Land  $F$ , welches von 4 Kanten berandet ist. Die Ecken des Randes seien  $a, b, c, d$ . Wir fügen einmal die Kante  $e = ac$ , das andere Mal die Kante  $f = bd$  hinzu und bezeichnen die entstehenden Graphen mit  $G_1$  bzw.  $G_2$  (siehe Figur 5.17).



Figur 5.17

**Behauptung.**

$$(iv) \quad p(G; \lambda) = p(G_1; \lambda) + p(G_1/e; \lambda) = p(G_2; \lambda) + p(G_2/f; \lambda)$$

$$(v) \quad p(G; \tau + 1) = (\tau + 1)(p(G_1; \tau + 1) + p(G_2; \tau + 1)).$$

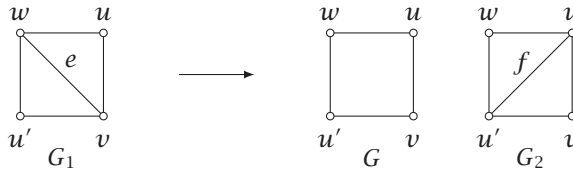
Wegen  $G = G_1 \setminus e = G_2 \setminus f$  ist (iv) nichts anderes als die übliche Rekursionsgleichung für chromatische Polynome. Zum Beweis von (v) verwenden wir Induktion nach der Kantenzahl. Angenommen  $G$  hat nur die Ecken aus  $F$ . Dann ist  $G$  entweder ein Kreis der Länge 4 oder  $a$  und  $c$  bzw.  $b$  und  $d$  (aber nicht beide) sind außerhalb  $F$  durch eine Kante verbunden. Im ersten Fall haben wir  $p(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ , im zweiten Fall  $p(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$  (siehe das Beispiel nach 5.14). Die chromatischen Polynome von  $G_1$  und  $G_2$  sind ebenso leicht zu berechnen und durch Einsetzen von  $\lambda = \tau + 1$  erkennt man unter Berücksichtigung von (i) bis (iii) die Richtigkeit der Identität (v) in allen Fällen. Wir nehmen nun an, dass  $G$  noch weitere Ecken enthält. Ist keine dieser Ecken mit  $\{a, b, c, d\}$  benachbart, so sind wir wegen 3.4(iv) fertig. Sei

nun  $e$  eine Kante, welche eine Ecke in  $F$  hat. Wir setzen  $G' = G \setminus e$ ,  $G'_1 = G_1 \setminus e$ ,  $G'_2 = G_2 \setminus e$  und  $G'' = G/e$ ,  $G''_1 = G_1/e$ ,  $G''_2 = G_2/e$ . Nach Induktionsvoraussetzung haben wir dann

$$\begin{aligned} p(G'; \tau + 1) &= (\tau + 1)(p(G'_1; \tau + 1) + p(G'_2; \tau + 1)) \\ p(G''; \tau + 1) &= (\tau + 1)(p(G''_1; \tau + 1) + p(G''_2; \tau + 1)) \end{aligned}$$

und (v) folgt durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen.

Wir kehren zum Beweis des Satzes zurück. Sei  $G$  eine Triangulierung mit minimaler Eckenzahl  $p$ , für die die Identität nicht gültig ist. Unter allen Gegenbeispielen mit  $p$  Ecken wählen wir einen Graphen  $G_1$ , für den der Maximalgrad  $\Delta(G_1)$  möglichst groß ist. Sei  $u$  eine Ecke in  $G_1$  mit  $d(u) = \Delta(G_1)$  und  $\{u, v, w\}$  ein Dreieck, welches  $u$  enthält. Ferner sei  $\{u', v, w\}$  ein weiteres Dreieck mit der Kante  $e = vw$ . Wir behaupten, dass dann notwendigerweise  $u = u'$  ist. Nehmen wir das Gegenteil  $u \neq u'$  an. Wir setzen  $G = G_1 \setminus e$ ,  $G_2 = G \cup f$ ,  $f = uu'$ , wie in Figur 5.18.



Figur 5.18

Die Graphen  $G_1/e$ ,  $G_2/f$  sind nach Wegstreichen der mehrfachen Kanten (welche auf das chromatische Polynom keinen Einfluss haben) wieder Triangulierungen mit weniger als  $p$  Ecken. Die Triangulierung  $G_2$  hat  $p$  Ecken mit  $\Delta(G_2) \geq \Delta(G_1) + 1$ , also gilt für alle drei Graphen  $G_1/e$ ,  $G_2/f$ ,  $G_2$  die behauptete Identität. Nach (iv) und (v) haben wir

$$\begin{aligned} p(G_1; \tau + 1) + p(G_1/e; \tau + 1) + p(G_2; \tau + 1) + p(G_2/f; \tau + 1) \\ = 2p(G; \tau + 1) = 2(\tau + 1)(p(G_1; \tau + 1) + p(G_2; \tau + 1)), \end{aligned}$$

und somit wegen (iii)

$$\begin{aligned} p(G_1/e; \tau + 1) + p(G_2/f; \tau + 1) &= (2\tau + 1)(p(G_1; \tau + 1) + p(G_2; \tau + 1)) \\ &= \tau^3(p(G_1; \tau + 1) + p(G_2; \tau + 1)). \end{aligned} \quad (*)$$

Weiter haben wir nach (iv)

$$p(G_2/f; \tau + 1) - p(G_1/e; \tau + 1) = p(G_1; \tau + 1) - p(G_2; \tau + 1). \quad (**)$$

Multiplizieren wir (\*) und (\*\*), so erhalten wir schließlich

$$p^2(G_2/f; \tau + 1) - p^2(G_1/e; \tau + 1) = \tau^3(p^2(G_1; \tau + 1) - p^2(G_2; \tau + 1)).$$

Verwenden wir nun die Identitäten für die Graphen  $G_1/e$ ,  $G_2/f$  und  $G_2$ , so resultiert

daraus unter Beachtung von (iv)

$$\begin{aligned}
 p(G_1; \tau + 2) &= p(G_2; \tau + 2) + p(G_2/f; \tau + 2) - p(G_1/e; \tau + 2) \\
 &= (\tau + 2)\tau^{3p-10} [p^2(G_2; \tau + 1) + \tau^{-3}(p^2(G_2/f; \tau + 1) - p^2(G_1/e; \tau + 1))] \\
 &= (\tau + 2)\tau^{3p-10} [p^2(G_2; \tau + 1) + p^2(G_1; \tau + 1) - p^2(G_2; \tau + 1)] \\
 &= (\tau + 2)\tau^{3p-10} p^2(G_1; \tau + 1),
 \end{aligned}$$

also ist die Identität doch für  $G_1$  erfüllt.

Nun ist der Beweis rasch beendet. Wir haben eben nachgewiesen, dass, falls ein Land  $F$  die Ecke  $u$  als Randpunkt hat, auch alle zu  $F$  benachbarten Länder  $u$  als Randpunkt haben müssen. Das heißt aber,  $u$  ist Randpunkt aller Länder. Insbesondere folgt daraus, dass  $G_1 \setminus u$  keinen Kreis enthält und dass  $u$  zu allen anderen Ecken benachbart ist ( $G_1$  ist Triangulierung!). Da eine Triangulierung klarerweise 2-fach zusammenhängend ist, muss also  $G_1 \setminus u$  zusammenhängend, d.h. ein Baum sein. Wenn wir  $G_1$  mit  $\lambda$  Farben färben wollen, so können wir  $u$  eine der  $\lambda$  Farben geben und den Rest  $G_1 \setminus u$  beliebig mit  $\lambda - 1$  Farben färben. Mit 5.15 erhalten wir somit  $p(G_1; \lambda) = \lambda p(G_1 \setminus u; \lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^{p-2}$ , und daraus wegen  $\tau^2 = \tau + 1$

$$p(G_1; \tau + 2) = (\tau + 2)(\tau + 1)\tau^{p-2} = (\tau + 2)\tau^p.$$

Andererseits ist wegen (i) und (ii) ebenfalls

$$\begin{aligned}
 (\tau + 2)\tau^{3p-10} p^2(G_1; \tau + 1) &= (\tau + 2)\tau^{3p-10} (\tau + 1)^2 \tau^2 (\tau - 1)^{2(p-2)} \\
 &= (\tau + 2)\tau^{3p-10} \tau^4 \tau^2 \tau^{-2(p-2)} = (\tau + 2)\tau^p.
 \end{aligned}$$

$G_1$  war also doch kein Gegenbeispiel, und der Beweis ist vollständig.  $\square$

**Folgerung 5.24.** Für jede Triangulierung  $G$  der Ebene gilt  $p(G; \tau + 2) > 0$ .

Der numerische Wert von  $\tau + 2$  ist  $\tau + 2 = 3,618033 \dots$  Unserem Ziel, dem Nachweis  $p(G; 4) > 0$  für alle Triangulierungen, sind wir mit 5.24 schon etwas näher gekommen. Sind die Zahlen  $\tau + 1$  und  $\tau + 2$  Einzelfälle, für die wir das Nichtverschwinden von  $p(G; \lambda)$  nachweisen können? Vielleicht. Es ist aber genau so gut möglich, dass es eine ausgezeichnete Folge von Zahlen  $b_n$  gibt, die nach 4 konvergiert und für die das Verhalten von  $p(G; b_n)$  Aufschluss über  $p(G; 4)$  geben könnte. Beraha hat 1974 eine solche Folge vorgeschlagen:  $b_n = 2 + 2 \cos \frac{2\pi}{n}$ . Die ersten Werte sind  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 1$ ,  $b_4 = 2$ . Unsere Zahlen  $\tau + 1$  und  $\tau + 2$  tauchen ebenfalls auf,  $\tau + 1 = b_5$ ,  $\tau + 2 = b_{10}$ , und klarerweise konvergiert  $b_n$  gegen 4. Ob die Zahlen  $b_n$  nun tatsächlich an die Wurzel des 4-Farben Problems rühren (und weitere Arbeiten von Tutte deuten darauf hin, dass sie dies tun) oder nicht, so scheint jedenfalls klar, dass das Potential der quantitativen Methode noch lange nicht ausgeschöpft ist.

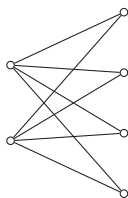
## Übungen zu Kapitel 5

- 1.\* Sei  $G$  ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken und  $\overline{G}$  das Komplement. Zeige:
  - a.  $2\sqrt{p} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq p + 1$ ,
  - b.  $p \leq \chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ .
 Gib Beispiele, für die Gleichheit gilt.
2. Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten. Zeige:
  - a.  $q \geq \binom{\chi(G)}{2}$ ,
  - b.  $\frac{p^2}{p^2-2q} \leq \chi(G) \leq 1 + \sqrt{\frac{2q(p-1)}{p}}$ .
 Gib Beispiele für Gleichheit.
3. Seien  $n, k$  natürliche Zahlen mit  $2k \leq n$ . Der Kneser Graph  $K(n, k)$  ist folgendermaßen definiert: Die Ecken sind alle  $k$ -Untermengen einer  $n$ -Menge und zwei solche  $k$ -Mengen sind genau dann verbunden, wenn sie disjunkt sind. Zeige:  $\chi(K(n, k)) \leq n - 2k + 2$ . Wie sieht  $K(5, 2)$  aus?
4. Für welche Graphen  $G$  ist der Kantengraph  $L(G) \cong G$ ?
- 5.\* Etwas schwieriger. Zeige:  $G$  ist  $n$ -färbbar genau dann, wenn die Kanten so orientiert werden können, dass auf jedem Polygon  $C$  mindestens  $\frac{\ell(C)}{n}$  orientierte Kanten in jeder der beiden Richtungen existieren ( $\ell(C)$  = Länge von  $C$ ).
6. Verifiziere die vorhergehende Übung anhand der Räder  $W_n$  und des Petersen Graphen.
- 7.\* Gegeben der Graph  $G$ . Ordne die Ecken solcherart, dass der Algorithmus  $\mathcal{A}$  (siehe den Beweis von 5.4) genau  $\chi(G)$  Farben benötigt.
8. Bestimme die chromatische Zahl der Würfel  $Q_n$ .
9. Ein Graph  $G$  heißt eindeutig  $n$ -färbbar, falls  $\chi(G) = n$  ist und jede  $n$ -Färbung dieselbe Partition der Eckenmenge ergibt. Bestimme die kleinsten eindeutig 3-färbbaren Graphen verschieden von  $K_3$ .
- 10.\* Beweise: Kein ebener Graph ist eindeutig 5-färbbar.
11. Sei  $G$  ein  $k$ -regulärer Graph. Zeige, dass für den chromatischen Index  $\chi'(G) = k + 1$  gilt, falls  $G$  eine Schmitzdecke hat.
12. Zeige:  $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$ .
- 13.\* Der Graph  $G_4$  aus Figur 5.10 hat  $\omega(G_4) = 2$  und  $\chi(G_4) = 4$ . Zeige, dass  $G_4$  der kleinste derartige Graph ist.
14. Zeige: Für einen bipartiten Graphen  $G$  gilt stets  $\omega(\overline{G}) = \chi(\overline{G})$ .
15. Sei  $G$  ein kritischer Graph und  $A \subseteq V$  eine unabhängige Menge von Ecken. Zeige  $\chi(G \setminus A) = \chi(G) - 1$ .
16. Die totale chromatische Zahl  $\chi_t(G)$  ist die Minimalzahl von Farben, die nötig sind, um Ecken *und* Kanten zu färben, so dass benachbarte Ecken, inzidente Kanten und inzidente Ecken-Kanten verschiedene Farben erhalten. Schätze  $\chi_t(K_p)$  und  $\chi_t(K_{m,n})$  ab.
- 17.\* Sei  $\chi_2(\mathcal{L})$  die chromatische Zahl einer Erde-Mond Landkarte (siehe Übung 7 in Kap. 2). Zeige  $\chi_2(\mathcal{L}) \leq 12$  für alle  $\mathcal{L}$ .
18. Bestimme alle Graphen, für die in 5.19 für alle  $i$  Gleichheit in der unteren Schranke gilt.
19. Vervollständige den Beweis von 5.21(iii).
- 20.\* Etwas schwieriger. Zeige, dass das chromatische Polynom einer Triangulierung keine Nullstelle zwischen 1 und 2 besitzt.

## 6 Faktorisierung

Rufen wir uns die Definition eines  $r$ -Faktors eines Graphen  $G = (V, E)$  in Erinnerung. Ein  $r$ -Faktor von  $G$  ist ein  $r$ -regulärer Untergraph  $H = (V, E')$ , d. h. jede Ecke hat in  $H$  den Grad  $r$ . Ausgangspunkt des Interesses an Faktorisierungen war Tait's Satz 1.7, der in der Terminologie der Faktorisierungen lautet: Die 4-Farben Vermutung ist genau dann richtig, wenn das Gerüst jeder kubischen brückenlosen Landkarte  $\mathcal{L}$  in drei disjunkte 1-Faktoren zerfällt. Petersens Resultat 3.6 hat zumindest die Existenz *eines* 1-Faktors in jedem 3-regulären brückenlosen Graphen (eben oder nicht) nachgewiesen. Wir legen uns nun die allgemeine Frage vor: *Welche Graphen besitzen einen 1-Faktor?*

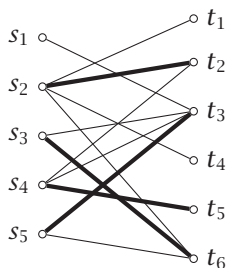
Als triviale Bedingung haben wir, dass der Graph eine gerade Anzahl von Ecken aufweisen muss. Für die vollständigen Graphen  $K_p$  haben wir schon erkannt, dass dies auch hinreicht (in diesem Fall liegt dann sogar eine 1-Faktorisierung vor), im Allgemeinen genügt dies aber nicht. Beispielsweise hat der vollständige bipartite Graph  $K_{2,4}$  6 Ecken, besitzt aber natürlich keinen 1-Faktor. (Figur 6.1)



Figur 6.1

Eine Vorbemerkung: Da Schlingen in 1-Faktoren nicht auftreten und von Mehrfachkanten immer nur höchstens eine, so können wir uns bei der Frage nach der Existenz eines 1-Faktors auf *einfache* Graphen beschränken und werden dies auch tun, ohne es noch eigens zu betonen.

Die erste Klasse von Graphen, für die das Problem der Existenz von 1-Faktoren studiert und vollkommen gelöst wurde, waren die bipartiten Graphen. Um 1910 war es der ungarische Mathematiker König, der diesen Begriff aufgriff und ihn in das Gebiet der Graphentheorie einführte, welches er mit seinem Buch 1936 ja entscheidend prägte. Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph mit definierenden Eckenmengen  $S$  und  $T$ , wobei  $|S| = m \leq n = |T|$  sei. Jede Kante hat also eine Ecke in  $S$  und die andere in  $T$ . Evident kann  $G$  nur dann einen 1-Faktor besitzen, wenn  $m = n$  ist. Wir wollen nun die allgemeine Frage aufgreifen, wie viele Kanten maximal existieren, von denen keine zwei eine gemeinsame Ecke haben. Für solche Kantenmengen (und zwar in beliebigen Graphen) verwendet man heute das englische Wort *Matching* (zu Deutsch etwa Korrespondenz). Ein Matching ist also eine Kantenmenge  $M \subseteq E$ , so dass in dem Untergraphen  $H = (V, M)$  jede Ecke Grad 1 oder 0 hat. Wir fragen somit nach der *Matching-Zahl*  $m(G) = \max_M |M|$ , wobei  $M$  alle Matchings durchläuft.



Figur 6.2

Figur 6.2 zeigt einen bipartiten Graphen  $G$ , in dem die 4 fett gedruckten Kanten ein Matching sind. Die Leser können sich mühelos überzeugen, dass ein Matching mit 5 Kanten nicht existiert, so dass demnach  $m(G) = 4$  ist.

Das Wort Matching rührt von einer amüsanten Interpretation unseres Problems her. To match bedeutet im Englischen bekanntlich zusammenpassen. Sei  $S$  eine Menge von Damen und  $T$  eine Menge von Herren. Wir verbinden Dame  $s_i$  und Herrn  $t_j$  durch eine Kante, wenn die beiden eine Heirat nicht abgeneigt sind. Wie viele Hochzeiten können dann stattfinden (ohne Bigamie zu treiben)? Dies ist genau unsere Matching Zahl  $m(G)$ . König hat 1931 die Zahl  $m(G)$  durch einen anderen Graphenparameter ausgedrückt. Seine Arbeit wurde zunächst als unwichtiger Beitrag eingeschätzt (es entwickelte sich sogar eine merkwürdig gereizte Kontroverse zwischen ihm und dem berühmten Algebraiker Frobenius), doch bald wurde die Bedeutung des Satzes erkannt und heute erscheint er als eines der fundamentalen Ergebnisse der gesamten Kombinatorik, welches das Tor zu einem der fruchtbarsten Gebiete, der *Transversaltheorie*, geöffnet hat.

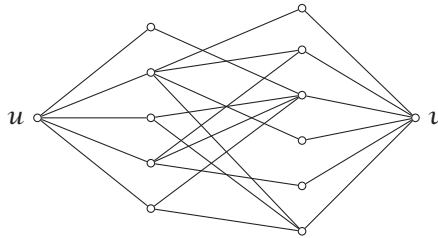
Wir benötigen noch eine Definition. Eine Teilmenge  $D$  von Ecken in einem beliebigen Graphen  $G$  heißt ein *Träger*, wenn jede Kante mindestens eine Ecke in  $D$  hat. Ist  $M$  ein Matching, so muss jeder Träger mindestens eine Ecke jeder Kante aus  $M$  enthalten, und da diese Ecken alle verschieden sind, schließen wir  $|M| \leq |D|$  für jedes Matching  $M$  und jeden Träger  $D$ . Anders formuliert heißt dies, dass  $\max |M| \leq \min |D|$  gelten muss, und zwar in jedem beliebigen Graphen  $G$ . Im Allgemeinen wird diese Ungleichung strikt sein. Zum Beispiel gilt im Kreis  $C_5$  der Länge 5, dass  $\max |M| = 2 < 3 = \min |D|$  ist. Doch für bipartite Graphen haben wir stets Gleichheit, und dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 6.1** (König). *Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph, dann gilt  $\max |M| = \min |D|$ , wobei  $M$  alle Matchings und  $D$  alle Träger durchläuft.*

**1. Beweis.** Wir verwenden den Satz von Menger 4.4, der 1927 bewiesen, zeitlich vor Satz 6.1 bekannt war, wenn auch der Königsche Satz nicht auf diese Weise bewiesen wurde. Wir fügen zu  $G$  zwei neue Ecken  $u$  und  $v$  hinzu und verbinden  $u$  mit allen Ecken von  $S$  und  $v$  mit allen Ecken von  $T$ . Der neue Graph heiße  $\tilde{G}$ . Figur 6.3 zeigt den Graphen  $\tilde{G}$  korrespondierend zum Graphen  $G$  aus Figur 6.2.

Welche Eckenmengen trennen  $u$  von  $v$  in  $\tilde{G}$ ? Offensichtlich muss jede Kante in  $G$  zerstört werden, d.h. jede trennende Eckenmenge muss mindestens eine Ecke

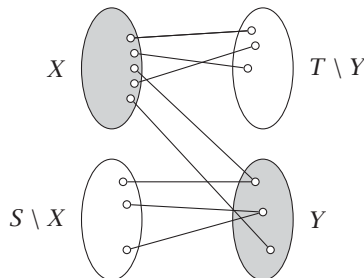




Figur 6.3

jeder Kante aus  $G$  enthalten. Dies sind aber genau die Träger von  $G$ , und wir schließen  $\kappa_{\tilde{G}}(u, v) = \min |D|$ . Ebenso klar ist aber auch, dass disjunkte Wege von  $u$  nach  $v$  in  $\tilde{G}$  genau einem Matching in  $G$  entsprechen, so dass  $\mu_{\tilde{G}}(u, v) = \max |M|$  gilt. Die Gleichung  $\kappa_{\tilde{G}}(u, v) = \mu_{\tilde{G}}(u, v)$  in 4.4 impliziert daher die gewünschte Beziehung  $\max |M| = \min |D|$ .

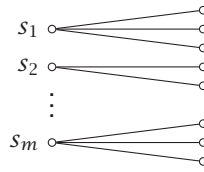
**2. Beweis.** Wir geben noch einen Beweis, der genauer auf die bipartite Struktur des Graphen eingeht. Wir schreiben zur Abkürzung  $m(G) = \max |M|$ ,  $d(G) = \min |D|$ . Da  $m(G) \leq d(G)$ , wie wir gesehen haben, stets gilt, müssen wir nur  $d(G) \leq m(G)$  nachweisen und dies machen wir mit Induktion nach der Kantenzahl. Hat  $G$  überhaupt keine Kanten, so gilt trivialerweise  $m(G) = d(G) = 0$ . Sei nun  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph mit  $q \geq 1$  Kanten und  $|S| \leq |T|$ . Da isolierte Ecken weder in Matchings noch in Trägern eine Rolle spielen, können wir annehmen, dass keine vorkommen. Jeder Träger  $D$  ist von der Gestalt  $D = X \cup Y$  mit  $X \subseteq S$  und  $Y \subseteq T$ . Angenommen  $G$  besitzt einen minimalen Träger  $D = X \cup Y$  mit  $X \neq \emptyset$ ,  $Y \neq \emptyset$ . Dann haben die beiden induzierten Untergraphen  $H_X$  auf den Eckenmengen  $X \cup (T \setminus Y)$  und  $H_Y$  auf  $(S \setminus X) \cup Y$  weniger Kanten als  $G$  und zwischen  $S \setminus X$  und  $T \setminus Y$  verlaufen keine Kanten. (Figur 6.4)



Figur 6.4

Für  $H_X$  muss  $d(H_X) = |X|$  gelten, da jeder Träger von  $H_X$  zusammen mit  $Y$  einen Träger von  $G$  ergibt, und analog gilt  $d(H_Y) = |Y|$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert in  $H_X$  ein Matching  $M_X$  mit  $|M_X| = |X|$  und in  $H_Y$  ein Matching  $M_Y$  mit  $|M_Y| = |Y|$ .  $M = M_X \cup M_Y$  ist aber ersichtlich ein Matching in  $G$  mit  $|M| = |X| + |Y| = d(G)$ , und wir sind fertig.

Es bleibt der Fall, dass die einzigen minimalen Träger  $S$  und eventuell  $T$  sind (falls  $|T| = |S|$  ist). Hat jede Ecke in  $T$  Grad 1, so sind wir wieder fertig, da dann offensichtlich  $m(G) = |S| = d(G)$  ist. (Figur 6.5)



Figur 6.5

Wir können also annehmen, dass Ecken  $u, v \in S$  und  $w \in T$  existieren mit  $uw, vw \in E$ . Für den Graphen  $G_1 = G \setminus uw$  haben wir nach Induktionsvoraussetzung  $m(G_1) = d(G_1)$ . Da ersichtlich  $m(G_1) \leq m(G)$  und  $d(G_1) \leq d(G)$  gilt, können wir  $d(G_1) < d(G) = |S|$  voraussetzen. Sei  $D_1 = X_1 \cup Y_1$  ein minimaler Träger von  $G_1$ . Da  $D_1$  kein Träger von  $G$  ist, schließen wir  $u \in S \setminus X_1$ ,  $w \in T \setminus Y_1$  und ferner  $v \in X_1$  (da ansonsten die Kante  $vw$  in  $D_1$  nicht erfasst wäre), und somit  $X_1 \neq \emptyset$ . Wegen  $d(G_1) = |X_1| + |Y_1| < |S| = d(G)$  haben wir  $|Y_1| < |S \setminus X_1|$ . Für den Träger  $D = X_1 \cup (Y_1 \cup \{w\})$  von  $G$  gilt nun  $|D| = |X_1| + |Y_1| + 1 \leq |X_1| + |S \setminus X_1| = |S|$ , also ist  $D$  minimal und wegen  $X_1 \neq \emptyset$ ,  $Y_1 \cup \{w\} \neq \emptyset$  sind wir wieder beim vorigen Fall.  $\square$

Sehen wir uns die minimalen Träger näher an. Für  $A \subseteq S$  sei  $R(A)$  jene Teilmenge von Ecken aus  $T$ , welche mit mindestens einer Ecke aus  $A$  verbunden sind. Enthält der minimale Träger  $D$  aus  $S$  genau die Ecken  $S \setminus A$ , so muss er zumindest auch die Ecken aus  $R(A)$  enthalten. Da aber jede Menge  $(S \setminus A) \cup R(A)$  ein Träger ist (es verlaufen ja keine Kanten zwischen  $A$  und  $T \setminus R(A)$ ), so erkennen wir, dass jeder minimale Träger von der Gestalt  $D = (S \setminus A) \cup R(A)$  ist, und erhalten somit die folgende, von Ore stammende, Version des Königschen Satzes.

**Satz 6.2.** Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph, dann gilt für die Matching-Zahl  $m(G) = |S| - \max_{A \subseteq S} \delta(A)$  mit  $\delta(A) := |A| - |R(A)|$ . Die Zahl  $\delta(A)$  heißt der Defekt der Menge  $A$ .

*Beweis.* Nach unserer eben gemachten Überlegung haben wir  $m(G) = \min |D| = \min_{A \subseteq S} (|S \setminus A| + |R(A)|) = \min_{A \subseteq S} (|S| - |A| + |R(A)|) = |S| - \max_{A \subseteq S} (|A| - |R(A)|)$ .  $\square$

Die Formulierung 6.2 nimmt auf die Menge  $S$  und ihre Untermengen Bezug. Genauso gut können aber natürlich auch  $T$  und die Defekte  $\delta(B)$ ,  $B \subseteq T$ , verwendet werden, so dass  $m(G) = |T| - \max_{B \subseteq T} \delta(B)$  resultiert. Diese „Dualität“ wird im Folgenden nützlich sein.



**Dénes König** wurde 1884 in Budapest geboren. Sohn eines sehr bekannten Mathematikers, veröffentlichte er bereits als Schüler seine erste mathematische Arbeit. Nach Studium in Budapest und Göttingen lehrte und forschte er von 1907 bis zu seinem Tod an der Technischen Universität in Budapest. Er war ein herausragender Lehrer und kann als Gründer der außergewöhnlich erfolgreichen ungarischen Schule der Graphentheorie angesehen werden. Sein Buch über Graphentheorie 1936, das dieses Gebiet als eigenständige Disziplin etablierte, und seine Vorlesungen und seine Tätigkeit bei Schulwettbewerben hatten einen großen Einfluss auf die Entwicklung der ungarischen Mathematik. Nach der Machtübernahme der Nazi-Partei in Ungarn schied er 1944 aus dem Leben.

Ist  $\delta(A) > 0$ , d.h.  $|A| > |R(A)|$ , so kann kein Matching alle Ecken aus  $A$  enthalten, genauer: ein Matching kann aus  $A$  höchstens  $|A| - \delta(A)$  Ecken enthalten, daher der Name Defekt. Aus 6.2 können wir unmittelbar den berühmten Satz von Hall (1935) ablesen, der der eigentliche Ausgangspunkt für die Transversaltheorie war, die wir im Folgenden kurz skizzieren wollen.

**Satz 6.3** (Hall). *Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph, dann ist  $m(G) = |S|$  genau dann, wenn  $|A| \leq |R(A)|$  für alle  $A \subseteq S$  gilt.*

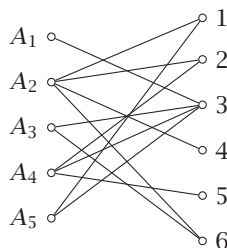
Der Satz 6.3 wird in der Literatur oft als „Heiratssatz“ geführt, da er, in unserer eingangs gegebenen Interpretation, die genauen Bedingungen angibt, wann *alle* Damen verheiratet werden können. 6.3 besagt, dass dies genau dann möglich ist, wenn es zu je  $k$  Damen immer mindestens  $k$  Herren gibt, denen sie Heiratswünsche entgegenbringen. Dass diese Bedingung notwendig ist, ist selbstverständlich – das Gewicht des Satzes beruht also auf der Umkehrung, dass dies auch hinreicht. Ganz allgemein ist es ein Charakteristikum der Maximum-Minimum Sätze, dass eine Richtung, nämlich  $\max \leq \min$  trivial ist, und die Bedeutung in dem Nachweis der anderen Ungleichung liegt.

Als Folgerung können wir nun die Lösung des 1-Faktor Problems für bipartite Graphen notieren.

**Folgerung 6.4.** *Ein bipartiter Graph  $G = (S \cup T, E)$  besitzt genau dann einen 1-Faktor, wenn  $|S| = |T|$  ist und  $|A| \leq |R(A)|$  für alle  $A \subseteq S$  gilt.*

Was ist nun die schon mehrfach erwähnte Transversaltheorie? Sie basiert auf einer Interpretation bipartiter Graphen als Mengensystem. Ist auf einer Grundmenge  $N = \{t_1, \dots, t_n\}$  eine Familie  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  von Teilmengen  $A_i \subseteq N$  gegeben (die nicht verschieden zu sein brauchen), so nennen wir  $(N; \mathcal{A})$  bzw.  $(N; A_1, \dots, A_m)$  ein *Mengensystem*. Der Mengensystem  $(N; \mathcal{A})$  ordnen wir auf naheliegende Weise einen bipartiten Graphen  $G$  zu. Die Eckenmengen sind  $\mathcal{A}$  und  $N$  und wir verbinden  $A_i$  mit  $t_j$ , falls  $t_j \in A_i$  ist.

**Beispiel.**  $N = \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $A_1 = \{3\}$ ,  $A_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ ,  $A_3 = \{3, 6\}$ ,  $A_4 = \{2, 3, 5\}$ ,  $A_5 = \{1, 3\}$ . Der zugehörige bipartite Graph ist in Figur 6.6 abgebildet.



Figur 6.6

Es leuchtet unmittelbar ein, dass diese Konstruktion auch umgekehrt werden kann, indem wir in einem bipartiten Graphen  $G = (S \cup T, E)$   $T$  als Grundmenge nehmen und

$s_i \in S$  mit der Menge  $A_i = R(s_i)$  identifizieren. Bipartite Graphen und Inzidenzstrukturen von Mengensystemen sind somit kombinatorisch äquivalent. Dies ist noch nicht weiter bemerkenswert, was die Sache aber interessant macht, ist die Tatsache, dass wir nun mengentheoretische Probleme durch Graphenbegriffe studieren können, und umgekehrt.

Sei das Mengensystem  $(N, \mathcal{A})$  und der zugeordnete bipartite Graph  $G$  gegeben. Einem Matching in  $G$  entspricht eine Menge von Paaren  $(A_{i_1}, t_{i_1}), \dots, (A_{i_\ell}, t_{i_\ell})$ , wobei alle Indizes  $i_j$  und alle Elemente  $t_{i_j}$  verschieden sind, und  $t_{i_j} \in A_{i_j}$  für alle  $j$  gilt. Wir sagen dann, die Teilfamilie  $\mathcal{A}' = (A_{i_j} : j = 1, \dots, \ell)$  besitzt ein *System verschiedener Repräsentanten* oder eine *Transversale*  $\{t_{i_1}, \dots, t_{i_\ell}\}$ . Für  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  sei  $A_I = (A_i : i \in I)$ , dann gilt ersichtlich  $R(A_I) = \bigcup_{i \in I} A_i$ , und dies führt ohne Umwege zum fundamentalen Satz der Transversaltheorie.

**Satz 6.5 (Hall).** *Sei  $(N; A_1, \dots, A_m)$  ein Mengensystem.  $(A_1, \dots, A_m)$  besitzt genau dann eine Transversale, wenn  $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$  für alle  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  gilt. In Worten: Genau dann besitzt  $\mathcal{A}$  eine Transversale, wenn je  $k$  Mengen aus  $\mathcal{A}$  zusammen mindestens  $k$  Elemente enthalten.*

Die Leser werden nun mühelos aus 6.2 die allgemeine Formel für die Mächtigkeit  $m(N; \mathcal{A})$  einer größten Transversale ableiten können. Auch die duale Form ist interessant. Für  $B \subseteq N$  ist  $R(B) = \{A_i : A_i \cap B \neq \emptyset\}$ , woraus eine weitere Formel für  $m(N; \mathcal{A})$  resultiert.

Wie gesagt, 6.3 war der Ausgangspunkt für eine unübersehbare Fülle von Resultaten und Variationen über das Thema: Transversalen von Mengensystemen. Wir wollen hier nur kurz zwei Aspekte beleuchten, die mit unserem eigentlichen Gebiet, der Graphentheorie, zusammenhängen.

Kehren wir nochmals zu unserem Heiratsproblem zurück. Angenommen, jede der Damen  $s_i$  kann sich eine Ehe mit genau  $k$  Herren vorstellen ( $k \geq 1$ ) und dasselbe gilt für jeden Herrn  $t_j$ . Die Anzahl der Kanten in unserem Heiratsgraphen  $G = (S \cup T, E)$  ist dann  $k|S| = k|T|$ , also haben wir  $|S| = |T|$ . Sei  $A \subseteq S$ . Zwischen  $A$  und  $R(A)$  verlaufen  $k|A|$  Kanten, und da andererseits von  $R(A)$  genau  $k|R(A)|$  Kanten ausgehen, schließen wir  $k|A| \leq k|R(A)|$  und somit  $|A| \leq |R(A)|$ . Falls Bedingung 6.3 ist somit für jedes  $A$  erfüllt - d. h. alle Damen und Herren können verheiratet werden. In mehr prosaischer Sprechweise besagt unser Resultat: Jeder  $k$ -reguläre bipartite Graph ( $k \geq 1$ ) besitzt einen 1-Faktor. Wir können aber noch mehr aussagen. Entfernen wir nämlich die Kanten eines 1-Faktors, so resultiert ein  $(k-1)$ -regulärer Graph, auf den wir denselben Schluss anwenden können. Fahren wir solcherart fort, so erhalten wir:

**Satz 6.6.** *Jeder  $k$ -reguläre bipartite Graph ( $k \geq 1$ ) ist 1-faktorierbar.*

Wir haben uns schon früher überlegt, dass die 1-Faktorisierungen  $k$ -regulärer Graphen genau den verschiedenen Kantenfärbungen mit  $k$  Farben entsprechen. Mit Hilfe des Hall'schen Satzes können wir nun leicht eine Aussage über die *Anzahl* dieser Kantenfärbungen machen. Zur Abkürzung setzen wir  $\mathcal{G}(n, k)$  für die Klasse der  $k$ -regulären bipartiten Graphen  $G = (S \cup T, E)$  mit  $|S| = |T| = n$ .

**Satz 6.7.** *Es sei  $G \in \mathcal{G}(n, k)$ . Dann hat  $G$  mindestens  $k!$  verschiedene 1-Faktoren und mindestens  $k!(k-1)! \cdots 2!1!$  verschiedene Kantenfärbungen mit  $k$  Farben. Umgekehrt ist die Anzahl dieser Kantenfärbungen nach oben durch  $k!^n$  beschränkt.*

*Beweis.* Wir beweisen die erste Aussage allgemeiner für alle bipartiten Graphen  $G = (S \cup T, E)$ ,  $|S| = |T| = n$ , welche einen 1-Faktor besitzen, und in denen der Eckengrad  $d(u) \geq k$  für alle  $u \in S$  ist. Wir führen Induktion nach  $n$ . Für  $n = k$  erhalten wir den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{k,k}$ . Nummerieren wir die Eckenmengen  $S$  und  $T$  jeweils mit  $1, 2, \dots, k$ , so ist klar, dass die 1-Faktoren genau den Permutationen von  $\{1, 2, \dots, k\}$  entsprechen, von denen es  $k!$  gibt. Sei nun  $n > k$ . Wir wollen  $A \subseteq S$  eine *kritische* Menge nennen, falls  $|A| = |R(A)|$  ist.  $\emptyset$  und  $S$  sind natürlich immer kritisch.

**Fall a.**  $S$  und  $\emptyset$  sind die einzigen kritischen Mengen.

Sei  $uv$  eine beliebige Kante und  $G'$  der auf  $(S \setminus u) \cup (T \setminus v)$  induzierte Untergraph. Wegen  $|A| < |R(A)|$  für  $A \neq \emptyset, \neq S$  gilt in  $G'$  stets  $|A| \leq |R'(A)|$ .  $G'$  erfüllt somit die Hallsche Bedingung und besitzt nach Induktionsvoraussetzung mindestens  $(k-1)!$  1-Faktoren. Jede der Kanten  $uv_1, \dots, uv_d$ ,  $d = d(u)$ , ist also in  $(k-1)!$  verschiedenen 1-Faktoren enthalten, so dass wir wegen  $d(u) \geq k$  insgesamt mindestens  $k!$  1-Faktoren erhalten.

**Fall b.**  $A \neq \emptyset, \neq S$  ist eine kritische Menge.

Jeder 1-Faktor von  $G$  muss dann genau die Ecken von  $A$  mit denen von  $R(A)$  verbinden, und somit die Ecken von  $S \setminus A$  genau mit denen von  $T \setminus R(A)$ .  $E_A$  seien die mit  $A$  inzidenten Kanten. Nach Induktionsvoraussetzung existieren mindestens  $k!$  1-Faktoren in  $G = (A \cup R(A), E_A)$ , die alle zu 1-Faktoren in  $G$  erweitert werden können.

Die zweite Behauptung ist nun klar. Wir können die erste Farbe (d.h. den ersten 1-Faktor) auf mindestens  $k!$  Arten wählen. Haben wir die erste Farbe fest gewählt (d.h. den 1-Faktor entfernt), so können wir die zweite Farbe auf mindestens  $(k-1)!$  Arten wählen, usf. Die obere Schranke folgt sofort aus der Überlegung, dass die mit einer Ecke  $u \in S$  inzidenten Kanten auf  $k!$  Arten gefärbt werden können und diese Färbungen kombiniert werden.  $\square$

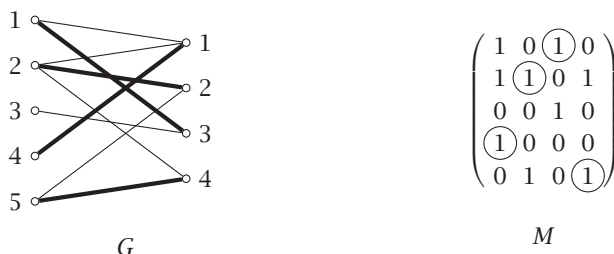
Angewandt auf das Heiratsproblem besagt unser Resultat, dass wir beispielsweise bei jeweils 6 Heiratswünschen bereits  $6! = 720$  verschiedene Massenhochzeiten feiern können, ein beruhigendes Ergebnis.

Zum zweiten Aspekt. Wir können ein Matching als einen Untergraphen von  $G = (S \cup T, E)$  auffassen, in dem alle Ecken  $\text{Grad} \leq 1$  haben. In Verallgemeinerung dazu fragen wir nun, unter welchen Bedingungen ein Untergraph  $H$  mit vorgegebenen Graden existiert. In voller Allgemeinheit ist dazu keine Antwort zu erwarten, doch können wir einen interessanten Spezialfall direkt aus 6.3 ableiten. Nehmen wir an, in unserer Heiratssituation hat jede Frau  $s_i$  vor, genau  $d_i$  Männer zu ehelichen (wobei jeder Mann höchstens einmal erwählt werden darf). Wann ist dies möglich? Die Lösung dieses „Haremsproblems“ formulieren wir wieder in der Graphensprache.

**Satz 6.8.** *Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph. Genau dann existiert ein Untergraph  $H = (S \cup T, E')$ , so dass  $d_H(s_i) = d_i$  für jedes  $i$  ist und  $0 \leq d_H(t_j) \leq 1$  für jedes  $j$ , wenn  $|R(A)| \geq \sum_{s_i \in A} d_i$  für jedes  $A \subseteq S$  gilt.*

*Beweis.* Wir ersetzen jede Ecke  $s_i$  durch  $d_i$  neue Ecken, die wir mit jeder Ecke aus  $R(\{s_i\})$  verbinden. Dann existiert ein gewünschter Untergraph  $H$  genau dann, wenn der neue Graph ein Matching besitzt, das alle neuen Ecken enthält. Das Resultat folgt nun ohne Weiteres aus 6.3.  $\square$

Bipartite Graphen haben neben den Mengensystemen noch eine weitere interessante und nützliche Interpretation. Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein (wie immer einfacher) bipartiter Graph, dann können wir  $G$  in naheliegender Weise eine 0,1-Matrix  $M = (a_{ij})$  zuordnen. Die Zeilen und Spalten von  $M$  korrespondieren zu den Eckenmengen  $S$  und  $T$  und wir setzen  $a_{ij} = 1$  oder 0, je nachdem ob  $s_i$  und  $t_j$  benachbart sind oder nicht. Figur 6.7 zeigt einen Graphen und seine zugehörige Matrix.



Figur 6.7

Offensichtlich ist auch diese Zuordnung eindeutig umkehrbar, so dass wir bipartite Graphen und 0,1-Matrizen identifizieren können, wann immer dies vorteilhaft erscheint. Ein Matching in  $G$  entspricht einer Menge von 1'en in  $M$ , von denen keine zwei in derselben Zeile oder Spalte erscheinen (siehe die fetten Kanten des Graphen in Figur 6.7 und die korrespondierenden 1'en in  $M$ ). Wir nennen solch eine Menge von 1'en eine *Diagonale* in  $M$  und die Anzahl der 1'en die *Länge* der Diagonale. Ein Träger in  $G$  entspricht einer Menge von Zeilen und Spalten, die alle 1'en von  $M$  bedecken. In der Matrix von Figur 6.7 sind dies z.B. die Zeilen 2,5 und die Spalten 1,3. Der Königsche Satz 6.1 lautet in der Matrixformulierung demnach: Die größtmögliche Länge einer Diagonale ist gleich der Minimalzahl von Zeilen und Spalten, die alle 1'en bedecken.

Wir könnten nun alle uns bekannten Matching-Sätze auf Matrizen übertragen und dadurch interessante Matrizergebnisse erzielen. Ungleich wichtiger ist jedoch der umgekehrte Weg: Wir wollen aus algebraischen Tatsachen über Matrizen Schlüsse für bipartite Graphen ziehen, insbesondere über die Anzahl der 1-Faktoren und Kantenfärbungen.

Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph mit  $|S| = |T| = n$ . Die zugehörige Matrix  $M = (a_{ij})$  ist eine quadratische  $n \times n$ -Matrix, deren Zeilen und Spalten wir mit 1 bis  $n$  durchnummerieren. Zu jeder Diagonale  $D$  von  $M$  der Länge  $n$  gibt es ersichtlich eine Permutation  $\sigma$  mit  $D = \{a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}\}$ , wobei alle  $a_{i\sigma(i)} = 1$  sind. Nehmen wir also die Summe über alle Produkte  $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$  ( $\sigma$  durchläuft alle  $n!$  Permutationen), so erhalten wir genau die Anzahl der Diagonalen von  $M$ , da ja nur die Diagonalen einen Beitrag = 1 liefern. Diese Summe ist aber ein wohlbekannter Begriff in der Matrixtheorie, nämlich die *Permanente*  $\text{per}(M)$  einer Matrix. Aus unseren obigen Überlegungen erkennen wir demnach, dass  $\text{per}(M) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$  genau die Anzahl der 1-Faktoren des zugehörigen Graphen ergibt. Halten wir dies fest:

**Lemma 6.9.** *Ist  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph mit  $|S| = |T| = n$ , so ist die Anzahl der 1-Faktoren in  $G$  gegeben durch  $\text{per}(M) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$ , wobei  $M$  die zu  $G$  korrespondierende 0, 1-Matrix ist.*

Schön und gut, bis jetzt haben wir das Problem der Abzählung nur umformuliert; interessant wird dies erst, wenn wir für  $\text{per}(M)$  Formeln oder zumindest Abschätzungen angeben können. Genau dies ist aber der Fall und führt zu zwei weiteren berühmten Vermutungen. Die erste Vermutung, die von Minc 1967 aufgestellt und von Brégman 1976 bewiesen wurde, betrifft eine obere Schranke.

**Satz (Brégman).** *Die 0, 1-Matrix  $M$  habe Zeilensummen  $r_1, \dots, r_n$ . Dann gilt*

$$\text{per}(M) \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i}.$$

Wir sind in erster Linie an speziellen Matrizen interessiert, nämlich den Matrizen der Graphen aus der Klasse  $\mathcal{G}(n, k)$ . Die  $k$ -Regularität dieser Graphen bedeutet, dass in der zugehörigen Matrix alle Zeilen- und Spaltensummen gleich  $k$  sind. Wir wollen für diese Klasse von Matrizen das Symbol  $\mathcal{M}(n, k)$  verwenden. Brégmans Satz ergibt somit für  $M \in \mathcal{M}(n, k)$

$$\text{per}(M) \leq k!^{n/k}.$$

Heben wir  $k$  aus jeder Zeile von  $M$  heraus, so ist  $M = kA$ , wobei  $A$  eine Matrix ist, deren Zeilen- und Spaltensummen alle zu 1 addieren. Ferner gilt klarerweise  $\text{per}(M) = k^n \text{per}(A)$ . Beherrschen wir also die Permanente aller dieser Matrizen  $A$ , dann auch die aller Matrizen aus  $\mathcal{M}(n, k)$ . Die Matrizen  $A$ , auf die wir uns nun konzentrieren wollen, sind Beispiele einer Klasse von Matrizen, die von fundamentaler Bedeutung in Analysis, Informationstheorie und vielen anderen Gebieten sind.

**Definition.** Eine  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  heißt *doppelt-stochastisch*, falls alle Einträge  $a_{ij}$  nichtnegative reelle Zahlen sind und alle Zeilen und Spalten zu 1 addieren.

Sei  $A$  eine beliebige doppelt-stochastische Matrix. Zunächst ist nicht einsichtig, dass  $\text{per} A > 0$  ist, oder was dasselbe ist, dass  $A$  eine Diagonale der Länge  $n$  mit lauter positiven Einträgen besitzt. Dass dies stets der Fall ist, hat König als Anwendung seines Matching Satzes gezeigt.

**Satz 6.10.** *Für jede doppelt-stochastische Matrix  $A$  gilt  $\text{per} A > 0$ .*

*Beweis.* Wir ersetzen jedes  $a_{ij} \neq 0$  in  $A$  durch 1 und lassen die 0'en unverändert. Die neue Matrix  $A'$  hat dann genau dann eine Diagonale der Länge  $n$ , wenn  $\text{per}(A) > 0$  ist. Hätte nun  $A'$  keine solche Diagonale, so gäbe es nach der oben angeführten Matrizenform des Königschen Satzes  $k$  Zeilen und  $\ell$  Spalten in  $A'$  (und damit in  $A$ ) mit  $k + \ell \leq n - 1$ , die alle Elemente  $\neq 0$  bedecken. Da jede Zeile und Spalte in  $A$  zu 1 summiert, folgt daraus  $n = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \leq k + \ell \leq n - 1$ , was absurd ist.  $\square$

Aus analytischen Erwägungen erkennt man, dass für ein festes  $n$  die Funktion  $\text{per}(A)$ , erstreckt über alle doppelt-stochastischen  $n \times n$ -Matrizen ein Minimum besitzt, und

die Intuition führt einen zu der Vermutung, dass dieses Minimum dann erreicht wird, wenn die Einträge  $a_{ij}$  gleichverteilt sind, d.h. wenn  $a_{ij} = \frac{1}{n}$  für alle  $i, j$  ist. Die Matrix  $J_n = (a_{ij} = \frac{1}{n})$  hat  $\text{per}(J_n) = \frac{n!}{n^n}$ , und dies ist der Gegenstand der berühmten Vermutung, die van der Waerden 1926 aufstellte:

**Vermutung** (van der Waerden). Für jede doppelt-stochastische  $n \times n$ -Matrix  $A$  gilt  $\text{per}(A) \geq \frac{n!}{n^n}$ .

Diese Vermutung zog viele Mathematiker in ihren Bann und ihre Entwicklung ist eine weitere spannende mathematische Historie, die 1980 ihren krönenden Abschluss fand, als zwei russische Mathematiker, Egorychev und Falikman, mehr oder minder gleichzeitig, einen Beweis gaben.

Für eine Matrix  $M \in \mathcal{M}(n, k)$  haben wir bereits  $\text{per}(M) = k^n \text{per}(A)$  festgestellt, wobei  $A$  eine doppelt-stochastische Matrix ist. Aus dem Satz von Egorychev und Falikman folgt somit  $\text{per}(M) \geq k^n \frac{n!}{n^n}$  und dies ist natürlich bei festem  $k$  und  $n \rightarrow \infty$  wesentlich besser als unsere in 6.7 gefundene Schranke  $k!$ . Zusammengefasst mit dem Satz von Brégman haben wir:

**Satz 6.11.** Sei  $G \in \mathcal{G}(n, k)$ . Dann gilt für die Anzahl  $m(G)$  der 1-Faktoren

$$k^n \frac{n!}{n^n} \leq m(G) \leq (k!)^{\frac{n}{k}},$$

und für die Zahl  $f(G)$  der Kantenfärbungen mit  $k$  Farben

$$(k!)^n \left(\frac{n!}{n^n}\right)^k \leq f(G) \leq \prod_{i=1}^k (i!)^{\frac{n}{i}}.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall  $n = k$ , d.h.  $G = K_{n,n}$  ist der vollständige bipartite Graph. Wir nehmen als Farbmenge die Zahlen 1 bis  $n$ . Betrachten wir die zu  $K_{n,n}$  gehörende  $n \times n$ -Matrix  $M$  (bestehend aus lauter 1'en), so sehen wir, dass eine  $n$ -Kantenfärbung von  $G$  einer Belegung von  $M$  mit den Zahlen 1 bis  $n$  entspricht dergestalt, dass in jeder Zeile und Spalte alle Zahlen erscheinen, und umgekehrt ergeben diese Belegungen genau die Kantenfärbungen von  $K_{n,n}$  mit  $n$  Farben. Diese Matrizen, deren Untersuchung bis auf Euler zurückgeht, heißen Lateinische Quadrate. Also: Ein *Lateinisches Quadrat* der Ordnung  $n$  ist eine  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_{ij})$ , deren Zeilen und Spalten sämtlich Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  sind. Hier sind zwei Lateinische Quadrate der Ordnung 4 und 6:

				4	1	3	5	2	6
1	2	3	4	3	2	5	6	1	4
2	1	4	3	1	4	2	3	6	5
3	4	1	2	2	6	1	4	5	3
4	3	2	1	6	5	4	2	3	1
				5	6	3	1	4	2

Lateinische Quadrate stehen in engem Zusammenhang mit wichtigen Strukturen wie z.B. endlichen projektiven Ebenen. Sie sind in der Theorie der kombinatorischen Strukturen unentbehrlich. Einen ersten Hinweis auf ihre Bedeutung erhält man, wenn



man sich klar macht, dass die Multiplikationstafel jedes endlichen algebraischen Systems mit den Kürzungsregeln  $ax = ay \Rightarrow x = y$ ,  $xa = ya \Rightarrow x = y$  ein Lateinisches Quadrat ist.

Euler war offenbar der erste, der 1779 die Abzählung dieser „magischen“ Quadrate, wie er sie nannte, diskutierte. Er nannte ein Lateinisches Quadrat *reduziert*, wenn die Zahlen der ersten Zeile und ersten Spalte in der natürlichen Reihenfolge erscheinen. Das erste Quadrat auf S. 108 ist reduziert, das zweite nicht. Setzen wir  $L(n)$  für die Anzahl aller Lateinischen Quadrate und  $R(n)$  für die reduzierten unter ihnen, so ist ersichtlich  $L(n) = n!(n-1)!R(n)$ . Euler fand die Werte  $R(2) = R(3) = 1$ ,  $R(4) = 4$ ,  $R(5) = 56$ , konnte aber  $R(6)$  nicht berechnen. Die korrekte Zahl  $R(6) = 9408$  wurde 1890 von Frolov gefunden, der seinerseits für  $R(7)$  den falschen Wert 221276160 angab. Sade, der die wichtigsten Arbeiten der Anfangszeit über dieses Thema schrieb, gab 1948 den richtigen Wert  $R(7) = 16942080$  an, und heute kennen wir den genauen Wert bis  $n = 11$ . Ganz offensichtlich wachsen die Zahlen  $L(n)$  und  $R(n)$  enorm schnell, so dass wenn überhaupt nur die asymptotische Größenordnung zu erwarten ist.

Zunächst haben wir die triviale obere Schranke  $L(n) \leq n^n$ . Eine untere Schranke wird durch 6.7 geliefert:  $L(n) \geq n!(n-1)! \cdots 2!1!$ , und dabei blieb es - von einigen kleinen Verbesserungen abgesehen - bis zum Beweis der oben zitierten Schranken.

**Satz 6.12.** Für die Anzahl  $L(n)$  der Lateinischen Quadrate gilt

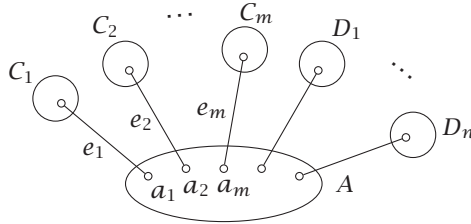
$$\frac{n!^{2n}}{n^{n^2}} \leq L(n) \leq \left[ \prod_{i=1}^n i!^{\frac{1}{i}} \right]^n.$$

Unter Verwendung der Stirlingschen Formel  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$  erkennt man leicht, dass die beiden Schranken asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$  übereinstimmen und das bemerkenswerte Ergebnis  $L(n) \sim \left(\frac{n}{2e}\right)^{n^2}$  liefern.

Nach diesem Exkurs in die Kombinatorik wollen wir uns wieder unserem Hauptthema, der Faktorisierung von Graphen, zuwenden und uns dem allgemeinen Problem stellen: Wann hat ein beliebiger Graph  $G$  einen 1-Faktor? Wir wissen, dass  $G$  eine gerade Anzahl  $p = 2n$  von Ecken enthalten muss. Es ist auch leicht, hinreichende Bedingungen anzugeben. Ein Beispiel ist: Hat der einfache Graph  $G$  eine gerade Anzahl  $p = 2n$  von Ecken und gilt  $d(u) + d(v) \geq p - 1$  für je zwei Ecken aus  $G$ , so besitzt  $G$  einen 1-Faktor. (Beweis?) Die folgende Aussage löst das Problem der Existenz eines 1-Faktors vollständig.

**Satz 6.13** (Tutte). Ein Graph  $G = (V, E)$  besitzt genau dann einen 1-Faktor, wenn  $c_u(G \setminus A) \leq |A|$  für alle  $A \subseteq V$  erfüllt ist, wobei  $c_u(G \setminus A)$  die Anzahl der ungeraden Komponenten (d. h. mit einer ungeraden Eckenzahl) des Teilgraphen  $G \setminus A$  bezeichnet.

*Beweis.* Wiederum ist die Notwendigkeit der Bedingung sofort einzusehen.  $G$  habe nämlich einen 1-Faktor  $M$ . In  $G \setminus A$  seien  $C_1, \dots, C_m$  die ungeraden und  $D_1, \dots, D_n$  die geraden Komponenten. Aus jedem  $C_i$  muss, wegen  $|C_i|$  ungerade, mindestens eine Kante  $e_i \in M$  nach  $A$  herausführen, sagen wir nach  $a_i \in A$ . (Figur 6.8) Da aber alle Ecken  $a_i$  verschieden sein müssen, schließen wir  $|A| \geq m = c_u(G \setminus A)$ .



Figur 6.8

Wir setzen nun umgekehrt die Bedingung des Satzes voraus und beweisen die Existenz eines 1-Faktors durch Induktion nach der Eckenzahl  $p$ . Für  $p = 0$  ist nichts zu zeigen. Sei also  $p \geq 1$ . Sehen wir uns die Bedingung für  $A = \emptyset$  und  $A = \{v\}$  an. Aus  $c_u(G \setminus \emptyset) \leq |\emptyset| = 0$  folgt, dass  $G$  keine ungeraden Komponenten besitzt und dass insbesondere  $p$  gerade ist. Dann hat aber  $G \setminus v$  eine ungerade Anzahl von Ecken, woraus  $1 \leq c_u(G \setminus v) \leq |\{v\}| = 1$  also  $c_u(G \setminus v) = |\{v\}|$  folgt. Es sei  $A_0 \subseteq V$  eine maximal große Menge, welche die Bedingung des Satzes mit Gleichheit  $c_u(G \setminus A_0) = |A_0|$  erfüllt. Da Gleichheit, wie eben gesehen, für alle einelementigen Mengen erfüllt ist, ist jedenfalls  $A_0$  nicht leer. Wie in Figur 6.8 seien  $C_1, \dots, C_m$  die ungeraden und  $D_1, \dots, D_n$  die geraden Komponenten, wobei also  $m = |A_0|$  ist. Aus den folgenden drei Überlegungen wird die Existenz eines 1-Faktors unmittelbar folgen.

a. Jede Komponente  $D_j$  besitzt einen 1-Faktor. Ist nämlich  $S \subseteq V(D_j)$ , so gilt ersichtlich  $c_u(G \setminus (A_0 \cup S)) = c_u(G \setminus A_0) + c_u(D_j \setminus S) \leq |A_0 \cup S| = |A_0| + |S|$  und wegen  $c_u(G \setminus A_0) = |A_0|$  somit  $c_u(D_j \setminus S) \leq |S|$ . Da  $A_0$  nicht leer ist, folgern wir mit Induktion unsere Behauptung.

b. Sei  $v \in C_i$ , dann hat  $C_i \setminus v$  einen 1-Faktor. Nehmen wir an, dies ist falsch, dann existiert nach Induktionsvoraussetzung  $S \subseteq V(C_i) \setminus v$  mit  $c_u(C_i \setminus (v \cup S)) > |S|$ . Da  $C_i \setminus v$  eine gerade Zahl von Ecken enthält, muss  $c_u(C_i \setminus (v \cup S)) - |S|$  ebenfalls gerade sein, also sogar  $c_u(C_i \setminus (v \cup S)) \geq |S| + 2$  gelten. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} |A_0 \cup \{v\} \cup S| &= |A_0| + 1 + |S| \geq c_u(G \setminus (A_0 \cup \{v\} \cup S)) \\ &= c_u(G \setminus A_0) - 1 + c_u(C_i \setminus (v \cup S)) \\ &\geq |A_0| - 1 + |S| + 2 = |A_0| + 1 + |S|. \end{aligned}$$

Somit hätten wir auch Gleichheit für die Menge  $A_0 \cup \{v\} \cup S$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $A_0$ .

c. Es existieren  $m$  Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , wobei  $e_i$  die Komponente  $C_i$  mit  $A_0$  verbindet, deren Endecken in  $A_0$  alle verschieden sind. Diese Behauptung sieht nach einem Matching Problem aus und so wollen wir sie auch beweisen. Wir konstruieren uns einen bipartiten Graphen  $\tilde{G}$  auf den Eckenmengen  $C = \{C_1, \dots, C_m\}$  und  $A_0$ , wobei wir  $C_i$  mit  $a_j \in A_0$  verbinden, falls in  $G$  mindestens eine Kante von  $a_j$  nach  $C_i$  führt. Unsere Behauptung ist dann äquivalent zur Existenz eines Matchings  $\tilde{M}$  in  $\tilde{G}$  mit  $|\tilde{M}| = m$ . Prüfen wir die Hall'sche Bedingung in 6.3 nach. Für  $X \subseteq C$  ist  $B = R(X) \subseteq A_0$  die Menge der mit mindestens einer Komponente aus  $X$  verbundenen Ecken von  $A_0$ .  $G \setminus B$  weist also ebenfalls alle diese Komponenten aus  $X$  auf. Dies bedeutet aber  $|X| \leq c_u(G \setminus B)$ , und somit wegen  $c_u(G \setminus B) \leq |B|$  auch  $|X| \leq |R(X)|$  für alle  $X \subseteq C$ .

Mit Hilfe von (c) konstruieren wir uns nun  $m$  Kanten  $e_i$  von den  $C_i$ 's nach  $A_0$  und vervollständigen dieses Matching zu einem 1-Faktor nach (a) und (b).  $\square$

Der Satz von Tutte gibt eine Bedingung an, wann die Matching-Zahl  $m(G)$  eines Graphen  $G$  auf  $p$  Ecken den maximal möglichen Wert  $\frac{p}{2}$  erreicht. Eine genaue Formel für  $m(G)$  gibt der folgende Satz (der also die Verallgemeinerung von 6.2 darstellt).

**Satz 6.14.** Für die Matching-Zahl  $m(G)$  eines beliebigen Graphen  $G$  gilt  $m(G) = \frac{1}{2}(p - \max_A(c_u(G \setminus A) - |A|))$ .

*Beweis.* Sei  $d = p - 2m(G) \geq 0$ . Wir konstruieren den Graphen  $\tilde{G} = G * K_d$ , d.h. wir fügen zu  $G$  einen vollständigen Graphen  $K_d$  auf  $d$  Ecken hinzu und verbinden alle Ecken aus  $G$  mit allen aus  $K_d$ . Evident hat dann  $\tilde{G}$  einen 1-Faktor, und die Formel folgt nun leicht aus 6.13.  $\square$

Die Sätze von Hall und Tutte gehören ohne Zweifel zu den wichtigsten kombinatorischen Aussagen über Graphen. Aus Tuttés Resultat können wir übrigens sofort den Satz von Petersen 3.6 herleiten, den wir nochmals als Folgerung notieren.

**Folgerung 6.15** (Petersen). *Ein zusammenhängender 3-regulärer brückenloser Graph besitzt stets einen 1-Faktor.*

*Beweis.* Es sei  $G$  brückenlos und 3-regulär,  $A \subseteq V$ , und  $C_1, \dots, C_m$  die ungeraden Komponenten von  $G \setminus A$ . Da  $G$  keine Brücken enthält, führen mindestens 2 Kanten von jedem  $C_i$  nach  $A$ . Es können aber nicht genau 2 sein, da ansonsten die Summe der Eckengrade in  $C_i$   $3|V(C_i)| - 2$ , also ungerade wäre, im Widerspruch zu 1.2. Von den  $C_i$ 's führen also insgesamt mindestens  $3c_u(G \setminus A)$  Kanten nach  $A$ . Andererseits ist diese Anzahl wegen der 3-Regularität höchstens  $3|A|$ , woraus  $3c_u(G \setminus A) \leq 3|A|$ , also  $c_u(G \setminus A) \leq |A|$  folgt.  $\square$

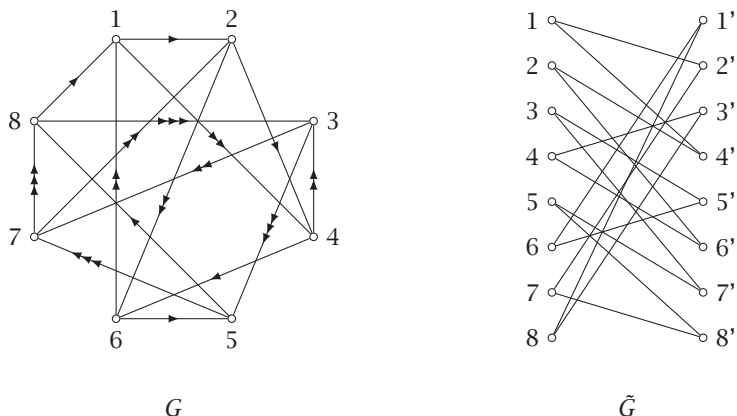
Das Problem der Existenz eines 1-Faktors ist somit vollständig gelöst. Viel schwieriger ist die Frage, wann ein regulärer Graph 1-faktorierbar ist. (Was kein Wunder ist, da nach unseren Überlegungen über die Kantenfärbung ja das 4-Farben Problem dadurch entschieden wäre!) Hier sind abgesehen von der Graphenklasse  $K_p$  (die wir schon in Kapitel 3 besprochen haben) und den bipartiten Graphen nur Teilresultate bekannt.

Wie sieht es mit 2-Faktoren aus? Die Existenz eines 2-Faktors wird weiter unten als Spezialfall des allgemeinen Tuttéschen Satzes 6.17 behandelt; das Problem der 2-Faktorisierung können wir aber auf höchst einfache Weise sofort erledigen. Jeder 2-faktorierbare Graph ist offenbar regulär mit einem geraden Grad - und dies reicht auch schon hin.

**Satz 6.16.** *Jeder  $2d$ -reguläre Graph mit  $d \geq 1$  ist 2-faktorierbar.*

*Beweis.* Für  $d = 1$  besteht der Graph aus disjunkten Kreisen und ist selbst ein 2-Faktor. Sei nun  $d > 1$ , dann genügt es mit Induktion zu zeigen, dass  $G = (V, E)$  einen 2-Faktor besitzt. In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass jeder Graph, dessen Ecken alle einen geraden Grad aufweisen (wir haben solch einen Graphen einen Zyklus genannt),

in kantendisjunkte Kreise zerfällt. Sei also  $E = E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_t$  eine Zerlegung in Kreise. In jedem Kreis orientieren wir die Kanten zyklisch um den Kreis herum. Da jede Ecke eines Kreises genau einmal Anfangsecke und genau einmal Endecke einer orientierten Kante ist, so ist insgesamt jede Ecke genau  $d$ -mal Anfangsecke und  $d$ -mal Endecke. Schreiben wir für die orientierte Kante  $(u, v)$ , so soll  $u$  Anfang und  $v$  Ende der Kante sein.



Figur 6.9

Zu  $G$  assoziieren wir einen bipartiten Graphen  $\tilde{G} = (V \cup V', \tilde{E})$  auf folgende Weise:  $V$  ist die Eckenmenge von  $G$ ,  $V'$  ist eine Kopie davon, deren Ecken wir mit  $u', v', \dots$  bezeichnen. Schließlich sei  $uv' \in \tilde{E}$  genau dann, wenn  $(u, v)$  orientierte Kante von  $G$  ist. Figur 6.9 zeigt einen 4-regulären Graphen  $G$ . Die Kreise der Zerlegung sind durch die gleiche Anzahl der Pfeile gekennzeichnet, und  $\tilde{G}$  ist der zugehörige bipartite Graph.  $\tilde{G}$  ist nach Konstruktion  $d$ -regulär, besitzt also nach 6.6 einen 1-Faktor. Identifizieren wir in diesem 1-Faktor alle Ecken  $v$  und  $v'$  und vergessen die Orientierung, so hat in der so konstruierten Kantenmenge von  $G$  jede Ecke Grad 2, d. h. wir erhalten einen 2-Faktor. In Figur 6.9 ist beispielsweise  $\{12', 24', 35', 46', 57', 61', 78', 83'\}$  ein 1-Faktor von  $\tilde{G}$ , woraus wir den 2-Faktor  $\{(1, 2, 4, 6), (3, 5, 7, 8)\}$  von  $G$  erhalten.  $\square$

Für 3-Faktoren und allgemein  $r$ -Faktoren mit  $r \geq 3$  ist das Problem der  $r$ -Faktorisierung ungleich schwieriger. Wann aber ein  $r$ -Faktor überhaupt existiert, wurde von Tutte vollständig beantwortet, ja er hat sogar das folgende allgemeinere Problem gelöst: Ein  $r$ -Faktor ist, wie wir wissen, nichts anderes als ein  $r$ -regulärer (spannender) Untergraph von  $G$ . Sei nun  $f : V \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine beliebig vorgegebene Funktion. Frage: Wann existiert ein Untergraph  $H$  von  $G$  mit  $d_H(v) = f(v)$  für alle  $v \in V$ ? Solch einen Untergraphen nennen wir einen  $f$ -Faktor. Wir assoziieren zu  $G$  nun einen neuen Graphen  $\tilde{G}$  und zeigen, dass  $G$  genau dann einen  $f$ -Faktor besitzt, wenn  $\tilde{G}$  einen 1-Faktor hat. Zunächst unterteilen wir jede Kante  $e = uv$  durch zwei weitere Ecken  $e', e''$  und erweitern  $f$ , indem wir  $f(e') = f(e'') = 1$  für alle diese neuen Ecken setzen (siehe Figur 6.10). Der so konstruierte Graph sei  $G'$ . Evident hat  $G$  genau dann einen  $f$ -Faktor, wenn dies auch für  $G'$  zutrifft. In  $G'$  ersetzen wir nun jede Ecke  $v$  durch  $f(v)$  unverbundene Ecken  $V(v)$ . Gilt  $uv \in E'$ , so verbinden wir alle Ecken aus

$V(u)$  mit allen Ecken aus  $V(v)$ , im anderen Fall  $uv \notin E'$  seien  $V(u)$  und  $V(v)$  völlig unverbunden.



Figur 6.10

Die Leser können sich sofort überzeugen, dass der auf diese Weise erhaltene Graph  $\tilde{G}$  genau die oben angegebene Bedingung erfüllt. Auf  $\tilde{G}$  können wir demnach Satz 6.13 anwenden und dann auf  $G$  übertragen. Diese Übertragung gelingt nicht ganz mühelos, so dass wir nur das Ergebnis festhalten.

**Satz 6.17** (Tutte). Sei  $G = (V, E)$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{N}_0$  gegeben. Genau dann existiert ein Untergraph  $H = (V, E')$  mit  $d_H(v) = f(v)$  für alle  $v$ , wenn es keine disjunkten Eckenmengen  $S$  und  $T$  gibt, mit

$$\sum_{u \in S} f(u) < k_0(S, T) + \sum_{v \in T} (f(v) - d_{G \setminus S}(v)).$$

Dabei ist  $k_0(S, T)$  die Anzahl der Komponenten  $A$  von  $G \setminus (S \cup T)$ , für die die Summe: (Anzahl der Kanten zwischen  $A$  und  $T$ ) +  $\sum_{u \in A} f(u)$  ungerade ist.

Kehren wir nochmals zu bipartiten Graphen zurück. 6.17 erlaubt uns eine Antwort auf die Frage, wann ein bipartiter Graph  $G = (S \cup T, E)$  mit  $|S| = m$ ,  $|T| = n$  und vorgeschriebenen Eckengraden  $r_1, \dots, r_m$  bzw.  $s_1, \dots, s_n$  existiert. Oder in der Sprache der Matrizen ausgedrückt: Wann eine 0,1-Matrix des Formats  $m \times n$  mit vorgeschriebenen Zeilensummen  $r_1, \dots, r_m$  und Spaltensummen  $s_1, \dots, s_n$  existiert. Offensichtlich muss  $\sum r_i = \sum s_j$  sein, aber dies genügt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Seien die Zeilensummen 3, 3, 2, 1 und die Spaltensummen 4, 4, 1. Eine  $4 \times 3$ -Matrix müsste dann in den ersten beiden Zeilen und Spalten jeweils 1'en haben, also insgesamt mindestens 10.

Wir nehmen als Ausgangsgraphen  $G = K_{m,n}$  auf den Eckenmengen  $S$  und  $T$  und konstruieren den Graphen  $\tilde{G}$  wie vor 6.17.  $\tilde{G}$  ist in diesem Fall wieder bipartit, so dass wir zur Existenz eines 1-Faktors in  $\tilde{G}$  statt 6.13 Halls Bedingung 6.3 heranziehen können.

**Satz 6.18** (Gale-Ryser). Es seien nichtnegative ganze Zahlen  $r_1, \dots, r_m$  bzw.  $s_1, \dots, s_n$  vorgegeben. Genau dann existiert eine 0,1-Matrix mit den Zeilensummen  $r_1, \dots, r_m$  und den Spaltensummen  $s_1, \dots, s_n$ , wenn  $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n s_j$  ist und

$$\sum_{i \in I} r_i \leq |I||J| + \sum_{j \notin J} s_j \text{ für alle } I \subseteq \{1, \dots, m\}, J \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ gilt.}$$

*Beweis.* Die Notwendigkeit der Bedingungen leuchtet sofort ein. Seien nun umgekehrt die Bedingungen erfüllt. Die Eckenmenge von  $K_{m,n}$  sei  $S = \{a_1, \dots, a_m\} \cup T = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Wie in der Konstruktion von  $\tilde{G}$  dargelegt, fügen wir auf jeder Kante  $a_i b_j$

zwei Ecken  $e_{ij}, f_{ij}$  ein und ersetzen  $a_i$  durch  $r_i$  Ecken  $V(a_i)$  und  $b_j$  durch  $s_j$  Ecken  $V(b_j)$ , die wir wie dort angegeben verbinden. Der resultierende Graph  $\tilde{G}$  ist bipartit mit den Eckenmengen  $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^m V(a_i) \cup \bigcup_{i,j} f_{ij}$ ,  $\tilde{T} = \bigcup_{j=1}^n V(b_j) \cup \bigcup_{i,j} e_{ij}$ . Es gilt  $|\tilde{S}| = \sum_{i=1}^m r_i + mn = \sum_{j=1}^n s_j + mn = |\tilde{T}|$ .

Sei nun  $X \subseteq \tilde{S}$  und  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  die Menge jener Indizes, für die  $|X \cap V(a_i)| = p_i > 0$  ist und  $J' = \{1, \dots, n\} \setminus J$  jene Indizes, für die  $|X \cap \{f_{1j}, \dots, f_{mj}\}| = q_j > 0$  ist. Wir müssen nun  $|X| \leq |R(X)|$  zeigen. Zunächst haben wir  $|X| = \sum_{i \in I} p_i + \sum_{j \in J'} q_j$ . Jede der  $p_i$  Ecken aus  $V(a_i)$  ist zu  $\{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$  benachbart, und da  $R(V(a_i)) \cap R(V(a_j)) = \emptyset$  für  $i \neq j$  ist, tragen diese Ecken insgesamt  $|I|n$  zu  $|R(X)|$  bei. Eine Ecke  $f_{ij}$  ist zu  $V(b_j)$  und  $e_{ij}$  benachbart, also tragen die  $\sum_{j \in J'} q_j$  Ecken  $f_{ij}$  insgesamt  $\sum_{j \in J'} s_j + \sum_{j \in J'} q_j$  bei. Bei diesen Beiträgen werden möglicherweise einige Ecken  $e_{ij}$  doppelt gezählt, die sowohl von  $V(a_i)$  wie von  $f_{ij}$  erreicht werden. Da dies nur für  $i \in I$  und  $j \in J'$  möglich ist, werden höchstens  $|I||J'| = |I|(n - |J|)$  Ecken doppelt gezählt, und wir erhalten

$$|R(X)| \geq |I|n + \sum_{j \in J} s_j + \sum_{j \notin J} q_j - |I|(n - |J|) = |I||J| + \sum_{j \in J} s_j + \sum_{j \notin J} q_j.$$

Wegen  $p_i \leq r_i$  für alle  $i$  und der Bedingung des Satzes folgt daraus

$$|X| = \sum_{i \in I} p_i + \sum_{j \notin J} q_j \leq \sum_{i \in I} r_i + \sum_{j \notin J} q_j \leq |I||J| + \sum_{j \in J} s_j + \sum_{j \notin J} q_j \leq |R(X)|,$$

und das wollten wir zeigen.  $\square$

Wir wollen die Bedingung in 6.18 noch weiter vereinfachen. Durch Permutation der Zeilen und Spalten können wir erreichen, dass  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m$  und  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$  gilt. Ist  $|I| = k$ ,  $|J| = \ell$ , so erhalten wir die schärfste Aussage in 6.18, wenn die  $r_i$  möglichst groß und die  $s_j$  möglichst klein sind, d. h.  $\sum_{i=1}^k r_i \leq k\ell + (s_{\ell+1} + \dots + s_n)$ . Dies ist aber äquivalent zu  $\sum_{i=1}^k r_i \leq \sum_{i=1}^k s_i^*$  mit  $s_i^* = |\{j : s_j \geq i\}|$ , wie man sich leicht überlegen kann. Das heißt:  $s_i^*$  ist die Anzahl der Spalten, deren Summe mindestens  $i$  ist,  $i = 1, \dots, m$ . Man beachte, dass  $\sum_{i=1}^m s_i^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1, s_j \geq i}^n 1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{s_j} 1 = \sum_{j=1}^n s_j$  ist.

**Folgerung 6.19.** *Es seien nichtnegative ganze Zahlen  $r_1, \dots, r_m$  und  $s_1, \dots, s_n$  gegeben. Wir ordnen sie jeweils der Größe nach:  $\bar{r}_1 \geq \bar{r}_2 \geq \dots \geq \bar{r}_m$ ,  $\bar{s}_1 \geq \bar{s}_2 \geq \dots \geq \bar{s}_n$ . Genau dann existiert eine 0, 1-Matrix mit Zeilensummen  $r_1, \dots, r_m$  und Spaltensummen  $s_1, \dots, s_n$ , wenn gilt:*

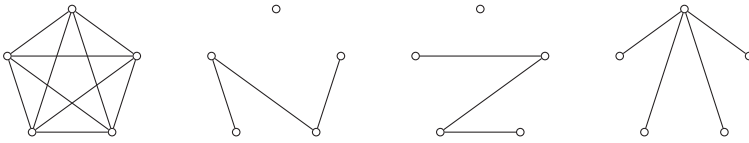
$$\sum_{i=1}^k \bar{r}_i \leq \sum_{i=1}^k \bar{s}_i^* \quad \text{für } k = 1, \dots, m,$$

mit Gleichheit für  $k = m$ .

In unserem Beispiel mit  $r_1 = r_2 = 3$ ,  $r_3 = 2$ ,  $r_4 = 1$  bzw.  $s_1 = s_2 = 4$ ,  $s_3 = 1$  ist  $s_1^* = 3$ ,  $s_2^* = s_3^* = s_4^* = 2$  und somit  $r_1 + r_2 = 6 > 5 = s_1^* + s_2^*$ , also gibt es keine 0, 1-Matrix mit diesen Zeilen- und Spaltensummen.

Neben dem Studium der 1-Faktorisierungen und den angeführten Anwendungen auf die Transversaltheorie, 0,1-Matrizen und die Existenz von Graphen mit vorgegebenen Graden, wurden auch andere „Faktorisierungen“ untersucht. Zum Beispiel kann man

versuchen, einen Graphen in möglichst wenige plättbare Untergraphen zu faktorisieren, um diese Minimalzahl als Maß für die Nichtplättbarkeit zu nehmen. Allgemein will man beliebige Graphen möglichst ökonomisch in Graphen aus einer vorgegebenen Klasse zerlegen. Eine interessante Klasse sind die Bäume oder allgemeiner die Wälder. Ein Graph heißt ein *Wald*, wenn jede Komponente ein Baum ist (oder äquivalent dazu, wenn  $G$  kreislos ist). Unter der *Arborizität*  $a(G)$  versteht man die Minimalzahl von kantendisjunkten Wäldern, in die  $G$  zerlegt werden kann.  $G$  muss natürlich als schlingenlos vorausgesetzt werden. Klarerweise existiert immer eine solche Zerlegung, indem wir jede einzelne Kante zusammen mit den anderen isolierten Ecken als Wald nehmen. Insbesondere ist also  $a(G) \leq |E|$ . Als Beispiel zeigt Figur 6.11 eine Zerlegung von  $K_5$  in 3 Wälder.



Figur 6.11

Wiederum können wir mühelos eine untere Schranke für  $a(G)$  ableiten. Zunächst ist klar, dass  $a(G) \geq a(H)$  gilt, wenn  $H$  Untergraph von  $G$  ist. Angenommen  $W$  ist ein Wald auf  $\ell$  Ecken, der  $h$  Komponenten aufweist, dann hat  $W$  wegen 1.3 genau  $\ell - h$  Kanten, höchstens also  $\ell - 1$ . Ist  $H$  daher ein Untergraph auf  $\ell$  Ecken mit  $q$  Kanten, so brauchen wir für eine Zerlegung von  $H$  mindestens  $\lceil \frac{q}{\ell-1} \rceil$  Wälder. Definieren wir  $q_\ell$  als Maximalzahl von Kanten unter allen Untergraphen von  $G$  mit  $\ell$  Ecken, so muss  $a(G) \geq \max_\ell \lceil \frac{q_\ell}{\ell-1} \rceil$  gelten. In unserem Beispiel  $K_5$  muss  $a(K_5) \geq \lceil \frac{10}{4} \rceil = 3$  gelten, also ist  $a(K_5) = 3$ . Dass in  $a(G) \geq \max_\ell \lceil \frac{q_\ell}{\ell-1} \rceil$  tatsächlich immer Gleichheit gilt, ist eine der bemerkenswertesten allgemeinen Faktorisierungsformeln der Graphentheorie. Den Beweis verschieben wir auf Kapitel 8, wo die Formel als Spezialfall eines Zerlegungssatzes für Matroide erscheinen wird.

**Satz 6.20** (Nash-Williams). *Die Arborizität eines schlingenlosen Graphen  $G$  ist gegeben durch  $a(G) = \max_{\ell \geq 2} \lceil \frac{q_\ell}{\ell-1} \rceil$ , wobei  $q_\ell$  die Maximalzahl von Kanten unter allen Untergraphen von  $G$  auf  $\ell$  Ecken ist.*

**Beispiel.** Für  $K_p$  ist  $q_\ell = \binom{\ell}{2}$  und somit  $\lceil \frac{q_\ell}{\ell-1} \rceil = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ , woraus  $a(K_p) = \lceil \frac{p}{2} \rceil$  folgt. Auch für die Graphen  $K_{m,n}$  nehmen die Ausdrücke  $\lceil \frac{q_\ell}{\ell-1} \rceil$  mit wachsendem  $\ell$  zu, so dass  $a(K_{m,n}) = \lceil \frac{mn}{m+n-1} \rceil$  resultiert.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass die Faktorisierungssätze die wahrscheinlich wichtigsten Existenz-Resultate der Graphentheorie sind, schon aufgrund ihrer unübersehbaren Palette von Anwendungen in praktisch allen Bereichen der Diskreten Mathematik. Vielleicht war dies auch ein Grund, warum das ursprüngliche Problem: Ist ein 3-regulärer brückenloser ebener Graph 1-faktorisierbar? aus den Augen verloren wurde. Hier wurden zunächst keine Fortschritte erzielt. Und so wollen wir uns dem nächsten Thema zuwenden.

## Übungen zu Kapitel 6

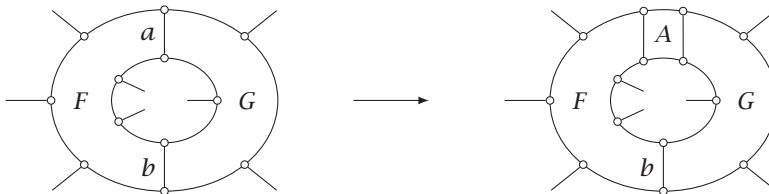
1. Zeige, dass  $K_4$  eine eindeutige 1-Faktorisierung besitzt. Wie viele 1-Faktorisierungen hat  $K_6$ ?
- 2.\* Berechne die Zahl der 1-Faktoren von  $K_{2n}$ .
3. Zeige, dass ein Baum höchstens einen 1-Faktor besitzt.
- 4.\* Zeige: Ein bipartiter Graph mit Maximalgrad  $\Delta$  ist die Vereinigung von  $\Delta$  Matchings (oder mit anderen Worten: hat chromatischen Index  $\chi' = \Delta$ ).
5. Konstruiere für jedes  $k > 1$  einen  $k$ -regulären Graphen ohne 1-Faktor.
6. Rechneraufgabe: Entwirf einen Algorithmus, der auf einem Mengensystem  $(N; \mathcal{A})$  eine Transversale konstruiert bzw. ein Teilsystem liefert, welches die Hallsche Bedingung 6.5 verletzt.
7. Sei  $(N; A_1, \dots, A_m)$  Mengensystem. Zeige: Genau dann existiert eine partielle Transversale der Mächtigkeit  $t$  (d.h. eine Transversale eines  $t$ -elementigen Teilsystems), wenn  $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I| + t - m$  für alle  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  gilt.
8. Sei  $N = \{1, \dots, n\}$ . Wie viele verschiedene Transversalen hat das System  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots, \{n, 1\}\}$ ?
- 9.\* Eine quadratische Matrix mit 0,1-Einträgen heißt *Permutationsmatrix*, falls jede Zeile und Spalte genau eine 1 enthält. Zeige: Jede doppelt-stochastische Matrix  $A$  ist konvexe Kombination von Permutationsmatrizen  $P_i$ , d.h.  $A$  kann dargestellt werden in der Form  $A = \sum_{i=1}^t c_i P_i$  mit  $\sum_{i=1}^t c_i = 1$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $c_i \geq 0$ .
10. Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit Zeilen- und Spaltensummen  $= k$ . Zeige, dass  $A = \sum_{i=1}^k P_i$  ist,  $P_i$  Permutationsmatrizen.
11. Unter einem Lateinischen Rechteck  $M$  des Formats  $(r, s; n)$  verstehen wir eine  $r \times s$ -Matrix über  $\{1, \dots, n\}$ , in der in jeder Zeile und Spalte jedes Element höchstens einmal vorkommt. Zeige, dass ein Lateinisches Rechteck des Formats  $(m, n; n)$  mit  $m < n$  stets zu einem Lateinischen Quadrat der Ordnung  $n$  vervollständigt werden kann.
12. Vervollständige  $\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}$ .
- 13.\* Etwas schwieriger. Beweise, dass ein  $(r, s; n)$ -Lateinisches Rechteck  $M$  genau dann zu einem Lateinischen Quadrat der Ordnung  $n$  ergänzt werden kann, wenn jedes Element mindestens  $r + s - n$  Mal in  $M$  aufscheint.
- 14.\* Zeige: Ein Baum  $T$  hat genau dann einen 1-Faktor, wenn  $c_u(T \setminus v) = 1$  ist, für jede Ecke  $v$ .
- 15.\* Zeige: Hat der einfache Graph  $G$  eine gerade Anzahl  $p = 2n$  von Ecken und gilt  $d(u) + d(v) \geq p - 1$  für je zwei Ecken  $u, v$ , so besitzt  $G$  einen 1-Faktor.
16. Beschreibe die maximalen Graphen mit  $p = 2n$  Ecken, welche keinen 1-Faktor enthalten.
17. Zwei Spieler wählen auf einem zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  abwechselnd verschiedene Ecken  $u_1, u_2, u_3, \dots$  unter der Bedingung  $u_i u_{i+1} \in E$ . Wer als letzter eine Ecke wählen kann, gewinnt. Zeige: Der erste Spieler hat genau dann eine Gewinnstrategie, wenn  $G$  keinen 1-Faktor besitzt.
18. Zeige, dass  $K_{6n-2}$  eine 3-Faktorisierung für jedes  $n$  hat.
19. Etwas schwieriger. Beweise 6.17.
- 20.\* Beweise: Für jeden ebenen Graphen  $G$  ist die Arborizität  $a(G) \leq 3$ .



# 7 Hamiltonsche Kreise

Wenn wir zum Ende von Kapitel 3 zurückblättern, so lesen wir, dass der Ausgangspunkt zum Studium Hamiltonscher Kreise die Vermutung 3.9 von Tait war: Jeder 3-reguläre polyedrische Graph besitzt einen Hamiltonschen Kreis. Dort wird auch erwähnt, dass Whitney im Lichte des Satzes von Steinitz 3.11 gezeigt hat, dass die Vermutung von Tait sogar die 4-Farben Vermutung implizieren würde. Und mit diesem Resultat von Whitney wollen wir beginnen.

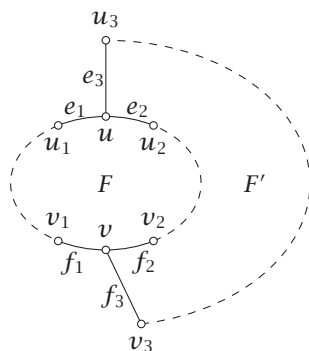
Seine erste Beobachtung (sie war auch schon früheren Autoren geläufig) war, dass wir die Klasse der kubischen normalen Landkarten noch weiter einschränken können, nämlich auf jene Landkarten, in denen je zwei verschiedene Länder höchstens *eine* gemeinsame Grenze haben – wir sagen, die Landkarte hat keine *mehrfachen Nachbarschaften*. Haben nämlich die Länder  $F$  und  $G$  die gemeinsamen Grenzen  $a$  und  $b$ , so ersetzen wir eine davon, sagen wir  $a$ , durch ein neues Land  $A$ , wie in Figur 7.1 angedeutet. Ist die neue Landkarte (die wieder kubisch und normal ist) 4-färbbar, so mit Sicherheit auch die alte.



Figur 7.1

**Satz 7.1.** *Das Gerüst  $G(\mathcal{L})$  einer kubischen Landkarte mit mindestens 4 Ländern ohne mehrfache Nachbarschaften ist 3-fach zusammenhängend.*

*Beweis.* Wir bemerken als Erstes, dass  $G = G(\mathcal{L})$  mindestens 4 Ecken hat, da für 2 Ecken die Landkarte induziert von 3 Mehrfachkanten resultieren würde, die nur 3 Länder aufweist, und eine Landkarte mit 3 Ecken wegen 1.2 unmöglich ist. Klarerweise ist  $G$  2-fach zusammenhängend, da an einer Schnittecke  $v$  wegen  $d(v) = 3$  eine Brücke vorkommen müsste. Sei nun  $\{u, v\}$  eine trennende Eckenmenge, wobei wir zunächst annehmen, dass  $u$  und  $v$  nicht benachbart sind. Die Nachbarn von  $u$  und  $v$  seien  $u_1, u_2, u_3$  bzw.  $v_1, v_2, v_3$  (die natürlich nicht verschieden zu sein brauchen). Nach dem Mengerschen Satz 4.4 sind zwei der Nachbarn von  $u$ , sagen wir  $u_1, u_2$ , in verschiedenen Komponenten  $G_1, G_2$  von  $G \setminus \{u, v\}$ . Es sei  $F$  das (nach Voraussetzung eindeutige) Land mit  $e_1 = uu_1, e_2 = uu_2$  als Grenzen.  $F$  muss dann auch  $v$  als Randecke enthalten, und wir wählen die Nummerierung so, dass  $v_1$  in  $G_1$  und  $v_2$  in  $G_2$  liegt (Figur 7.2). Die Ecke  $u_3$  ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit nicht in  $G_2$ . Das mit  $e_3 = uu_3, e_2 = uv_2$  inzidente Land  $F'$  muss dann ebenfalls  $v$  als Randecke enthalten



Figur 7.2

und somit  $f_1$  oder  $f_2$  als Grenze haben. Damit haben aber  $F$  und  $F'$  die Grenzen  $e_2$  und  $f_1$  oder  $f_2$  gemeinsam, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nehmen wir nun an,  $u$  und  $v$  sind durch eine Kante verbunden. Wie oben seien  $u_1$  und  $u_2$  Nachbarn von  $u$  in verschiedenen Komponenten  $G_1$  bzw.  $G_2$  von  $G \setminus \{u, v\}$ , und entsprechend  $v_1$  und  $v_2$ . Ist  $u_1 = v_1$ , so muss die neben  $u_1u$ ,  $u_1v$  dritte an  $u_1$  anstoßende Kante eine Brücke sein. Gilt aber  $u_1 \neq v_1$ , so bilden  $u_1$  und  $v$  eine nicht benachbarte trennende Eckenmenge, und wir sind wieder in der Ausgangssituation.  $\square$

Also, Taits Vermutung ist aufgrund von 3.11 tatsächlich stärker als die 4-Farben Vermutung, aber sie ist, wie wir anhand des Beispiels von Tutte in Figur 3.19 gesehen haben, falsch. Nicht jeder 3-fach zusammenhängende 3-reguläre ebene Graph  $G$  hat einen Hamiltonschen Kreis. Whitney zeigte nun 1931 die merkwürdige Tatsache auf, dass unter gewissen Zusatzvoraussetzungen, wenn schon nicht  $G$ , so jedenfalls der *duale Graph*  $G^*$  Hamiltonsch ist. Oder anders ausgedrückt: Wir können eine Reise durch  $\mathcal{L}$  machen, die jedes Land im Inneren genau einmal besucht und dann zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Die Leser werden mühelos einen solchen Linienzug in Figur 3.19 oder auf dem Dodekaeder von Figur 3.14 finden.

Bevor wir den Beweis dieses fundamentalen Ergebnisses und seine Erweiterung durch Tutte skizzieren, wollen wir wie in den vorhergehenden Kapiteln von Landkarten zu Graphen übergehen. Der duale Graph  $G^*$  hat keine Schlingen, Brücken oder Mehrfachkanten (entspricht den mehrfachen Nachbarschaften) und jedes Land wird von genau 3 Kanten begrenzt. Kurz gesagt:  $G^*$  ist eine *Triangulierung der Ebene*, genauer eine *einfache Triangulierung*.

Es ist leicht, eine weitere Beschreibung dieser Graphen zu geben. Ein Graph  $G$  heißt *maximal eben*, wenn  $G$  einfach ist und es unmöglich ist, weitere Kanten zwischen unverbundenen Ecken einzufügen, ohne die Einbettung zu zerstören. Offensichtlich ist jede einfache Triangulierung maximal eben. Es sei umgekehrt  $G$  ein einfacher ebener Graph und  $F$  ein Land mit den Randecken  $v_1, v_2, \dots, v_t$ ,  $t \geq 3$ . Ist  $t \geq 5$ , so muss es ein Paar  $v_i, v_j$  von nicht verbundenen Ecken geben, da  $K_5$  nicht plättbar ist. Aber auch für  $t = 4$  können außerhalb  $F$  nicht beide Kanten  $v_1v_3$  und  $v_2v_4$  existieren. Für  $t \geq 4$  gibt es also stets ein Paar unverbundener Ecken  $v_i, v_j$ , so dass wir die Kante  $v_iv_j$  im Inneren von  $F$  einfügen können. Ein maximal ebener Graph muss demnach eine einfache Triangulierung sein. Unsere eingangs angestellte Überlegung nimmt in

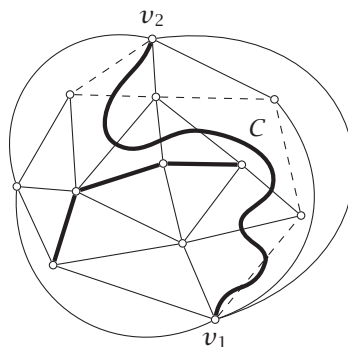
der dualen Form die folgende selbstverständliche Formulierung an: *Zum Beweis der 4-Farben Vermutung genügt der Nachweis, dass alle maximal ebenen Graphen 4-färbbar sind.*

Die wichtigsten und im Folgenden stets verwendeten Eigenschaften maximal ebener Graphen sind im nächsten Satz zusammengefasst.

**Satz 7.2.** *Sei  $G$  ein maximal ebener Graph mit  $p \geq 4$  Ecken und  $q$  Kanten. Dann gilt:*

- (i)  *$G$  ist eine Triangulierung ohne Mehrfachnachbarschaften,*
- (ii)  *$d(v) \geq 3$  für alle  $v \in V$ ,*
- (iii)  *$\sum_{v \in V} (6 - d(v)) = 12$ ,*
- (iv)  *$q = 3p - 6$ .*
- (v) *Ist  $T$  eine minimale trennende Eckenmenge, so ist der von  $T$  aufgespannte Untergraph ein Kreis.*
- (vi)  *$G$  ist 3-fach zusammenhängend.*

*Beweis.* Dass  $G$  eine Triangulierung ist, haben wir schon gesehen. Hätten zwei solche Dreiecksländer zwei gemeinsame Grenzen  $uv, uw$ , so wären die Ecken  $v$  und  $w$  durch zwei Kanten verbunden (da  $p \geq 4$  ist). (ii) folgt unmittelbar aus der Eigenschaft maximal eben. (iii) ist die duale Aussage zu 1.6, woraus wegen  $\sum_{v \in V} d(v) = 2q$  sofort (iv) folgt. Sei  $T$  irgendeine trennende Eckenmenge. Wir behaupten, dass der von  $T$  aufgespannte Untergraph  $G(T)$  einen Kreis enthalten muss. Seien  $v_1, v_2$  Ecken in verschiedenen Komponenten von  $G \setminus T$ . Enthält  $G(T)$  keinen Kreis, so existiert eine Jordan Kurve  $C$  von  $v_1$  nach  $v_2$ , die weder die Ecken noch die Kanten von  $G(T)$  trifft. Da  $G$  eine Triangulierung ist, folgert man daraus (Beweis!), dass  $C$  zu einem Kantenzug in  $G \setminus T$  deformiert werden kann, im Widerspruch zur Wahl von  $v_1$  und  $v_2$  (siehe Figur 7.3). Daraus folgt nun (v) und, da  $G$  keine Mehrfachkanten enthält, auch (vi).  $\square$

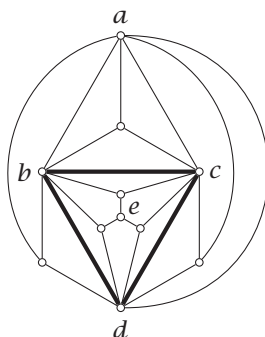


Figur 7.3

Die Kanten aus  $G(T)$  sind fettgedruckt, der zur Jordan Kurve  $C$  gehörende Weg von  $v_1$  nach  $v_2$  gestrichelt gezeichnet.

Zurück zu den Hamiltonschen Kreisen. Die nach 7.1 erwähnte Tour der Länder einer kubischen normalen Landkarte ist in der dualen Form ein Hamiltonscher Kreis

in einem maximal ebenen Graphen. Ein 3-fach zusammenhängender maximal ebener Graph  $G$  braucht keinen Hamiltonschen Kreis zu besitzen – das kleinste Beispiel hierfür ist in Figur 7.4 abgebildet (ein trennender Kreis der Länge 3 ist fettgedruckt). Setzen wir aber  $G$  als 4-fach zusammenhängend voraus, so muss stets ein solcher Kreis existieren – und dies ist Whitneys Resultat, das wir wie auch die Verallgemeinerung von Tutte (1956) auf beliebige 4-fach zusammenhängende ebene Graphen nur zitieren.



Figur 7.4

**Satz 7.3** (Whitney). *Ein maximal ebener Graph, der 4-fach zusammenhängend ist (oder äquivalent: der keinen trennenden Kreis der Länge 3 aufweist), besitzt einen Hamiltonschen Kreis.*

**Folgerung 7.4.** *Zum Beweis der 4-Farben Vermutung genügt der Nachweis, dass alle ebenen Hamiltonschen Graphen 4-färbbar sind.*

Zum Beweis der Folgerung nehmen wir an, dass  $G_0$  ein einfacher ebener 5-chromatischer Graph mit einer Minimalzahl von Ecken ist. Durch Hinzufügen von Kanten gibt es dann einen maximal ebenen 5-chromatischen Graphen  $G$  derselben Eckenzahl. Hätte  $G$  einen trennenden Kreis  $C = (v_1, v_2, v_3)$ , so könnten wir wegen der Minimalität von  $G$  den Untergraphen im Inneren von  $C$  zusammen mit  $\{v_1, v_2, v_3\}$  mit 4 Farben färben, und analog den äußeren Graphen (zusammen mit  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ). Durch Permutation der Farben auf  $C$  können wir erreichen, dass die Färbungen auf  $C$  übereinstimmen, woraus  $\chi(G) \leq 4$  resultieren würde. Wenn aber  $G$  keinen trennenden 3-Kreis enthält, so ist  $G$  nach 7.3 Hamiltonsch, und der Beweis ist erbracht.

**Satz 7.5** (Tutte). *Jeder 4-fach zusammenhängende ebene Graph besitzt einen Hamiltonschen Kreis.*

Dieses Ergebnis von Tutte gehört ohne Zweifel zu den tiefsten Resultaten, die die Graphentheorie aufzuweisen hat. Ein Hinweis dafür ist die Tatsache, dass man 4-fach zusammenhängende ebene Graphen beliebiger Größe konstruiert hat, die keine zwei kantendisjunkten Hamiltonschen Kreise enthalten. Übrigens: Wie das Beispiel  $K_{4,5}$  zeigt, bleibt 7.5 nicht richtig, wenn die Plättbarkeit der Graphen fallengelassen wird. Ein verwandtes Problem, das nach wie vor offen ist, stammt von Barnette: Ist jeder 3-reguläre 3-fach zusammenhängende ebene *bipartite* Graph Hamiltonsch?

Bevor wir zu beliebigen Graphen übergehen, wollen wir noch zwei Ergebnisse erwähnen, die in diesen Problemkreis gehören. Eines davon, von Eberhard 1891 bewiesen, stammt noch aus den Anfängen der Entwicklung. Betrachten wir die Formel 7.2(iii). Schreiben wir  $p_i$  für die Anzahl der Ecken vom Grad  $i$ , so lautet sie:  $3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - \dots = 12$ . Es fällt sofort auf, dass  $p_6$  überhaupt nicht vorkommt. Frage: Angenommen  $(p_3, p_4, p_5, p_7, p_8, \dots)$  ist eine Folge von ganzen Zahlen  $\geq 0$ , die die Formel erfüllt. Gibt es dann immer zumindest ein  $p_6$ , so dass ein maximal ebener Graph mit der Gradfolge  $(p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, \dots)$  existiert? Die (nicht leichte) Antwort ist ja, und dies ist Eberhards Theorem. Interessant ist natürlich insbesondere der kleinstmögliche Wert von  $p_6$ , und es wird vermutet, dass eine Realisierung für  $p_6 < \max(k : p_k \neq 0)$  möglich ist. Die Leser können schon am Beispiel  $p_3 = 3$ ,  $p_4 = p_5 = 1$ ,  $p_k = 0$  für  $k \geq 7$  ersehen, dass dieses Minimum ( $p_6 = 3$ ) nicht leicht zu finden ist.

Das zweite Ergebnis betrifft nochmals Taits Vermutung über polyedrische Graphen. Ausgehend von Tuttets Gegenbeispiel in Figur 3.19 waren nachfolgende Autoren bemüht, kleinere Beispiele nicht-Hamiltonscher polyedrischer Graphen zu finden. Eine einfache notwendige Bedingung für die Existenz Hamiltonscher Kreise in ebenen Graphen hat Grinberg 1968 angegeben.

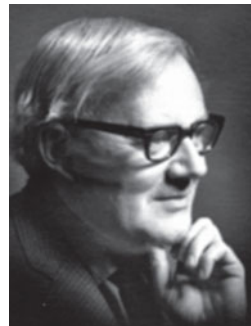
**Satz 7.6** (Grinberg). *Sei  $G$  ein schlingenloser Hamiltonscher ebener Graph mit  $p$  Ecken und  $C$  ein Hamiltonscher Kreis. Mit  $f_i$  bzw.  $g_i$  bezeichnen wir die Anzahl der Länder mit  $i$  Randkanten im Inneren bzw. Äußeren von  $C$ . Dann gilt*

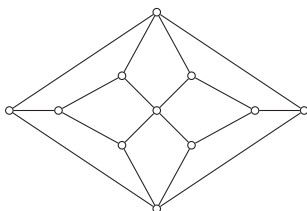
$$\sum_i (i-2)f_i = \sum_i (i-2)g_i = p-2.$$

*Beweis.* Es genügt, die Gleichung für die  $f_i$ 's nachzuweisen. Sei  $m$  die Anzahl der im Inneren von  $C$  liegenden Kanten. Da  $C$  ein Hamiltonscher Kreis ist, enthält das Innere von  $C$  dann  $m+1$  Länder, d. h. wir haben  $\sum_i f_i = m+1$ . Jede dieser  $m$  Kanten inzidiert mit zwei inneren Ländern und jede der  $p$  Kanten von  $C$  inzidiert mit einem dieser Länder. Daraus folgt  $2m+p = \sum_i if_i$  und somit  $p = \sum_i (if_i - 2f_i) + 2 = \sum_i (i-2)f_i + 2$ .  $\square$

Als Anwendung können wir sofort nachprüfen, dass der polyedrische Graph in Figur 7.5 keinen Hamiltonschen Kreis besitzt. In diesem Graphen ist  $p = 11$ , alle 9 Länder haben 4 Grenzen, also ist  $f_4 + g_4 = 9$  und  $f_i = g_i = 0$  für  $i \neq 4$ , woraus der Widerspruch  $2f_4 = 9$  resultiert.

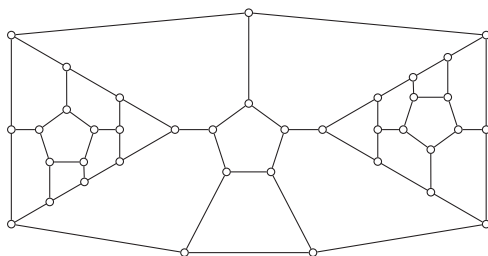
**William Thomas Tutte** wurde 1917 in Newmarket, England geboren. In Cambridge studierte er zunächst Chemie und wechselte erst nach dem Krieg zur Mathematik. Während des Weltkrieges arbeitete er in der Bletchley Park Gruppe um Alan Turing und hatte einen entscheidenden Anteil an der Dechiffrierung der deutschen Codiermaschine Enigma. Obwohl er später viele Ehrungen erhielt, blieb diese spektakuläre Leistung weitgehend unbeachtet. Nach dem Studium lehrte er in Toronto und später in Waterloo, wo er das neugegründete Department of Combinatorics and Optimization zu großem Erfolg führte. Er verfasste eine Vielzahl von fundamentalen Ergebnissen in praktisch jedem Gebiet, das in diesem Buch besprochen wird. Er starb 2002 in Waterloo.





Figur 7.5

Der Graph aus Figur 7.5 heißt der Herschel Graph, er ist das kleinste Beispiel eines nicht-Hamiltonschen polyedrischen Graphen. Er ist allerdings nicht 3-regulär. Die kleinsten Beispiele derartiger 3-regulärer Graphen haben, wie schon in Kapitel 3 erwähnt wurde, 38 Ecken. Eines ist in Figur 7.6 abgebildet. Auch hier wird die Unmöglichkeit eines Hamiltonschen Kreises mittels der Grinberg Formel gezeigt.



Figur 7.6

Nun wollen wir uns aber die allgemeine Frage stellen: Wann ist ein Graph Hamiltonsch? Um es gleich vorwegzunehmen: Ein handliches Kriterium hierfür ist nicht bekannt, und die Charakterisierung Hamiltonscher Graphen ist eines der großen offenen Probleme der Graphentheorie. Wer den Begriff der Komplexität von Rechnungen kennt, für den sei hinzugefügt, dass die Entscheidung, ob ein Graph Hamiltonsch ist oder nicht, ein *NP-vollständiges Problem* ist, ja es bleibt sogar NP-vollständig, wenn wir uns auf ebene 3-fach zusammenhängende Graphen beschränken. Dies schließt natürlich nicht aus, dass ein (im Sinne der Komplexitätstheorie aufwendiges) Kriterium gefunden werden kann, doch wird jedes solche Kriterium schwierig zu beschreiben sein.

Die allgemeinen Ergebnisse über Hamiltonsche Kreise zerfallen daher im Wesentlichen in zwei Gruppen, geordnet nach notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen. Beginnen wir mit den *notwendigen* Bedingungen. Eine Tatsache ist trivial: Ein Hamiltonscher Graph muss 2-fach zusammenhängend sein. Eine Verallgemeinerung davon ist:

**Satz 7.7.** Sei  $G = (V, E)$  ein Hamiltonscher Graph und  $A \subseteq V$ ,  $A \neq \emptyset$ . Dann gilt  $c(G \setminus A) \leq |A|$ , wobei  $c(G \setminus A)$  die Anzahl der Komponenten von  $G \setminus A$  bezeichnet.

*Beweis.*  $C$  sei ein Hamiltonscher Kreis in  $G$ , dann gilt  $c(C \setminus A) \leq |A|$ . Da  $C \setminus A$  ein spannender Untergraph von  $G \setminus A$  ist, folgt daraus  $c(G \setminus A) \leq c(C \setminus A) \leq |A|$ .  $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir sofort nachweisen, dass der Graph in Figur 7.4 nicht-Hamiltonsch ist. Entfernen wir nämlich die Ecken  $a, b, c, d, e$ , so besteht der Restgraph aus 6 Komponenten.

Die Bedingung des Satzes hat große Ähnlichkeit mit dem Tutte'schen Kriterium 6.13 für die Existenz eines 1-Faktors – ein weiterer Hinweis auf den engen Zusammenhang zwischen Faktorisierung und Hamiltonschen Kreisen. 7.7 legt die Einführung des Parameters  $\tau(G) = \min \frac{|A|}{c(G \setminus A)}$  nahe, wobei das Minimum über alle  $A \subseteq V$  mit  $c(G \setminus A) > 1$  erstreckt wird.  $G$  wird dabei als nichtvollständig vorausgesetzt – vollständige Graphen sind ja immer Hamiltonsch. 7.7 besagt nun: Ist  $G$  Hamiltonsch, so gilt  $\tau(G) \geq 1$ . Chvátal, der den Parameter  $\tau(G)$  vorgeschlagen hat, vermutet, dass es eine Zahl  $t_0$  gibt, so dass  $\tau(G) \geq t_0$  impliziert, dass  $G$  Hamiltonsch ist;  $t_0 = 1$  wäre die Umkehrung von 7.7, doch ist der Petersen Graph  $P$  ein Gegenbeispiel ( $\tau(P) = \frac{4}{3}$ ).  $\tau(G)$  hängt eng mit zwei anderen Graphenparametern zusammen, der Zusammenhangszahl  $\kappa(G)$  und der Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  (= Maximalzahl paarweise nicht-verbundener Ecken). Ist  $A$  eine trennende Eckenmenge, also  $c(G \setminus A) > 1$ , so wissen wir aus 4.4, dass  $|A| \geq \kappa$  sein muss. Da offensichtlich  $c(G \setminus A) \leq \alpha$  gilt, erhalten wir sofort:

**Lemma 7.8.** Für jeden nichtvollständigen Graphen  $G$  gilt  $\tau(G) \geq \frac{\kappa(G)}{\alpha(G)}$ .

Mehr bekannt ist über *hinreichende* Bedingungen. Sie nehmen alle Bezug auf gewisse Parameter des Graphen, z.B. in der Form: Sind die Grade der einzelnen Ecken groß genug, so existiert ein Hamiltonscher Kreis. Als erstes Ergebnis notieren wir ein zu 7.8 komplementäres Resultat.

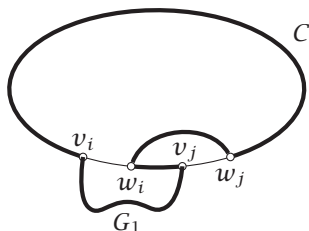
**Satz 7.9 (Erdős-Chvátal).** Es sei  $G$  ein Graph mit mindestens 3 Ecken, Zusammenhangszahl  $\kappa$  und Unabhängigkeitszahl  $\alpha$ . Gilt  $\kappa \geq \alpha$ , so ist  $G$  Hamiltonsch.

*Beweis.* Angenommen,  $G$  hat Zusammenhangszahl  $\kappa$  und besitzt keinen Hamiltonschen Kreis. Wir wollen zeigen, dass  $\alpha \geq \kappa + 1$  ist. Für  $\kappa = 0$  oder 1 ist dies trivial. Sei also  $\kappa \geq 2$ , dann besitzt  $G$  einen Kreis; es sei  $C$  ein Kreis maximaler Länge.  $G_1$  sei eine Komponente von  $G \setminus C$  und  $v_1, \dots, v_\ell$  die Ecken auf  $C$ , welche zu Ecken aus  $G_1$  benachbart sind. Kein Paar von Ecken  $v_i, v_j$  ist benachbart auf  $C$ , da wir ansonsten über  $G_1$  einen Kreis größerer Länge als  $C$  konstruieren könnten. Also ist  $\{v_1, \dots, v_\ell\}$  eine trennende Eckenmenge und somit  $\ell \geq \kappa$ . Wir wählen einen Durchlaufsinne auf  $C$  und bezeichnen mit  $w_1, \dots, w_\ell$  jene Ecken auf  $C$ , welche jeweils nach den  $v_i$ 's kommen.

Behauptung:  $\{w_1, \dots, w_\ell\}$  ist eine unabhängige Menge in  $G$ . Angenommen,  $w_i$  und  $w_j$  wären verbunden. Wir streichen die Kanten  $v_i w_i, v_j w_j$ , fügen  $w_i w_j$  hinzu und einen  $v_i, v_j$ -Weg in  $G_1$ . Der resultierende Kreis hat dann größere Länge als  $C$ , Widerspruch. (Figur 7.7)

Schließlich ist wegen der Maximalität von  $C$  kein  $w_i$  zu irgendeiner Ecke von  $G_1$  benachbart. Ist  $w_0$  nun eine Ecke von  $G_1$ , so bildet demnach  $\{w_0, w_1, \dots, w_\ell\}$  eine unabhängige Menge, und wir haben  $\alpha \geq \ell + 1 \geq \kappa + 1$ .  $\square$

Satz 7.9 kann nicht weiter verbessert werden, wie wiederum der Petersen Graph lehrt, für den  $\kappa = 3$ ,  $\alpha = 4$  gilt. Fasst man 7.7 und 7.9 zusammen, so erkennt man, dass



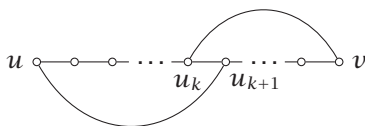
Figur 7.7

$\frac{\kappa(G)}{\alpha(G)} < 1 \leq \tau(G)$  die Bedingungen sind, für die keine Aussage über Existenz oder Nichtexistenz von Hamiltonschen Kreisen gemacht werden kann.

Die interessantesten *hinreichenden* Bedingungen ergeben sich aus der Betrachtung der Eckengrade. Die ersten beiden Resultate in dieser Richtung stammen von Ore (1960) und Dirac (1952). Sie bilden den ersten und zweiten Teil des folgenden Satzes. Noch ein Begriff: Ein *Hamiltonscher Weg* ist ein Weg, der alle Ecken genau einmal enthält. Sind die Endecken des Weges auch noch verbunden, so erhalten wir demnach einen Hamiltonschen Kreis.

**Satz 7.10 (Ore-Dirac).** *Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $p \geq 3$  Ecken. Wenn  $d(u) + d(v) \geq p$  für jedes Paar von nichtbenachbarten Ecken  $u, v$  gilt, so ist  $G$  Hamiltonsch. Insbesondere trifft dies zu, wenn  $d(u) \geq \frac{p}{2}$  für alle Ecken  $u$  ist.*

*Beweis.* Angenommen, der Satz ist falsch. Unter allen Gegenbeispielen mit  $p$  Ecken wählen wir einen Graphen  $G = (V, E)$  mit der maximalen Anzahl von Kanten. Es seien  $u, v$  nichtverbundene Ecken in  $G$ , dann ist  $G \cup uv$  Hamiltonsch. In  $G$  existiert also ein Hamiltonscher Weg ( $u = u_1, u_2, \dots, u_p = v$ ). Es seien  $A = \{u_i : uu_{i+1} \in E\}$  und  $B = \{u_i : u_i v \in E\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq p$ . Da  $v \notin A \cup B$  ist, muss es eine Ecke  $u_k$  geben mit  $u_k \in A \cap B$ . Das bedeutet aber, dass  $u_k v \in E$  und  $uu_{k+1} \in E$  sind, so dass wir den Hamiltonschen Kreis ( $u = u_1, \dots, u_k, v = u_p, u_{p-1}, \dots, u_{k+1}, u$ ) erhalten, also war  $G$  doch Hamiltonsch (Figur 7.8).  $\square$



Figur 7.8

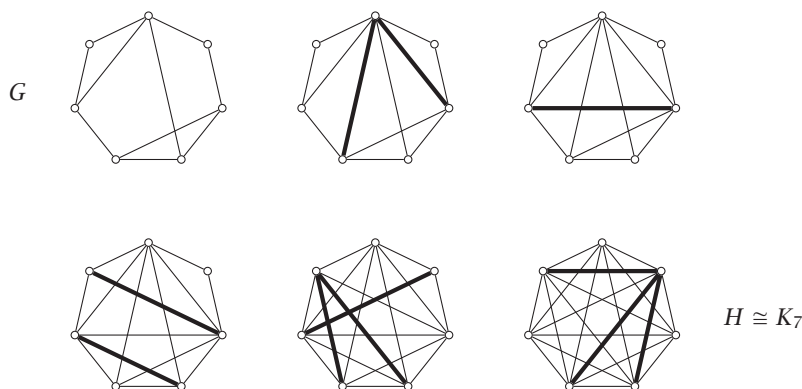
Analysieren wir den Beweis, so sehen wir, dass das folgende Lemma gilt: Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $p$  Ecken und  $u, v$  nichtbenachbarte Ecken mit  $d(u) + d(v) \geq p$ . Dann ist  $G$  Hamiltonsch genau dann, wenn  $G \cup uv$  Hamiltonsch ist. Das heißt aber: Hat  $G$  ein Paar solcher nichtbenachbarter Ecken  $u, v$  mit  $d(u) + d(v) \geq p$ , so können wir die Kante  $uv$  hinzufügen, ohne die Eigenschaft von  $G$ , Hamiltonsch oder nicht-Hamiltonsch zu sein, zu verändern. Existiert in dem neuen Graphen  $G_1 = G \cup uv$



wiederum ein solches Paar, so können wir abermals die entsprechende Kante hinzufügen, usf. Der Prozess stoppt, wenn wir schließlich einen Graphen  $H$  konstruiert haben mit der Eigenschaft:  $d_H(u) + d_H(v) < p$  für je zwei in  $H$  nichtbenachbarte Ecken  $u$  und  $v$ . Die Leser können sich mühelos davon überzeugen, dass es auf die Reihenfolge nicht ankommt, in der die Kanten hinzugefügt werden – wir erhalten immer denselben Endgraphen  $H$ . Somit können wir unzweideutig die folgende Definition geben.

**Definition.** Sei  $G$  ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken. Der (Hamiltonsche) *Abschluss*  $H = h(G)$  von  $G$  ist der kleinste Obergraph von  $G$ , für den  $d_H(u) + d_H(v) < p$  für alle in  $H$  nichtbenachbarte Ecken  $u, v$  gilt, wobei  $d_H(v)$  den Grad von  $v$  in  $H$  bezeichnet.

Figur 7.9 zeigt die Konstruktion eines Abschlusses. Die jeweils hinzugefügten Kanten sind fett gedruckt.



Figur 7.9

Aus unseren Überlegungen erhalten wir sofort den grundlegenden Satz.

**Satz 7.11** (Bondy–Chvátal). *Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann Hamiltonsch, wenn sein Abschluss  $h(G)$  Hamiltonsch ist.*

Können wir aus dem Graphen  $G$  schließen, dass  $h(G)$  Hamiltonsch ist, so muss es auch  $G$  sein. Insbesondere gilt also:

**Folgerung 7.12.** *Ist  $G$  ein einfacher Graph, dessen Abschluss ein vollständiger Graph ist, so ist  $G$  Hamiltonsch.*

Das letzte Resultat gibt uns eine Methode an die Hand, wie wir hinreichende Bedingungen aus der Gradfolge ableiten können.

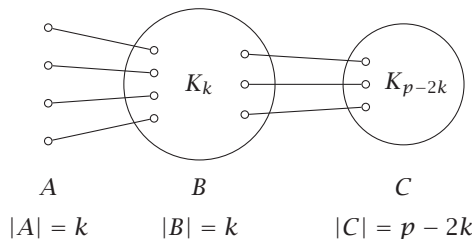
**Satz 7.13** (Chvátal). *Es sei  $G$  ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken. Wir nummerieren die Ecken  $v_1, \dots, v_p$ , so dass für die Gradfolge  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p$  gilt, wobei  $d_i = d(v_i)$  abgekürzt wird. Wenn aus  $d_k \leq k < \frac{p}{2}$  stets  $d_{p-k} \geq p - k$  folgt, so ist  $G$  Hamiltonsch.*

*Beweis.* Wir wollen beweisen, dass die Voraussetzungen des Satzes die Vollständigkeit des Abschlussgraphen  $H = h(G)$  bedingen. Angenommen, dies ist nicht so, dann

wählen wir ein Paar von in  $H$  nichtverbundenen Ecken  $u, v$ , für das  $d_H(u) + d_H(v)$  maximal groß ist. Es sei  $d_H(u) \leq d_H(v)$ . Da nach Definition von  $H$ ,  $d_H(u) + d_H(v) \leq p - 1$  sein muss, folgt  $d_H(u) < \frac{p}{2}$ . Wir setzen  $k = d_H(u)$  und zeigen, dass mit diesem Index  $k$  die Bedingung des Satzes verletzt ist. Es seien  $A$  und  $B$  die Mengen der zu  $u$  bzw.  $v$  in  $H$  nichtbenachbarten Ecken. Wir haben  $|A| = p - 1 - k$ ,  $|B| = p - 1 - d_H(v) \geq d_H(u) = k$  und nach Wahl von  $u$  und  $v$  gilt ferner  $d_H(x) \leq k$  für alle  $x \in B$  und  $d_H(x) \leq d_H(v)$  für alle  $x \in A$ . Aus  $d(x) \leq d_H(x)$  ersehen wir, dass es in  $G$  mindestens  $k$  Ecken gibt (jene aus  $B$ ), für die  $d(x) \leq k$  ist, d.h. es gilt  $d_k \leq k < \frac{p}{2}$ , und dass es in  $G$  mindestens  $p - k$  Ecken gibt (jene aus  $A$  und  $u$ ), für die  $d(x) \leq d_H(v) \leq p - 1 - k$  ist, d.h. es gilt  $d_{p-k} \leq p - k - 1$ , und dies ist unser gewünschter Widerspruch.  $\square$

Wie gut ist dieser Satz? Er beinhaltet natürlich Diracs Ergebnis (wegen  $d_1 \geq \frac{p}{2}$  ist dies trivial) und auch Ores, wie man leicht zeigen kann. Aber für den Graphen aus Figur 7.9 kann er nicht angewandt werden. Hier haben wir die Gradfolge  $(2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$  und die Bedingung aus 7.13 ist schon für  $k = 2$  wegen  $d_5 = 3 < 5$  nicht erfüllt. Die Aussage 7.12 ist also stärker. In dem folgenden Sinn ist aber 7.13 bestmöglich. Seien  $d = (d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p)$  und  $d' = (d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_p)$  Gradfolgen. Wir sagen  $d'$  *dominiert*  $d$ , wenn  $d_i \leq d'_i$  für alle  $i$  gilt, in Zeichen  $d < d'$ . Die Folgen werden mittels  $<$  zu einer geordneten Menge. Es ist unmittelbar klar, dass mit jeder Folge  $d$ , welche Chvátals Bedingung in 7.13 erfüllt, dies auch für jede Folge zutrifft, die  $d$  dominiert. In der Sprache der Ordnungstheorie heißt dies: Die Menge der Folgen, welche 7.13 erfüllen, bilden ein oberes Ideal bezüglich der Ordnung  $<$ , welches laut 7.13 nur aus Hamiltonschen Folgen besteht. Dieses Ideal kann nun innerhalb der Klasse der Hamiltonschen Folgen nicht mehr vergrößert werden. Es sei nämlich  $d = (d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p)$  eine Folge, welche 7.13 verletzt, dann gibt es ein  $k < \frac{p}{2}$  mit  $d_k \leq k$  und  $d_{p-k} \leq p - k - 1$ . Die Folge  $d$  wird somit durch  $d(k, p) = (\underbrace{k, k, \dots, k}_k, \underbrace{p - k - 1, \dots, p - k - 1}_{p-2k}, \underbrace{p - 1, \dots, p - 1}_k)$  dominiert. Zu

dieser Gradfolge gibt es aber einen Graphen  $G(k, p)$  und er ist, wie man sich leicht überzeugen kann, eindeutig bestimmt (Figur 7.10).



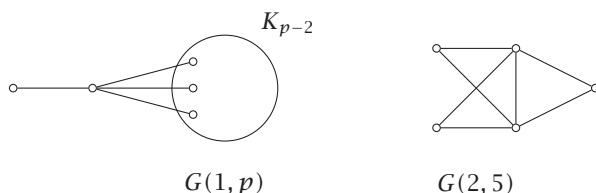
Figur 7.10

Die Eckenmenge von  $G(k, p)$  besteht, wie angegeben, aus drei Teilen  $A, B, C$ . Die Untergraphen auf  $B$  und  $C$  sind vollständig, zwischen Ecken aus  $A$  gibt es keine Kanten und je zwei Ecken aus  $A$  und  $B$  bzw.  $B$  und  $C$  sind verbunden.  $G(k, p)$  ist aber nicht Hamiltonsch, wie  $c(G \setminus B) = k + 1 > k = |B|$  und 7.7 lehrt.

Ein Weiteres folgt aus unseren Überlegungen. Es sei  $G = (V, E)$  ein nicht-Hamiltonscher Graph mit Gradfolge  $d = (d_1 \leq \dots \leq d_p)$ , dann wird  $d$  durch eine Folge  $d(k, p)$

für ein gewisses  $k < \frac{p}{2}$  dominiert. Insbesondere gilt somit nach 1.2,  $|E| = \frac{1}{2} \sum d_i \leq \frac{1}{2}(k^2 + (p - 2k)(p - k - 1) + k(p - 1)) = \binom{p-k}{2} + k^2$ . Man rechnet nun sofort nach, dass stets  $\binom{p-k}{2} + k^2 \leq \binom{p-1}{2} + 1$  gilt mit Gleichheit für  $k = 1$  oder  $k = 2$ ,  $p = 5$ . Somit erhalten wir:

**Folgerung 7.14.** *Hat ein einfacher Graph  $p$  Ecken und mehr als  $\binom{p-1}{2} + 1$  Kanten, so ist er Hamiltonsch. Die einzigen nicht-Hamiltonschen Graphen mit  $\binom{p-1}{2} + 1$  Kanten sind die Graphen aus Figur 7.11.*



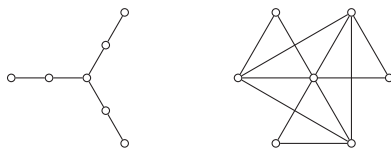
Figur 7.11

Besonders interessieren natürlich die regulären Graphen. Ist  $G$   $k$ -regulär mit  $k \geq \frac{p}{2}$ , dann ist  $G$  Hamiltonsch nach 7.10. Der erste Fall, der von 7.10 oder 7.13 nicht gedeckt ist, ist  $k = \frac{p-1}{2}$ , doch gilt auch hier noch das entsprechende Ergebnis, dessen (nicht schwierigen) Beweis sich die Leser überlegen mögen.

**Satz 7.15** (Nash-Williams). *Ein einfacher  $k$ -regulärer Graph auf  $p = 2k + 1$  Ecken ist Hamiltonsch.*

Kann man das letzte Resultat noch verschärfen? Offensichtlich muss ein  $k$ -regulärer Graph auf  $p = 2k + 2$  Ecken nicht mehr Hamiltonsch sein. Der Graph  $G$  bestehend aus zwei Komponenten, jeweils isomorph zu  $K_{k+1}$ , ist ein Gegenbeispiel. Setzt man aber  $G$  als zusammenhängend voraus, so muss tatsächlich wieder ein Hamiltonscher Kreis existieren, ja es gilt sogar: Ist der einfache Graph 2-fach zusammenhängend und  $k$ -regulär mit  $k \geq \frac{p}{3}$ , so ist  $G$  Hamiltonsch. Einer Verschärfung dieses Resultats steht wieder unser allgegenwärtiger Petersen Graph im Wege.

Weitere interessante hinreichende Bedingungen für die Existenz Hamiltonscher Kreise ergeben sich aus der Betrachtung der Potenzen von Graphen. Die  $m$ -te Potenz  $G^m$  eines Graphen  $G$  ist der Graph, dessen Eckenmenge zu der von  $G$  korrespondiert und in dem Ecken genau dann verbunden sind, wenn sie in  $G$  durch einen Weg der Länge  $\leq m$  verbunden sind. Figur 7.12 zeigt einen Baum  $T$  und seine zweite Potenz  $T^2$ .



Figur 7.12

Sekanina hat 1960 gezeigt, dass die dritte Potenz  $G^3$  jedes zusammenhängenden Graphen  $G$  Hamiltonsch ist. Für das Quadrat  $G^2$  muss dies nicht mehr gelten, wie der

nicht-Hamiltonsche Graph  $T^2$  aus Figur 7.12 illustriert. Harary und Schwenk haben dazu bewiesen, dass das Quadrat eines Baumes  $G$  genau dann Hamiltonsch ist, wenn  $G$  nicht den Baum  $T$  aus Figur 7.12 als Untergraphen enthält. Allgemein steht aber eine Charakterisierung jener Graphen, deren Quadrat Hamiltonsch ist, noch aus. Auf der positiven Seite hat Fleischner 1974 den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 7.16** (Fleischner). *Das Quadrat  $G^2$  jedes 2-fach zusammenhängenden Graphen ist Hamiltonsch.*

Bevor wir dieses Kapitel über Hamiltonsche Kreise schließen, wollen wir noch auf einen interessanten Aspekt eingehen, der seinen Ausgangspunkt in 7.14 hat. Dort haben wir gezeigt, dass ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken und mindestens  $\binom{p-1}{2} + 2$  Kanten stets einen Hamiltonschen Kreis enthält. Oder andersherum formuliert: Ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken, der *keinen* Kreis  $C_p$  der Länge  $p$  enthält, weist höchstens  $\binom{p-1}{2} + 1$  Kanten auf. Dies legt das folgende allgemeine *Extremalproblem* nahe: Sei  $H$  ein einfacher Graph. Mit  $\text{ex}(H, p)$  bezeichnen wir die Maximalzahl von Kanten eines einfachen Graphen auf  $p$  Ecken, der  $H$  *nicht* als Untergraphen enthält.

Wir konzentrieren uns auf zwei wichtige Graphenklassen:  $H = P_k$  (Weg der Länge  $k$ ) und  $K_k$ .

**Lemma 7.17.** *Sei  $G$  ein zusammenhängender einfacher Graph mit  $p \geq 3$  Ecken, in dem  $d(u) + d(v) \geq k$  für je zwei nichtbenachbarte Ecken  $u, v$  gilt. Falls  $k = p$  ist, enthält  $G$  einen (Hamiltonschen) Weg  $P_{p-1}$ . Falls  $k < p$  ist, enthält  $G$  einen Weg  $P_k$  der Länge  $k$ .*

*Beweis.* Der Fall  $k = p$  wurde in 7.10 behandelt. Sei nun  $k < p$ , und  $P = (u_0, u_1, \dots, u_\ell)$  ein längster Weg in  $G$ . Alle Nachbarn von  $u_0$  und  $u_\ell$  müssen auf  $P$  liegen. Angenommen  $\ell \leq k - 1$ , dann kann  $G$  keinen Kreis der Länge  $\ell + 1$  enthalten. Denn wegen  $\ell + 1 \leq k \leq p - 1$  existiert eine Ecke außerhalb  $C$ , die mit einer Ecke von  $C$  verbunden sein müsste ( $G$  ist zusammenhängend!), und wir hätten einen Weg der Länge  $\ell + 1$ . Insbesondere gilt also  $u_0 u_\ell \notin E$ . Wie im Beweis von 7.10 setzen wir  $A = \{u_i : u_0 u_{i+1} \in E\}$ ,  $B = \{u_i : u_i u_\ell \in E\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $|A| + |B| = d(u_0) + d(u_\ell) \geq k$ ,  $u_\ell \notin A \cup B$  und  $A \cap B = \emptyset$ , da wir ansonsten den Kreis  $(u_0, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_\ell, u_i, u_{i-1}, \dots, u_1, u_0)$  der Länge  $\ell + 1$  erhielten. Daraus folgt schließlich  $k \leq d(u_0) + d(u_\ell) \leq \ell$ , also hat  $P$  doch mindestens Länge  $k$ .  $\square$

**Satz 7.18.** *Es gilt  $\text{ex}(P_k, p) \leq \frac{k-1}{2}p$  mit Gleichheit genau dann, wenn alle Komponenten isomorph zu  $K_k$  sind.*

*Beweis.* Sei  $k$  fest gewählt. Für  $p \leq k$  ist die Aussage trivialerweise richtig. Wir nehmen induktiv an, dass die Behauptung richtig ist für weniger als  $p$  Ecken. Es sei nun  $G = (V, E)$  ein Graph auf  $p > k$  Ecken ohne Weg der Länge  $k$ . Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so können wir sofort die Induktionsannahme auf die einzelnen Komponenten anwenden.  $G$  sei also zusammenhängend, dann enthält  $G$  keinen vollständigen Untergraphen  $K_k$ , und ferner nach 7.17 eine Ecke  $u$  mit  $d(u) \leq \frac{k-1}{2}$ . Da  $G \setminus u$  nach Induktion kein Extremalgraph ist (d. h. für den Gleichheit in 7.18 gilt), folgern wir

$$|E| = d(u) + |E(G \setminus u)| < \frac{k-1}{2} + \frac{k-1}{2}(p-1) = \frac{k-1}{2}p,$$

womit beide Behauptungen bewiesen sind.  $\square$

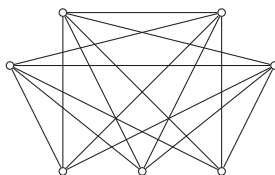
Der genaue Wert von  $\text{ex}(P_k, p)$  ist für beliebiges  $k$  und  $p$  nicht bekannt. Für den Fall  $k = p - 1$ , d. h. für die maximal mögliche Kantenzahl in einem einfachen Graphen ohne Hamiltonschen Weg, kann man ähnlich wie in 7.14 die Formel  $\text{ex}(P_{p-1}, p) = \binom{p-1}{2}$  nachweisen. Die Extremalgraphen bestehen aus einer Komponente  $K_{p-1}$  und einer weiteren isolierten Ecke, und auch hier gibt es einen weiteren Graphen ( $p = 4, k = 3$ ), nämlich  $K_{1,3}$ .

Der wichtigste und historisch auch erste Extremalsatz betrifft Graphen, die keinen vollständigen Untergraphen  $K_k$  enthalten. Die entsprechende Formel für  $\text{ex}(K_k, p)$  wurde von Turán (wie er selber berichtet, in einem Kriegsgefangenenlager) 1941 gefunden. Wir geben eine Verschärfung seines Resultates von Erdős, der die wichtigsten Arbeiten in diesem Bereich der Graphentheorie verfasst hat.

**Satz 7.19.** *Es sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph, der keinen vollständigen Untergraphen  $K_k$  enthält. Dann existiert ein  $(k - 1)$ -chromatischer Graph  $H$  auf  $V$ , so dass  $d_H(v) \geq d(v)$  für alle  $v \in V$  gilt.*

*Beweis.* Für  $k = 1$  oder  $2$  ist die Behauptung klar. Es sei also  $k \geq 3$  und der Satz richtig für alle kleineren Werte von  $k$ . Wir wählen eine Ecke  $u$  von maximalem Grad in  $G$  und bezeichnen mit  $G_0$  den auf den Nachbarn  $U$  von  $u$  induzierten Untergraphen.  $G_0$  enthält keinen Graphen  $K_{k-1}$ , da wir ansonsten zusammen mit  $u$  einen Graphen  $K_k$  in  $G$  hätten, also existiert nach Induktionsvoraussetzung ein  $(k-2)$ -chromatischer Graph  $H_0$  auf  $U$  mit  $d_{H_0}(v) \geq d_{G_0}(v)$  für alle  $v \in U$ . Wir konstruieren uns nun  $H$ , indem wir zu  $H_0$  alle Kanten zwischen Ecken aus  $U$  und  $V \setminus U$  hinzufügen. Offensichtlich ist  $H$   $(k - 1)$ -chromatisch (wir können allen Ecken aus  $V \setminus U$  dieselbe Farbe erteilen). Ist  $v \in U$ , so gilt  $d_H(v) = d_{H_0}(v) + |V| - |U| \geq d_{G_0}(v) + |V| - |U| \geq d(v)$ , und ist  $v \in V \setminus U$ , so haben wir nach Wahl von  $u$  ebenfalls  $d_H(v) = |U| = d(u) \geq d(v)$ .  $\square$

Mit Hilfe von 7.19 können wir nun sofort  $\text{ex}(K_k, p)$  und die Extremalgraphen bestimmen. (Den Lesern wird sicherlich die verblüffende Ähnlichkeit zu den Überlegungen vor 7.14 aufgefallen sein.) Der  $(k - 1)$ -chromatische Graph  $H$  habe die Farbklassen  $A_1, \dots, A_{k-1}$  mit  $|A_i| = p_i$ , wobei wir  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{k-1}$  annehmen. Dann gilt  $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) \leq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_H(v) = |E(H)| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} p_i p_j$ . Der Ausdruck  $\sum_{1 \leq i < j \leq k-1} p_i p_j$  ist maximal (und zwar eindeutig), wenn die  $p_i$ 's so gleich wie möglich sind, d. h. wenn  $p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1-r} = m$ ,  $p_{k-r} = \dots = p_{k-1} = m + 1$  ist, wobei  $p = m(k - 1) + r$  ist mit  $0 \leq r \leq k - 2$ . Den entsprechenden  $(k - 1)$ -chromatischen Graphen wollen wir mit  $T(k - 1, p)$  bezeichnen.  $T(k - 1, p)$  besteht also aus  $k - 1$  unabhängigen Mengen der Mächtigkeit  $m$  oder  $m + 1$  und allen Kanten zwischen Ecken aus verschiedenen Mengen. Figur 7.13 zeigt den Graphen  $T(3, 7)$ .



Figur 7.13

$T(k-1, p)$  enthält  $\frac{1}{2}[(k-1-r)m(p-m) + r(m+1)(p-m-1)]$  Kanten und dies ist, wie man durch eine leichte Rechnung bestätigt, gleich  $\frac{(k-2)(p^2-r^2)}{2(k-1)} + \binom{r}{2}$ . Diese letzte Zahl ist demnach eine obere Schranke für  $\text{ex}(K_k, p)$ . Da aber der Graph  $T(k-1, p)$  offensichtlich keinen vollständigen Untergraphen  $K_k$  enthält, muss diese Zahl der genaue Wert von  $\text{ex}(K_k, p)$  sein. Auch die Extremalgraphen sind dadurch bestimmt. Ist nämlich  $G$  Extremalgraph, so muss  $d(v) = d_H(v)$  und  $H = T(k-1, p)$  sein. Daraus folgt aber mit Induktion sofort, dass  $G$   $(k-1)$ -chromatisch ist und daher gleich  $T(k-1, p)$  sein muss. In Zusammenfassung erhalten wir:

**Satz 7.20** (Turán). Für  $k \geq 2$  gilt  $\text{ex}(K_k, p) = \frac{(k-2)(p^2-r^2)}{2(k-1)} + \binom{r}{2}$ , wobei  $p = m(k-1) + r$ ,  $0 \leq r \leq k-2$ , ist.  $T(k-1, p)$  ist der eindeutige Extremalgraph.

Beispielsweise hat ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken, der keine Dreiecke besitzt, höchstens  $\lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$  Kanten, und  $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$  ist der eindeutige Extremalgraph.

Wir wollen noch ein verwandtes Problem lösen. Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken und  $\bar{G}$  sein Komplement. Wir wollen die *Totalzahl*  $\Delta$  der Dreiecke in  $G$  und  $\bar{G}$  zählen. Eine 3-Menge  $\{u, v, w\} \subseteq V$  nennen wir *schlecht*, falls  $u, v, w$  weder in  $G$  noch in  $\bar{G}$  ein Dreieck ergeben. Genau zwei der Ecken  $u, v, w$  haben dann die Eigenschaft, dass eine Kante in  $G$  liegt und die andere in  $\bar{G}$ . Da für eine beliebige Ecke  $u \in V$  es offenbar genau  $d(u)(p-1-d(u))$  solcher Kantenpaare inzident mit  $u$  gibt, ist die Zahl der schlechten Dreiecke  $\frac{1}{2} \sum_{u \in V} d(u)(p-1-d(u))$  und damit die Totalzahl der Dreiecke in  $G$  oder  $\bar{G}$ ,  $\Delta = \binom{p}{3} - \frac{1}{2} \sum_{u \in V} d(u)(p-1-d(u))$ . Wegen  $d(u)(p-1-d(u)) \leq (\frac{p-1}{2})^2$  erhalten wir  $\Delta \geq \binom{p}{3} - \frac{p}{2} (\frac{p-1}{2})^2 = \frac{p(p-1)(p-5)}{24}$ . Insbesondere gilt also für jeden Graphen  $G$  auf  $p \geq 6$  Ecken, dass entweder  $G$  oder  $\bar{G}$  ein Dreieck enthält. Für  $p = 5$  ist dies nicht mehr richtig:  $G = C_5$  mit  $\bar{G} = C_5$  ist ein Gegenbeispiel.

Dieses Ergebnis ist als Puzzle bekannt: Zeige, dass in jeder Gesellschaft von sechs Personen es drei Leute gibt, die sich alle untereinander kennen, oder drei, von denen keine eine andere kennt. Die Verallgemeinerung dieses Rätsels führt zu einem der schönsten und vielseitigsten Sätze der Kombinatorik, dem Satz von Ramsey, mit dem wir dieses Kapitel schließen wollen.

**Satz 7.21** (Ramsey). Seien  $k, \ell \geq 1$  natürliche Zahlen. Dann gibt es eine kleinste Zahl  $R(k, \ell)$ , genannt *Ramsey Zahl*, so dass für jeden einfachen Graphen  $G$  auf  $p \geq R(k, \ell)$  Ecken entweder  $G$  einen vollständigen Untergraphen  $K_k$  enthält oder der komplementäre Graph  $\bar{G}$  einen vollständigen Untergraphen  $K_\ell$ .

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $k + \ell$ . Falls  $k = 1$  oder  $\ell = 1$  ist, so ist die Behauptung trivialerweise richtig. Für  $k = 2$  und  $\ell \geq 2$  haben wir  $R(2, \ell) = \ell$ , da ein Graph  $G$  auf  $\ell$  Ecken entweder eine Kante, also einen Untergraphen  $K_2$  enthält oder  $\bar{G}$  isomorph zu  $K_\ell$  ist. Ebenso gilt  $R(k, 2) = k$  für  $k \geq 2$ . Wir nehmen nun induktiv an, dass die Behauptung richtig ist für alle Paare  $(k', \ell')$  mit  $2 \leq k' \leq k-1$ ,  $2 \leq \ell' \leq \ell$  und für alle Paare  $(k', \ell')$  mit  $2 \leq k' \leq k$ ,  $2 \leq \ell' \leq \ell-1$ . Wir setzen  $p_1 := R(k-1, \ell)$ ,  $p_2 := R(k, \ell-1)$  und weisen nach, dass

$$R(k, \ell) \leq p_1 + p_2 \quad (*)$$

gilt. Sei  $G = (V, E)$  also ein beliebiger Graph auf  $p \geq p_1 + p_2$  Ecken und  $v \in V$ . Unter den  $p - 1$  Ecken  $\neq v$  gibt es wegen  $p - 1 \geq p_1 + p_2 - 1$  entweder mindestens  $p_1$ , die mit  $v$  verbunden sind, oder mindestens  $p_2$ , die mit  $v$  nicht verbunden sind. Im ersten Fall existiert im Untergraphen dieser  $p_1 = R(k-1, \ell)$  Ecken nach Induktionsvoraussetzung ein vollständiger Teilgraph  $K_{k-1}$ , welcher zusammen mit  $v$  einen  $K_k$  in  $G$  ergibt, oder ein vollständiger Teilgraph  $K_\ell$  in  $\overline{G}$ . Im zweiten Fall existiert auf den  $p_2 = R(k, \ell - 1)$  Ecken ein vollständiger Teilgraph  $K_k$  in  $G$  oder ein  $K_{\ell-1}$  im Komplement, welcher zusammen mit  $v$  einen  $K_\ell$  in  $\overline{G}$  ergibt. In beiden Fällen gilt somit die Behauptung des Satzes, und der Beweis ist beendet.  $\square$

Das Ergebnis unseres Puzzles von oben besagt also  $R(3, 3) = 6$ . Nur wenige Ramsey Zahlen sind bekannt und aufgrund von Komplexitätsbetrachtungen besteht auch keinerlei Hoffnung, jemals eine geschlossene Formel für die Ramsey Zahlen zu erhalten. Die Bedeutung des Ramsey'schen Satzes liegt darin, dass er, wie auch der Satz von Hall 6.3, eine allgemeine *Existenzaussage* beinhaltet. Über die mannigfachen Variationen und Verallgemeinerungen von 7.21 können sich die Leser anhand des Buches von Graham-Rothschild-Spencer einen Überblick verschaffen.

## Übungen zu Kapitel 7

1. Vervollständige den Beweis von 7.2(v).
2. Verifiziere Eberhards Theorem für  $p_3 = 2$ ,  $p_4 = 4$ ,  $p_5 = p_9 = 1$ . Was ist das kleinste  $p_6$ ?
- 3.\* Beweise, dass der Graph aus Figur 7.6 nicht-Hamiltonsch ist.
4. Welche Würfel  $Q_n$  sind Hamiltonsch, welche Graphen  $K_{m,n}$ ?
- 5.\* Ein Graph  $G$  heißt *fast-Hamiltonsch*, falls  $G$  nicht Hamiltonsch ist, aber jeder Teilgraph  $G \setminus u$ . Zeige, dass es keinen fast-Hamiltonschen Graphen mit  $p \leq 8$  Ecken gibt. Gib ein Beispiel eines solchen Graphen mit 10 Ecken.
6. Die Zahlen  $\alpha(G)$  und  $\kappa(G)$  seien definiert wie in 7.8. Zeige: Gilt  $d(u) + d(v) \geq p$  für jedes Paar nichtbenachbarter Ecken  $u, v$ , so ist  $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ .
7. Konstruiere einen nicht-Hamiltonschen Graphen auf 10 Ecken, für den  $d(u) + d(v) \geq 9$  für je zwei nichtbenachbarte Ecken gilt.
8. Etwas schwieriger. Beweise: Gilt  $d(u) + d(v) \geq p + 1$  für je zwei nichtbenachbarte Ecken  $u, v$ , so gibt es einen Hamiltonschen Weg zwischen je zwei Ecken des Graphen. Zeige, dass  $d(u) + d(v) \geq p$  nicht genügt.
- 9.\* Zeige, dass es beim Hamiltonschen Abschluss (siehe 7.11) nicht auf die Reihenfolge der hinzugefügten Kanten ankommt.
- 10.\* Beweise das folgende Analogon zu 7.13: Sei  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p$  die Gradfolge des einfachen Graphen  $G$ . Wenn aus  $d_k \leq k - 1 < \frac{p-1}{2}$  stets  $d_{p-k+1} \geq p - k$  folgt, so besitzt  $G$  einen Hamiltonschen Weg.
11. Folgere aus der vorhergehenden Übung, dass ein einfacher Graph mit  $p$  Ecken und mehr als  $\binom{p-1}{2}$  Kanten stets einen Hamiltonschen Weg besitzt.
12. Etwas schwieriger. Beweise 7.15. (Hinweis: Zeige zunächst, dass  $G$  jedenfalls einen Hamiltonschen Weg besitzt.)
13. Zeige, dass  $G^3$  stets Hamiltonsch ist, falls  $G$  mindestens 3 Ecken hat und zusammenhängend ist. (Hinweis: Beweise dies zunächst für Bäume.)
- 14.\* Aus Übung 11 wissen wir, dass  $\text{ex}(P_{p-1}, p) \leq \binom{p-1}{2}$  ist. Zeige Gleichheit und bestimme die Extremalgraphen.
15. Beweise: Ist  $G$  einfach und 2-fach zusammenhängend mit  $d(u) \geq k$ ,  $k < \frac{p}{2}$ , für alle Ecken  $u$ , so enthält  $G$  einen Kreis der Länge mindestens  $2k$ .
- 16.\* Folgere aus der vorhergehenden Übung: Ist  $G$  ein einfacher Graph auf  $p$  Ecken und mehr als  $\frac{k(p-1)}{2}$  Kanten, so enthält  $G$  einen Kreis der Länge  $\geq k + 1$ . Bestimme alle Graphen mit  $\frac{k(p-1)}{2}$  Kanten ohne Kreis der Länge  $\geq k + 1$ .
17. Sei  $\alpha(G)$  die Unabhängigkeitszahl und  $d(G)$  die Trägerzahl (= Minimalzahl von Ecken, die alle Kanten treffen, siehe 6.1). Zeige, dass stets  $\alpha(G) + d(G) = p$  gilt und folgere daraus für einfache dreiecksfreie Graphen  $q \leq \alpha d$ ,  $q \leq \frac{p^2}{4}$ .
18. Etwas schwieriger. Wir wissen, dass ein einfacher Graph  $G$  auf  $p$  Ecken ohne Dreiecke höchstens  $\frac{p^2}{4}$  Kanten besitzt. Sei  $p = 2n$  und  $G$  habe  $\frac{p^2}{4} + 1$  Kanten. Zeige, dass dann  $G$  nicht nur ein, sondern mindestens  $n$  Dreiecke enthält.
19. Verallgemeinere den Ramseyschen Satz. Zu  $\ell_1, \dots, \ell_r$  gibt es eine kleinste Zahl  $R(\ell_1, \dots, \ell_r)$ , so dass folgendes gilt: Zu jedem Graphen  $G$  auf  $p \geq R(\ell_1, \dots, \ell_r)$  Ecken und zu jeder Färbung der Kanten von  $G$  mit  $r$  Farben gibt es ein  $i$ , so dass  $G$  einen vollständigen Untergraphen auf  $\ell_i$  Ecken enthält, dessen Kanten alle mit Farbe  $i$  gefärbt sind.
- 20.\* Sei  $r_m = R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_m)$ . Wir wissen  $r_2 = 6$ . Zeige durch Induktion, dass  $r_{m+1} \leq (m+1)(r_m - 1) + 2$  für alle  $m \geq 2$  gilt.



# 8 Matroide

Wie schon bei den vorangegangenen Themen beginnt auch unsere letzte Theorie in den 1930'er Jahren – und zwar mit dem Satz 4.11 von Whitney. Rufen wir uns den dort abgehandelten Gedanken in Erinnerung:  $G = (V, E)$  sei ein Graph. Wir nennen  $G^* = (V^*, E^*)$  ein Whitney-Dual, wenn eine Bijektion  $\varphi : E \rightarrow E^*$  existiert, so dass  $C \subseteq E$  genau dann ein Polygon in  $G$  ist, wenn  $\varphi C \subseteq E^*$  ein Bond in  $G^*$  ist. Der Inhalt von Whitneys Satz war: Genau die plättbaren Graphen  $G$  besitzen ein  $W$ -Dual, nämlich den dualen Graphen  $G^*$  irgendeiner ebenen Realisierung. Was aber, wenn  $G$  nicht plättbar ist, können wir auch dann eine sinnvolle „duale“ Struktur erklären?

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchte Whitney die genaue Struktur von Polygonen und Bonds und kam dadurch auf den Veblenschen Ansatz der Inzidenzmatrix zurück. Es sei  $A = (a_{ij})$  die Ecken-Kanten Inzidenzmatrix des Graphen  $G = (V, E)$ . Fassen wir  $A$  als Matrix über  $\text{GF}(2)$  auf, so sind die Spalten  $s_j$  (entsprechend den Kanten  $e_j$ ) 0,1-Vektoren der Länge  $|V|$ , und wir haben gesehen, dass die minimalen linear abhängigen Mengen  $\{s_{j_1}, \dots, s_{j_t}\}$  genau den Polygonen  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_t}\}$  von  $G$  entsprechen. Umgekehrt formuliert ist  $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell}\}$  genau dann linear unabhängig, wenn  $I = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_\ell}\}$  keine Polygone enthält, d. h. wenn  $I$  ein *Wald* ist.

Was für strukturelle Eigenschaften haben die Wälder oder Kreise? Die Abstraktion dieser Eigenschaften (und entsprechend dazu, der linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit in Vektorräumen) führte zu einer Klasse kombinatorischer Strukturen, die vor allem seit den Arbeiten von Tutte und Edmonds in den 1960'er Jahren zu ganz neuen Einsichten und Querverbindungen geführt haben. Wir beginnen mit der folgenden grundlegenden Definition.

**Definition.** Ein *Matroid*  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S)$  ist eine endliche Menge  $S$  zusammen mit einer Familie  $\mathcal{G} \subseteq 2^S$  von Untermengen von  $S$ , die folgende Axiome erfüllt:

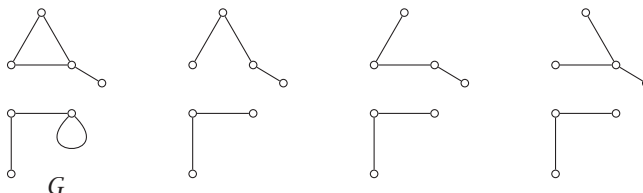
- (1)  $\emptyset \in \mathcal{G}; I \in \mathcal{G}, J \subseteq I \Rightarrow J \in \mathcal{G}$ .
- (2) Für jedes  $A \subseteq S$  haben alle maximalen Untermengen von  $A$ , die in  $\mathcal{G}$  liegen, dieselbe Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit nennen wir den *Rang*  $r(A)$  von  $A$ , und  $r(S) = r(\mathcal{M})$  den *Rang des Matroides*.

Die Mengen aus  $\mathcal{G}$  heißen die *unabhängigen Mengen* des Matroids.

In Worten: Jede Untermenge einer unabhängigen Menge ist unabhängig, und die maximalen unabhängigen Untermengen einer Menge  $A \subseteq S$  haben die gleiche Mächtigkeit. Diese Axiome sind, wenn wir „unabhängig“ durch *linear unabhängig* ersetzen, wohlbekannte Sätze der Linearen Algebra. Ist also  $V$  irgendein Vektorraum, so bildet jede endliche Menge  $S$  von Vektoren, mit den linear unabhängigen Mengen als Familie  $\mathcal{G}$ , ein Matroid. Jedes auf solche Weise erhaltene Matroid nennen wir ein *lineares Matroid*. Von diesem Urtypus, der ja immer durch eine Matrix dargestellt werden kann, leitete Whitney natürlich den Namen *Matroid* ab.

Der folgende Isomorphiebegriff ist selbstverständlich: Zwei Matroide  $\mathcal{M}(S)$  und  $\mathcal{M}'(S')$  heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion  $\varphi : S \rightarrow S'$  gibt mit  $I \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \varphi I \in \mathcal{G}'$ .

Die zweite - und uns zuvorderst interessierende - Klasse bilden die Graphen. Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph. Wir erklären eine Kantenmenge  $I \subseteq E$  als unabhängig, wenn der Untergraph  $G_I = (V, I)$  ein *Wald* in  $G$  ist. Der Kürze halber identifizieren wir stets  $A \subseteq E$  mit dem Untergraphen  $G_A = (V, A)$ . Offensichtlich ist für die Familie der Wälder Axiom 1 erfüllt, aber auch 2. Ist nämlich  $A \subseteq E$  und bezeichnet  $c(A)$  die Anzahl der Komponenten von  $A$ , dann wissen wir, dass für jeden maximalen Wald  $I$  in  $A$  gilt:  $|I| = |V| - c(A)$ . Die Mächtigkeit einer in  $A$  maximalen unabhängigen Menge ist also stets dieselbe, nämlich  $r(A) = |V| - c(A)$ .



Figur 8.1

Wir nennen das so erklärte Matroid auf  $E$  das *Polygonmatroid*  $\mathcal{P}(G)$  von  $G = (V, E)$ . Figur 8.1 zeigt einen Graphen  $G$  und seine maximalen Wälder.

Ein abstraktes Matroid, das isomorph zu einem Polygonmatroid ist, nennen wir *graphisch*. Das kleinste nicht-graphische Matroid ist (bis auf Isomorphie)  $S = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{G} = \{\emptyset, a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$ . Die Leser mögen sich überlegen, warum es keinen Graphen  $G = (V, E)$  mit  $E = \{a, b, c, d\}$  geben kann, dessen Wälder genau den Mengen aus  $\mathcal{G}$  entsprechen. In  $\mathcal{P}(G)$  sind die Schlingen von  $G$  genau die einelementigen abhängigen Mengen und jedes Paar von Mehrfachkanten die zweielementigen. In Analogie dazu nennt man auch in beliebigen Matroiden  $\mathcal{M}$  die abhängigen einelementigen Mengen die *Schlingen* von  $\mathcal{M}$ , und  $\mathcal{M}$  *einfach*, wenn  $\mathcal{M}$  keine ein- oder zweielementigen abhängigen Mengen enthält.

Sei  $S$  und eine Familie  $\mathcal{G} \subseteq 2^S$  gegeben, welche Axiom (1) erfüllt. Eine nützliche Beobachtung ist, dass Axiom (2) äquivalent ist zu folgendem *Austauschaxiom*:

(2') Seien  $I, J \in \mathcal{G}$ ,  $|I| < |J|$ , dann existiert  $p \in J \setminus I$  mit  $I \cup p \in \mathcal{G}$ .

Ist nämlich (2) erfüllt und setzen wir  $A = I \cup J$ , so haben alle maximalen  $\mathcal{G}$ -Mengen von  $A$  gleiche Mächtigkeit  $r(A)$ , also muss es wegen  $|I| < |J| \leq r(A)$  ein solches  $p \in J \setminus I$  geben. Ist aber umgekehrt (2') erfüllt, dann können offenbar zwei maximale  $\mathcal{G}$ -Mengen in  $A$  nicht verschiedene Mächtigkeit haben.

Whitney hat in seiner Arbeit 1935, in der er Matroide einführte, weitere axiomatische Beschreibungen angegeben, von denen wir noch zwei anführen wollen. Jede maximale  $\mathcal{G}$ -Menge in  $A$  nennen wir eine *Basis* von  $A$ , und eine maximale  $\mathcal{G}$ -Menge von  $S$  eine *Basis des Matroides*. Klarerweise determiniert  $\mathcal{G}$  die Familie  $\mathcal{B}$  der Basen von  $\mathcal{M}$  (es sind ja gerade die maximalen Mitglieder), aber auch die Umkehrung ist richtig, denn  $\mathcal{G}$  besteht nach Axiom (1) genau aus den Untermengen der Basen.

**Satz 8.1.** Sei  $\mathcal{M}(S)$  ein Matroid und  $\mathcal{B}$  die Familie der Basen. Dann gilt:

(B1)  $B \neq B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B \not\subseteq B'$ .

(B2) Sei  $B \neq B' \in \mathcal{B}$ . Dann existiert zu jedem  $b \in B$  ein  $b' \in B'$  mit  $(B \setminus b) \cup b' \in \mathcal{B}$ .

Ist umgekehrt  $\mathcal{B}$  eine nichtleere Mengenfamilie, die (B1) und (B2) erfüllt, dann gibt es ein eindeutiges Matroid, welches  $\mathcal{B}$  als Basenfamilie hat.

*Beweis.* (B1) ist klar, und (B2) folgt mit  $B \setminus b, B' \in \mathcal{G}$  wegen  $|B \setminus b| < |B'|$  aus Axiom (2'). Erfüllt andererseits  $\mathcal{B}$  die Bedingungen des Satzes, so erklären wir  $\mathcal{G}$  als Familie aller Untermengen von  $\mathcal{B}$ -Mengen. Die Axiome (1) und (2') sind dann sofort verifiziert.  $\square$

Ist  $A \subseteq S$  und  $A \notin \mathcal{G}$ , so nennen wir  $A$  *abhängig*. Mit  $\mathcal{G}$  determiniert auch die Familie  $\mathcal{A} = 2^S \setminus \mathcal{G}$  der abhängigen Mengen das Matroid, und da wegen Axiom (1) jede Obermenge einer abhängigen Menge wieder abhängig ist, so reichen bereits die minimalen abhängigen Mengen aus, um das Matroid eindeutig festzulegen. In den Polygonmatroiden von Graphen sind diese minimalen abhängigen Mengen natürlich genau die *Polygone*, so dass man in Anlehnung dazu die minimalen abhängigen Mengen in einem beliebigen Matroid  $\mathcal{M}$  die *Kreise* von  $\mathcal{M}$  nennt.

**Satz 8.2.** Sei  $\mathcal{M}(S)$  ein Matroid und  $\mathcal{K}$  die Familie der Kreise. Dann gilt:

(C1)  $\emptyset \notin \mathcal{K}; C \neq C' \in \mathcal{K} \Rightarrow C \not\subseteq C', C' \not\subseteq C$ .

(C2)  $C \neq C' \in \mathcal{K}, p \in C \cap C' \Rightarrow$  es existiert  $D \in \mathcal{K}$  mit  $D \subseteq (C \cup C') \setminus p$ .

Ist umgekehrt  $\mathcal{K}$  eine Mengenfamilie, die (C1) und (C2) erfüllt, so gibt es ein eindeutiges Matroid, welches  $\mathcal{K}$  als Kreisfamilie hat.

Der Beweis sei den Lesern überlassen. Interessant ist, dass (C2) äquivalent ist zur scheinbar schärferen Bedingung

(C2')  $C \neq C' \in \mathcal{K}, p \in C \cap C', q \in C \setminus C' \Rightarrow$  es existiert  $D \in \mathcal{K}$  mit  $q \in D \subseteq (C \cup C') \setminus p$ .

Die letzte Bedingung (C2') ergibt, auf Graphen übertragen, einen keineswegs mehr unmittelbar einsichtigen Satz über Polygone.

Kehren wir zurück zum Ausgangspunkt. Gibt es zu einem nichtplättbaren Graphen  $G$  eine duale Struktur? Wenn wir  $G$  mit dem Polygonmatroid  $\mathcal{P}(G)$  identifizieren, so hat Whitney eine elegante Antwort gegeben: *Jedes Matroid  $\mathcal{M}$  hat ein natürliches Dual  $\mathcal{M}^*$ , welches im Fall  $\mathcal{P}(G)$ ,  $G$  eben, genau das Polygonmatroid  $\mathcal{P}(G^*)$  des dualen Graphen  $G^*$  ist.*

**Hassler Whitney**, geboren 1907 in New York, stammte aus einer Familie von bedeutenden Wissenschaftlern. Nach einem Mathematik- und Musikstudium an der Yale University promovierte er 1932 bei G.D. Birkhoff in Harvard über ein Thema zur Färbung von Graphen. In den folgenden Jahren publizierte er eine Reihe von grundlegenden Arbeiten zu Graphen und Matroiden. Berühmt wurde er aber vor allem durch seine fundamentalen Beiträge zur Topologie, geometrischer Maßtheorie, Funktionen und Mannigfaltigkeiten. Er war von 1935-1952 Professor in Harvard und wechselte dann ans Institute for Advanced Study in Princeton. Neben der Mathematik war er ein ausgezeichneter Violinist und passionierter Bergsteiger. Er starb 1989 in der Schweiz.



**Satz 8.3.** Sei  $\mathcal{M}(S)$  ein Matroid mit Basenfamilie  $\mathcal{B}$ . Die Familie  $\mathcal{B}^* = \{A \subseteq S : S \setminus A \in \mathcal{B}\}$  der Komplementärmengen erfüllt die Bedingungen aus 8.1 und definiert somit ein eindeutiges Matroid, welches wir das zu  $\mathcal{M}$  duale Matroid  $\mathcal{M}^*(S)$  nennen. Offensichtlich gilt  $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}$ .

*Beweis.* Bedingung (B1) in 8.1 ist klar. Seien nun  $A \neq A' \in \mathcal{B}^*$ ,  $a \in A$ , dann müssen wir  $a' \in A'$  finden mit  $(A \setminus a) \cup a' \in \mathcal{B}^*$ . Wenn  $a \in A \cap A'$  ist, so können wir  $a' = a$  nehmen. Wir können also  $a \in A \setminus A'$  annehmen. Da die Basis  $S \setminus A$  maximal unabhängig in  $\mathcal{M}$  ist, muss es in  $(S \setminus A) \cup a$  einen Kreis  $C$  geben (der, wie aus 8.2 folgt, eindeutig bestimmt ist), der  $a$  enthält, d. h.  $a \in C \subseteq (S \setminus A) \cup a$ .  $C$  kann nicht in der  $\mathcal{B}$ -Menge  $S \setminus A'$  liegen, also existiert  $a' \in C \setminus (S \setminus A') \subseteq ((S \setminus A) \cup a) \setminus (S \setminus A') = A' \setminus A$ . Die Menge  $((S \setminus A) \setminus a') \cup a$  ist unabhängig, da sie ansonsten den eindeutig bestimmten Kreis  $C$  aus  $(S \setminus A) \cup a$  enthielte, was im Widerspruch zu  $a' \in C$  steht. Wegen  $|((S \setminus A) \setminus a') \cup a| = |S \setminus A|$  ist somit  $((S \setminus A) \setminus a') \cup a \in \mathcal{B}$  und damit  $(A \setminus a) \cup a' \in \mathcal{B}^*$ .  $\square$

Die folgende Aussage verdeutlicht nochmals den Zusammenhang zwischen einem Matroid und seinem Dual anhand der jeweiligen Kreisfamilie.

**Satz 8.4.** Sei  $\mathcal{M}(S)$  ein Matroid mit Kreisfamilie  $\mathcal{K}$ . Eine Menge  $A$  ist genau dann Kreis in  $\mathcal{M}^*(S)$ , wenn  $|A \cap C| \neq 1$  für alle  $C \in \mathcal{K}$  gilt, und  $A \neq \emptyset$  minimal mit dieser Eigenschaft ist.

*Beweis.* Wir gliedern den Beweis in zwei Teile:

- $A$  Kreis in  $\mathcal{M}^* \Rightarrow |A \cap C| \neq 1$  für alle  $C \in \mathcal{K}$ ,
- $|A \cap C| \neq 1$  für alle  $C \in \mathcal{K} \Rightarrow A$  abhängig in  $\mathcal{M}^*$ .

Zunächst bemerken wir aufgrund von 8.3, dass  $A$  genau dann unabhängig in  $\mathcal{M}^*$  ist, wenn  $S \setminus A$  eine Basis von  $\mathcal{M}$  enthält, oder anders herum:  $A$  ist genau dann abhängig in  $\mathcal{M}^*$ , wenn  $S \setminus A$  keine Basis von  $\mathcal{M}$  enthält, und somit ist  $A$  ein Kreis von  $\mathcal{M}^*$ , wenn  $S \setminus A$  keine Basis von  $\mathcal{M}$  enthält und maximal mit dieser Eigenschaft ist. Sei also  $A$  Kreis in  $\mathcal{M}^*$ . Angenommen  $C \in \mathcal{K}$  existiert mit  $C \cap A = \{p\}$ . Nach dem eben Gesagten enthält  $S \setminus A$  keine Basis von  $\mathcal{M}$ , aber  $(S \setminus A) \cup p$  doch, also kann die in  $\mathcal{M}$  unabhängige Menge  $C \setminus p \subseteq S \setminus A$  ( $C$  ist Kreis!) zu einer Basis  $B \subseteq (S \setminus A) \cup p$  erweitert werden mit  $p \in B$ . Da aber  $B$  die abhängige Menge  $C$  enthält, kann dies nicht sein. Es sei umgekehrt  $A$  eine Menge mit der Eigenschaft  $|A \cap C| \neq 1$  für alle  $C \in \mathcal{K}$ . Wäre  $A$  unabhängig in  $\mathcal{M}^*$ , so enthielte  $S \setminus A$  eine Basis  $B$  aus  $\mathcal{M}$ . Für  $p \in A$  ist  $B \cup p$  abhängig in  $\mathcal{M}$ , enthält also einen Kreis  $C$ , für den offensichtlich  $A \cap C = \{p\}$  gilt.  $\square$

Wir wollen 8.4 auf das Polygonmatroid  $\mathcal{P}(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  anwenden, um das zu  $\mathcal{P}(G)$  duale Matroid graphentheoretisch zu beschreiben.

**Behauptung.** Die Kreise in  $\mathcal{P}(G)^*$  sind genau die *Bonds* von  $G$ .

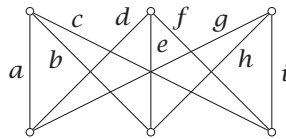
Da ein Bond  $A$  Bipartition ist, muss, wie in Kapitel 4 bemerkt wurde,  $|A \cap C|$  gerade sein für jedes Polygon  $C \in \mathcal{K}$ , also insbesondere  $|A \cap C| \neq 1$  gelten. Erfüllt umgekehrt  $A \subseteq E$  die Bedingung  $|A \cap C| \neq 1$  für alle Polygone  $C$ , so ist  $A$  eine trennende Kantenmenge, denn für  $e = uv \in A$  können die Ecken  $u$  und  $v$  in  $G \setminus A$  nicht mehr verbunden sein, da

es ansonsten ein Polygon  $C$  gäbe mit  $C \cap A = \{e\}$ . Da die Bonds genau die minimalen trennenden Kantenmengen sind, ist unsere Behauptung bewiesen.

Aufgrund dieses Sachverhaltes sprechen wir von  $\mathcal{P}(G)^*$  als dem *Bondmatroid*  $\mathcal{B}(G)$  des Graphen  $G = (V, E)$ , und wir nennen ein Matroid  $\mathcal{M}$  *cographisch*, wenn es isomorph zu einem Bondmatroid ist. Wir wissen bereits, dass  $r(\mathcal{P}(G)) = |V| - c(G)$  ist. Daraus folgt nun  $r(\mathcal{B}(G)) = |E| - |V| + c(G)$ .

Sehen wir uns die Definition des  $W$ -Duals aus Kapitel 4 an, so lautet Whitneys Satz 4.11 in der Matroid Formulierung: Genau dann ist ein Graph  $G$  plättbar, wenn sein Bond Matroid  $\mathcal{B}(G)$  graphisch ist (oder äquivalent: sein Polygonmatroid cographisch ist).

Sei  $K_{3,3}$  wie in Figur 8.2 gegeben. Da  $K_{3,3}$  nicht plättbar ist, ist  $\mathcal{B}(K_{3,3})$  nicht graphisch.



Figur 8.2

$\mathcal{P}(K_{3,3})$  hat Rang  $|V| - c(K_{3,3}) = 5$  und somit  $\mathcal{B}(K_{3,3})$  den Rang  $|E| - 5 = 4$ . Eine Basis von  $\mathcal{B}(K_{3,3})$  ist z. B.  $\{a, b, d, h\}$ , ein Kreis ist  $\{g, h, i\}$ .

Die Leser haben bis jetzt vielleicht den Eindruck gewonnen, dass die Matroidtheorie nur einen formalen Rahmen für wohlbekannte Graphensätze liefert. Die folgenden Beispiele, die einen ganz neuen und eleganten Zugang zu Transversal- und Zerlegungssätzen liefern, sollten diesen Einwand entkräften.

Wir geben uns eine Funktion  $f : 2^S \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $f(\emptyset) = 0$  vor.  $f$  heißt *monoton*, wenn  $A \subseteq B$  impliziert  $f(A) \leq f(B)$  und  $f$  heißt *submodular*, wenn  $f(A \cap B) + f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$  für alle  $A, B$  gilt. Ist  $f$  monoton und submodular, so gilt dies auch, wie man sich sofort überzeugt, für die Funktion  $\hat{f}(A) := \min_{B \subseteq A} (f(B) + |A \setminus B|)$ .

Nach Definition von  $\hat{f}$  haben wir:

$$\hat{f}(A) = |A| \iff |B| \leq f(B) \text{ für alle } B \subseteq A. \tag{*}$$

Der folgende bemerkenswerte Satz zeigt, dass *jede* monotone submodulare Funktion ein Matroid erzeugt.

**Satz 8.5** (Edmonds). *Sei  $f : 2^S \rightarrow \mathbb{N}_0$  monoton und submodular mit  $f(\emptyset) = 0$ . Die Familie  $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ , definiert durch*

$$I \in \mathcal{I} \iff |B| \leq f(B) \text{ für alle } B \subseteq I,$$

*ist die Familie unabhängiger Mengen eines Matroides  $\mathcal{M}_f$ . Die Rangfunktion in  $\mathcal{M}_f$  ist gegeben durch*

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} (f(B) + |A \setminus B|).$$

*Beweis.* Wir betrachten die Familie  $\mathcal{A} = \{A \subseteq S : f(A) < |A|\}$  und weisen nach, dass die minimalen Mengen in  $\mathcal{A}$  die Kreisaxiome 8.2 erfüllen. Bedingung (C1) ist klar. Es seien  $C \neq C'$  minimale Mengen in  $\mathcal{A}$  mit  $p \in C \cap C'$ . Dann ist  $|C| \geq 2$  und daher

$$|C| - 1 = |C \setminus p| \leq f(C \setminus p) \leq f(C) < |C|,$$

also  $f(C) = |C| - 1$ ,  $f(D) \geq |D|$  für alle  $D \subsetneq C$ , und ebenso  $f(C') = |C'| - 1$ . Insbesondere haben wir  $|C \cap C'| \leq f(C \cap C')$  und wegen der Submodularität von  $f$

$$\begin{aligned} f((C \cup C') \setminus p) &\leq f(C \cup C') \leq f(C) + f(C') - f(C \cap C') \\ &\leq |C| - 1 + |C'| - 1 - |C \cap C'| \\ &= |C \cup C'| - 2 < |(C \cup C') \setminus p|. \end{aligned}$$

$(C \cup C') \setminus p$  ist also in  $\mathcal{A}$  und enthält daher eine minimale Menge aus  $\mathcal{A}$ . Die minimalen Mengen aus  $\mathcal{A}$  erzeugen somit ein Matroid  $\mathcal{M}_f$ . Aus der Monotonie und Submodularität von  $\hat{f}$  kann unschwer abgeleitet werden, dass  $\hat{f}$  die Rangfunktion eines gewissen Matroides  $\mathcal{M}'$  auf  $S$  ist. Da aber die unabhängigen Mengen  $A$  in  $\mathcal{M}'$  offensichtlich durch die Bedingung  $\hat{f}(A) = |A|$  charakterisiert sind, enthalten wegen  $(*)$  die Matroide  $\mathcal{M}_f$  und  $\mathcal{M}'$  genau dieselben unabhängigen Mengen. Sie sind also identisch und  $\hat{f}$  tatsächlich die Rangfunktion in  $\mathcal{M}_f$ , wie behauptet.  $\square$

Der oben bewiesene Satz ist wahrscheinlich die fruchtbarste, bisher entdeckte, Konstruktionsmethode für Matroide. Jede wie auch immer erklärte monotone submodulare Funktion ergibt ein Matroid. Zwei Beispiele mögen dies illustrieren.

Sei  $G = (S \cup T, E)$  ein bipartiter Graph. Wie in Kapitel 6 setzen wir  $R(A) = \{v \in T : \exists u \in A \text{ mit } uv \in E\}$  für  $A \subseteq S$ . Es sei  $f : 2^S \rightarrow \mathbb{N}_0$  definiert durch  $f(A) = |R(A)|$ ,  $A \subseteq S$ . Offensichtlich gilt mit  $A \subseteq B$  auch  $R(A) \subseteq R(B)$ , also ist  $f$  monoton. Ferner haben wir  $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ ,  $R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)$  und somit  $f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$ , und trivialerweise auch  $f(\emptyset) = 0$ . Nach unserem Satz erzeugt  $f$  ein Matroid  $\mathcal{M}_f$  auf  $S$ , dessen unabhängige Mengen  $\mathcal{I}$  durch die Bedingung

$$I \in \mathcal{I} \Leftrightarrow |I| \leq |R(I)| \text{ für alle } I \subseteq S$$

gekennzeichnet sind. Dies ist aber genau die Hall'sche Bedingung 6.3 dafür, dass ein Matching  $M$  in  $G$  existiert, das in  $S$  genau die Ecken aus  $I$  enthält. Interpretieren wir  $G = (S \cup T, E)$  wie in Kapitel 6 als Mengenfamilie  $(S; \mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n))$ , so sind die unabhängigen Mengen in  $\mathcal{M}_f$  genau die *Transversalen* von Teilfamilien von  $\mathcal{A}$  oder wie wir sagen, die *partiellen Transversalen*.  $\mathcal{M}_f$  heißt deshalb das *Transversalmatroid* erzeugt von  $(S; \mathcal{A})$ , und wir sehen, dass die Rangformel in 8.5 nichts anderes als die Formel 6.2 ist.

Wir können nun sämtliche Sätze der Matroidtheorie anwenden. Zum Beispiel besagt die Definition eines Matroides, dass jede partielle Transversale zu einer Transversalen maximaler Mächtigkeit erweitert werden kann (die alle die gleiche Mächtigkeit haben) oder dass das Austauschaxiom (2') für partielle Transversalen gilt - beides Resultate, die keineswegs mehr unmittelbar einsichtig sind.

Das zweite Beispiel geht direkt auf die Rangfunktion  $r$  eines Matroides  $\mathcal{M}(S)$  ein. Offensichtlich ist  $r$  monoton mit  $r(\emptyset) = 0$ . Zum Beweis der Submodularität wählen wir eine Basis  $C$  von  $A \cap B$  und erweitern  $C$  zu einer Basis  $D$  von  $A \cup B$ . Es gilt also  $C = (D \cap A) \cap (D \cap B)$ ,  $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$  und somit  $r(A \cap B) + r(A \cup B) = |C| + |D| = |(D \cap A) \cap (D \cap B)| + |(D \cap A) \cup (D \cap B)| = |D \cap A| + |D \cap B| \leq r(A) + r(B)$ , da  $D \cap A$  und  $D \cap B$  unabhängige Mengen in  $A$  bzw.  $B$  sind.

Es seien nun  $t$  Matroide  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_t$  auf  $S$  gegeben mit den Rangfunktionen  $r_1, \dots, r_t$ . Da jede einzelne Funktion  $r_i$  monoton und submodular ist, so gilt dies auch für

die Summe  $f = \sum_{i=1}^t r_i$ . Das von  $f$  laut 8.5 induzierte Matroid heißt die *Summe*  $\sum_{i=1}^t \mathcal{M}_i(S)$ . Eine überraschend einfache Beschreibung der unabhängigen Mengen in  $\sum \mathcal{M}_i$  wurde von Nash-Williams gegeben:  $A$  ist genau dann unabhängig in  $\sum \mathcal{M}_i$ , wenn  $A = \bigcup_{i=1}^t A_i$  ist mit  $A_i$  unabhängig in  $\mathcal{M}_i$ , für alle  $i$ . Es ist klar, dass diese Bedingung äquivalent zur Forderung ist,  $A = \bigcup_{i=1}^t A_i$  ist *disjunkte Vereinigung* von unabhängigen Mengen  $A_i$ , da wir mehrfach vorkommende Elemente bis auf einmal wegstreichen können. Dass jede solche Vereinigung unabhängig in  $\sum \mathcal{M}_i$  ist, folgt sofort aus 8.5. Ist nämlich  $B \subseteq A$ ,  $B = \bigcup_{i=1}^t B_i$ ,  $B_i \subseteq A_i$  für alle  $i$ , so haben wir  $|B| \leq \sum_{i=1}^t |B_i| = \sum_{i=1}^t r_i(B_i) \leq \sum_{i=1}^t r_i(B) = f(B)$ . Die Umkehrung kann im Buch von Aigner, S. 291, nachgelesen werden.

Ist speziell  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \dots = \mathcal{M}_t = \mathcal{M}$ , so erhalten wir sehr interessante Packungs- und Bedeckungsergebnisse, die direkt nur sehr mühsam abzuleiten sind. Ist  $r$  die Rangfunktion von  $\mathcal{M}$ , so ist laut 8.5 die Rangfunktion  $r'$  der  $t$ -fachen Summe  $\sum_t \mathcal{M}$  gegeben durch:

$$r'(A) = \min_{B \subseteq A} (t \cdot r(B) + |A \setminus B|).$$

Das *Packungsproblem* besteht darin, möglichst viele disjunkte „große“ Mengen (d.h. Mengen, die eine Basis enthalten) in  $S$  hineinzupacken. Das *Bedeckungsproblem* wiederum verlangt,  $S$  mit möglichst wenig „kleinen“ (= unabhängigen) Mengen zu bedecken. Die Antwort auf beide Fragen können wir nun mühelos geben.

**Satz 8.6.** Sei  $\mathcal{M}$  Matroid auf  $S$ .

- (i)  $S$  enthält  $t$  disjunkte Basen  $\Leftrightarrow |S \setminus B| \geq t(r(S) - r(B))$  für alle  $B \subseteq S$ .
- (ii)  $S$  ist die Vereinigung von  $t$  unabhängigen Mengen  $\Leftrightarrow |B| \leq t \cdot r(B)$  für alle  $B \subseteq S$ .

*Beweis.* Nach dem Resultat von Nash-Williams enthält  $S$  genau dann  $t$  disjunkte Basen, wenn der Rang  $r'(S)$  in  $\sum_t \mathcal{M}$  mindestens  $t \cdot r(S)$  ist. Dies ist aber nach der Formel für  $r'$  gleichbedeutend mit (i). Behauptung (ii) ist ebenso einfach zu erledigen.  $S$  ist Vereinigung von  $t$  unabhängigen Mengen bedeutet gerade:  $S$  ist unabhängig in  $\sum_t \mathcal{M}$ , d.h.  $|S| = r'(S)$ , und dies ist wiederum äquivalent zu  $|S| \leq t \cdot r(B) + |S \setminus B|$  für alle  $B$ .  $\square$

Die *Packungszahl*  $\pi(\mathcal{M})$  sei erklärt als die größte Zahl von disjunkten Basen in  $\mathcal{M}$  und die *Bedeckungszahl*  $\beta(\mathcal{M})$  als die kleinste Zahl von unabhängigen Mengen (die wie eingangs erwähnt disjunkt angenommen werden können), die eine Bedeckung von  $\mathcal{M}$  bilden. Anwendung von 8.6 ergibt:

**Folgerung 8.7.** Es gilt:

- (i)  $\pi(\mathcal{M}) = \min_{B \subseteq S, r(B) \neq r(S)} \left\lfloor \frac{|S - B|}{r(S) - r(B)} \right\rfloor$ ,
- (ii)  $\beta(\mathcal{M}) = \max_{B \subseteq S, r(B) \neq 0} \left\lceil \frac{|B|}{r(B)} \right\rceil$ ,

wobei in (ii)  $\mathcal{M}$  als schlingenlos vorausgesetzt ist, da ansonsten keine unabhängige Bedeckung existiert.

In den Polygonmatroiden  $\mathcal{P}(G)$  sind, wie wir wissen, die unabhängigen Mengen genau die Wälder;  $\pi(\mathcal{P})$  bzw.  $\beta(\mathcal{P})$  geben demnach die Maximalzahl disjunkter maximaler

Wälder an bzw. die Minimalzahl von Wäldern an, in die  $E$  zerlegt werden kann.  $\beta(\mathcal{P})$  ist also nichts anderes als die am Ende von Kapitel 6 definierte *Arborizität* des Graphen  $G$ , und die Leser können sich leicht überlegen, dass 8.7(ii) genau die Formel 6.19 ergibt.

Nach diesem Exkurs über allgemeine Matroide wollen wir nun die Veblenschen Ideen zum 4-Farben Problem aus Kapitel 3 aufgreifen und Tuttes Analyse dieser Ideen nachvollziehen. In Verallgemeinerung des Veblenschen Ansatzes hatten wir in Kapitel 4 für einen beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  die Ecken-Kanten Inzidenzmatrix  $A$  und die Kreis-Kanten Inzidenzmatrix  $B$  betrachtet und festgestellt, dass (mit der üblichen Identifizierung Menge = charakteristischer Vektor) die Mengen aus dem von  $A$  erzeugten Unterraum  $\hat{A}$  genau die *Bipartitionen* von  $G$  sind, die wir auch *Cozyklen* nannten, während die Mengen aus  $\hat{B}$  genau die *Eulerschen Untergraphen* bzw. *Zyklen* sind. Ferner gilt  $\hat{A} = \hat{B}^\perp$ ,  $\hat{B} = \hat{A}^\perp$ .

Wir wollen nun den Zusammenhang zu den Matroiden herstellen. Die minimalen linear abhängigen Spaltenmengen von  $A$  entsprechen, wie wir wissen, genau den Polygonen von  $G$ . Dies bedeutet aber gerade, dass das von den Spalten von  $A$  erzeugte lineare Matroid isomorph zum *Polygonmatroid*  $\mathcal{P}(G)$  ist. Analog erhalten wir für  $B$ , dass die minimalen linear abhängigen Spaltenmengen genau den Bonds entsprechen, und somit das von den Spalten von  $B$  erzeugte lineare Matroid isomorph zum *Bondmatroid*  $\mathcal{B}(G)$  ist. Die algebraische Übersetzung der Tatsache, dass  $\mathcal{P}(G)$  und  $\mathcal{B}(G)$  duale Matroide sind, ist gerade durch den Zusammenhang  $\hat{A} = \hat{B}^\perp$  gegeben. Es liegt also nahe, beliebige 0,1-Matrizen  $R$  (nicht nur, wenn man so will, „graphische“ Matrizen) zu betrachten und darauf Matroide zu definieren. Das duale Matroid wird dann durch  $\hat{R}^\perp$  gegeben sein. Bevor wir dies genau ausführen, wollen wir noch den Zusammenhang zum Färbungsproblem herstellen.

In Kapitel 3 haben wir eine äquivalente Formulierung der 4-Farben Vermutung mittels zweier Operatoren  $\delta f_1$ ,  $\delta f_2$  hergeleitet. Dies wollen wir nun auf beliebige Graphen verallgemeinern. Dazu interpretieren wir die Cozyklen und Zyklen auf folgende Weise: Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph. Eine Abbildung  $g : V \rightarrow \text{GF}(2)$  heißt eine *0-Kette*, eine Abbildung  $f : E \rightarrow \text{GF}(2)$  eine *1-Kette*. Der *Träger* einer 1-Kette  $f$  ist  $\|f\| := \{e \in E : f(e) = 1\}$ , analog für 0-Ketten.  $f$  ist also nichts anderes als der charakteristische Vektor von  $\|f\|$ . Zu  $v \in V$ ,  $e \in E$  definieren wir das Inzidenzsymbol  $\eta(v, e)$  durch

$$\eta(v, e) := \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in e \\ 0 & \text{falls } v \notin e \text{ oder falls } e \text{ Schlinge ist.} \end{cases}$$

Die 0-Ketten bzw. 1-Ketten bilden mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation zwei Vektorräume über  $\text{GF}(2)$ , die wir mit  $\mathcal{K}_0$  bzw.  $\mathcal{K}_1$  bezeichnen. Der *Randoperator*  $\partial$  ist eine Abbildung  $\partial : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_0$  gegeben durch

$$(\partial f)(v) := \sum_{e \in E} \eta(v, e) f(e) \quad (f \in \mathcal{K}_1).$$

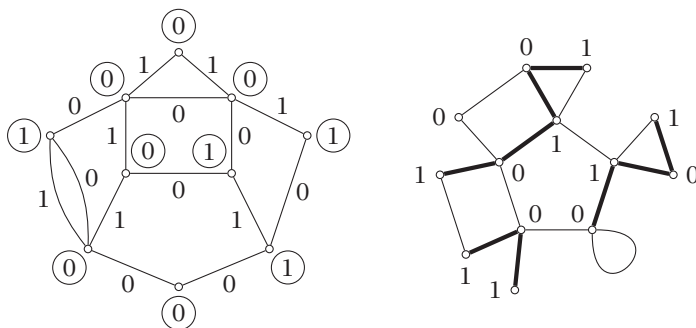
Eine 1-Kette  $f$  heißt ein *Zyklus*, wenn  $\partial f \equiv 0$  ist. Wegen  $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$  bilden die Zyklen einen Unterraum von  $\mathcal{K}_1$ , den wir den *Zyklusraum*  $\mathcal{Z}(G)$  von  $G$  nennen.  $f$  ist also genau dann ein Zyklus, wenn  $(\partial f)(v) = \sum_{e \in E, e \ni v} f(e) \equiv 0 \pmod{2}$  für alle  $v \in V$  ist, d. h. wenn der Träger  $\|f\|$  als Untergraph von  $G$  an jeder Ecke einen geraden Grad hat, also ein Zyklus im bisherigen Sinn ist. Wir bemerken noch, dass die *Brücken* genau jene Kanten  $e$  sind, für die  $f(e) = 0$  gilt, für jeden Zyklus  $f$ .



Als nächstes erklären wir den *Corandoperator*  $\delta : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_1$  durch

$$(\delta g)(e) := \sum_{v \in V} \eta(v, e)g(v) \quad (g \in \mathcal{K}_0).$$

$(\delta g)(e)$  ist also nichts anderes als die Summe  $(\delta g)(e) = g(u) + g(v)$  der beiden  $g$ -Werte an den Endecken  $u, v$  von  $e$ . Eine 1-Kette  $f$  heißt ein *Cozyklus*, falls  $f = \delta g$  für ein  $g \in \mathcal{K}_0$  ist. Wegen  $\delta(g + h) = \delta(g) + \delta(h)$  bilden die Cozyklen ebenfalls einen Unterraum von  $\mathcal{K}_1$ , den *Cozyklenraum*  $\mathcal{C}(G)$ . In der Abbildung 8.3 ist links eine 1-Kette und der zugehörige Rand  $\partial f$  gezeichnet, dessen Werte eingekreist notiert sind. Rechts ist eine 0-Kette  $g$  und der zugehörige Cozyklus  $\delta g$  eingetragen, wobei die Kanten  $e$  mit  $(\delta g)(e) = 1$  fett gezeichnet sind.



Figur 8.3

Wir wollen zeigen, dass die Träger  $\|f\|$  von Cozyklen genau den Cozyklen (Bipartitionen) des Graphen entsprechen. Dies ist aber völlig klar. Denn für  $f = \delta g \in \mathcal{C}(G)$ ,  $f \neq 0$ , ist  $\|f\|$  genau die Bipartition erzeugt von den Eckenmengen  $V_0 = \{v \in V : g(v) = 0\}$  und  $V_1 = \{v \in V : g(v) = 1\}$ . Ist aber umgekehrt  $\|f\| \neq \emptyset$  Bipartition mit den Eckenmengen  $V_0$  und  $V_1$ , so erklären wir  $g : V \rightarrow \text{GF}(2)$  durch  $g(v) = 0$  oder 1 je nachdem ob  $v \in V_0$  oder  $V_1$  ist, und erhalten  $f = \delta g$ . Offenbar haben wir  $f(e) = 0$  für jeden Cozyklus  $f$  genau dann, wenn  $e$  eine *Schlinge* ist.

Wir kommen zur *Färbung* von Graphen. Angenommen  $G$  ist  $2^\ell$ -färbbar. (Natürlich interessiert insbesondere der Fall  $\ell = 2$ .) Wir nehmen als Farbmenge  $M$  alle  $0,1$ -Tupel der Länge  $\ell$ . Eine Abbildung  $g : V \rightarrow M$  können wir durch die Koordinatenfunktionen  $g_1, \dots, g_\ell : V \rightarrow \text{GF}(2)$  beschreiben mit  $g(v) = (g_1(v), g_2(v), \dots, g_\ell(v))$ . Ist  $g$  zulässige Färbung, so muss  $g_i(u) \neq g_i(v)$  für mindestens ein  $i$  gelten, wann immer  $u$  und  $v$  verbunden sind. Mit anderen Worten:  $g : V \rightarrow M$  ist genau dann eine Färbung, wenn  $(\delta g_1(e), \dots, \delta g_\ell(e)) \neq (0, \dots, 0)$  für alle  $e \in E$  gilt. Halten wir dies fest.

**Satz 8.8.** Ein Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann  $2^\ell$ -färbbar, wenn es  $\ell$  Cozyklen  $\delta g_1, \dots, \delta g_\ell$  gibt, so dass  $(\delta g_1(e), \dots, \delta g_\ell(e)) \neq (0, \dots, 0)$  für alle  $e \in E$  gilt. Oder, wenn wir 1-Ketten mit ihren Trägern identifizieren:  $G = (V, E)$  ist genau dann  $2^\ell$ -färbbar, wenn es  $\ell$  Bipartitionen in  $G$  gibt, die alle Kanten überdecken.

Die Leser werden bemerkt haben, dass dieser Satz völlig analog zur (dualen) Aussage in 3.3 ist. Von nun an konzentrieren wir uns ausschließlich auf die 4-Färbung von Graphen.

**Folgerung 8.9.** Ein Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann 4-färbbar, wenn es zwei Cozyklen  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(G)$  gibt mit  $(f_1(e), f_2(e)) \neq (0, 0)$  für alle  $e \in E$ .

Auch für die Zyklengruppe können wir eine entsprechende Aussage machen, die den Taitischen Satz 1.7 in neuem Licht erscheinen lässt.

**Satz 8.10.** Sei  $G = (V, E)$  ein 3-regulärer Graph.  $G$  ist genau dann 3-kantenfärbbar, wenn es zwei Zyklen  $f_1, f_2 \in \mathcal{Z}(G)$  gibt mit  $(f_1(e), f_2(e)) \neq (0, 0)$  für alle  $e \in E$ .

*Beweis.* Angenommen  $f : E \rightarrow M$  ist eine 3-Färbung der Kanten, wobei wir als Farben  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 1)$  nehmen. Wir schreiben  $f(e) = (f_1(e), f_2(e))$ , so dass also stets  $(f_1(e), f_2(e)) \neq (0, 0)$  gilt, und weisen nach, dass die 1-Ketten  $f_1, f_2$  Zyklen sind. Die (beliebige) Ecke  $v$  sei inzident mit den Kanten  $e, g, h$ . Da  $e, g, h$  verschieden gefärbt sind, liegen genau zwei im Träger  $\|f_1\|$  von  $f_1$  und genau zwei in  $\|f_2\|$ . Dies bedeutet aber, dass  $(\partial f_1)(v) = (\partial f_2)(v) = 0$  ist, d. h. dass  $f_1, f_2$  in  $\mathcal{Z}(G)$  liegen. Sind umgekehrt  $f_1, f_2 \in \mathcal{Z}(G)$  mit  $(f_1(e), f_2(e)) \neq (0, 0)$  für alle  $e \in E$  gegeben, so definieren wir  $f : E \rightarrow M$  durch  $f(e) = (f_1(e), f_2(e))$ . Da jeder Zyklus auf einer Brücke den Wert 0 annimmt, kann  $G$  keine Brücken enthalten und wegen der 3-Regularität auch keine Schlingen. Seien wiederum  $e, g, h$  die mit einer Ecke  $v$  inzidenten Kanten. Gilt nun beispielsweise  $f(e) = f(g)$ , so muss wegen  $(\partial f_1)(v) = f_1(e) + f_1(g) + f_1(h) = 0$ ,  $f_1(h) = 0$  sein und ebenso  $f_2(h) = 0$ , im Widerspruch zu  $(f_1(h), f_2(h)) \neq (0, 0)$ .  $\square$

Taits Satz ist eine unmittelbare Folgerung von 8.10. Ist nämlich  $G$  ein brückenloser 3-regulärer ebener Graph, so entsprechen, wie wir wissen, die Zyklen von  $G$  genau den Cozyklen des dualen Graphen  $G^*$ .  $G$  ist also nach 8.9 genau dann 3-kantenfärbbar, wenn der duale Graph  $G^*$  4-färbbar ist, oder was dasselbe ist, wenn die Länder von  $G$  mit 4 Farben gefärbt werden können.

Die ins Auge stechende Ähnlichkeit der Sätze 8.9 und 8.10 hat Tutte veranlasst, Färbungen *beliebiger* Unterräume von  $\mathcal{K}_1$  zu studieren. Dabei ist ihm eine bedeutende Vertiefung der ursprünglichen Ideen von Veblen gelungen.

**Definition.** Es sei  $S$  eine endliche Menge,  $|S| = n$ . Unter einer *Kette* auf  $S$  über  $\text{GF}(2)$  verstehen wir eine Abbildung  $f : S \rightarrow \text{GF}(2)$ .  $\mathcal{V}_n$  sei der Vektorraum aller Ketten. Eine *Kettengruppe*  $\Gamma$  auf  $S$  ist ein Unterraum von  $\mathcal{V}_n$ . Das heißt:  $f, g \in \Gamma$  impliziert  $f + g \in \Gamma$ . Wie bisher ist  $\|f\| = \{s \in S : f(s) = 1\}$  der *Träger* von  $f$ , und  $f \in \Gamma$  heißt *elementar*, wenn  $f \neq 0$  ist und  $\|f\|$  minimal (in bezug auf Inklusion) unter allen Trägern aus  $\Gamma$  ist. Die Dimension des Unterraumes ist der *Rang*  $r(\Gamma)$  von  $\Gamma$ .

In  $\mathcal{Z}(G)$  sind beispielsweise genau jene Ketten elementar, deren Träger Polygone sind, und in  $\mathcal{C}(G)$  jene Ketten, deren Träger Bonds sind.

Zwei Ketten  $f, g \in \mathcal{V}_n$  heißen *orthogonal*, wenn  $\sum_{s \in S} f(s)g(s) = 0$  ist. Jene Ketten, die orthogonal zu allen Ketten einer Gruppe  $\Gamma$  sind, bilden wiederum eine Gruppe, die *duale Gruppe*  $\Gamma^*$ . Offensichtlich gilt  $\Gamma^{**} = \Gamma$  und ferner  $r(\Gamma^*) = n - r(\Gamma)$ . In unserem Graphenbeispiel, das wir stets im Auge behalten wollen, ist  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{Z}(G)^*$ .

Wir wissen schon, dass  $\mathcal{C}(G)$  und  $\mathcal{Z}(G)$  jeweils Matroide erzeugen, und zwar zueinander duale Matroide. Das entsprechende Resultat wollen wir nun für beliebige Kettengruppen nachweisen.

**Satz 8.11.** *Es sei  $\Gamma$  Kettengruppe auf  $S$  und  $\Gamma^*$  die duale Gruppe. Dann gilt:*

- (i) *Definieren wir die Kreise  $C$  als die Träger elementarer Ketten aus  $\Gamma^*$ , so erhalten wir mittels dieser Kreisfamilie  $\mathcal{K}$  ein Matroid  $\mathcal{M}(\Gamma)$  auf  $S$ . Analog erhalten wir ein Matroid  $\mathcal{M}(\Gamma^*)$ .*
- (ii) *Jeder Träger in  $\Gamma^*$  ist disjunkte Vereinigung von Kreisen des Matroides  $\mathcal{M}(\Gamma)$ , und analog ist jeder Träger in  $\Gamma$  disjunkte Vereinigung aus Kreisen des Matroides  $\mathcal{M}(\Gamma^*)$ .*
- (iii) *Es gilt  $\mathcal{M}(\Gamma)^* = \mathcal{M}(\Gamma^*)$ . In Worten: Das duale Matroid einer Gruppe ist genau das Matroid der dualen Gruppe.*
- (iv)  *$r(\mathcal{M}(\Gamma)) = r(\Gamma)$ ,  $r(\mathcal{M}(\Gamma^*)) = r(\Gamma^*)$ .*

*Beweis.* Zum Beweis von (i) müssen wir die Axiome in 8.2 nachprüfen. Bedingung (C1) ist klar. Zur Vereinfachung der Rechnung erinnern wir an den in Kapitel 3 festgestellten Zusammenhang: Ist  $A = \|f\|$  und  $B = \|g\|$ , so ist der Träger von  $f + g$  die symmetrische Differenz  $A + B = \|f + g\|$ . Wegen der Gruppeneigenschaft ist also mit je zwei Trägern auch deren symmetrische Differenz ein Träger. Seien nun  $C \neq C'$  minimale Träger  $\neq \emptyset$  in  $\Gamma^*$ ,  $p \in C \cap C'$ , dann gilt  $C + C' \subseteq (C \cup C') \setminus p$ , also enthält der Träger  $C + C'$  einen minimalen Träger  $D$ , d. h. einen Kreis  $D$  mit  $D \subseteq (C \cup C') \setminus p$ . Zum Beweis von (ii) sei  $A$  ein Träger in  $\Gamma^*$  und  $A_0$  eine maximale Untermenge von  $A$ , die disjunkte Vereinigung von Kreisen, d. h. von minimalen Trägern aus  $\Gamma^*$  ist.  $A_0$  ist somit ebenfalls Träger und daher auch  $A \setminus A_0 = A + A_0$ . Ist  $A_0 \subsetneq A$ , so enthält  $A \setminus A_0$  einen Kreis  $C$ , so dass wir  $A_0 \subsetneq A_0 \cup C \subseteq A$  erhalten, im Widerspruch zur Maximalität von  $A_0$ .

Die Kreise von  $\mathcal{M}(\Gamma^*)$  sind nach Definition genau die minimalen Träger  $A = \|f\|$ ,  $f \in \Gamma$ , während nach 8.4 die Kreise des zu  $\mathcal{M}(\Gamma)$  dualen Matroides  $\mathcal{M}(\Gamma)^*$  genau die minimalen Mengen  $A$  sind mit  $|A \cap C| \neq 1$  für alle  $C \in \mathcal{K}$ . Zu (iii) müssen wir also zeigen, dass diese beiden Mengenfamilien übereinstimmen. Wegen der Minimalität genügt der Nachweis der folgenden Behauptungen:

- (a) Ist  $A = \|f\|$ ,  $f \in \Gamma$ , minimaler Träger in  $\Gamma$ , so gilt  $|A \cap C| \neq 1$  für alle Kreise  $C = \|g\|$ ,  $g \in \Gamma^*$ ,  $g$  elementar.
- (b) Ist  $A$  minimale Menge mit  $|A \cap C| \neq 1$  für alle  $C \in \mathcal{K}$ , so ist  $A = \|f\|$  mit  $f \in \Gamma$ .

Zum Beweis von (a) brauchen wir nur zu bemerken, dass aus der Orthogonalität von  $f \in \Gamma$  und  $g \in \Gamma^*$  folgt, dass  $|A \cap C|$  gerade ist für alle  $C \in \mathcal{K}$ , also insbesondere  $|A \cap C| \neq 1$ .

Sei nun  $A$  eine Menge, die (b) erfüllt. Wir müssen zeigen, dass  $|A \cap C|$  gerade ist für alle  $C \in \mathcal{K}$ ,  $C = \|g\|$ ,  $g \in \Gamma^*$ , denn dies bedeutet ja wegen (ii), dass  $|A \cap B|$  gerade ist für *alle* Träger  $B$  von  $\Gamma^*$  oder mit anderen Worten, dass  $f$  mit  $\|f\| = A$  orthogonal ist zu allen  $g \in \Gamma^*$ , also in  $\Gamma$  ist. Angenommen dies ist falsch, dann sei  $C \in \mathcal{K}$  so gewählt, dass  $|A \cap C|$  minimal ungerade ist. Wegen  $|A \cap C| \neq 1$  muss  $|A \cap C| \geq 3$  sein. Es seien  $\{p, q\} \subseteq A \cap C$ . Da  $A$  Kreis in  $\mathcal{M}(\Gamma)^*$  ist, so ist  $A \setminus p$  unabhängig und somit enthalten in einer Basis  $B^*$  von  $\mathcal{M}(\Gamma)^*$ ,  $A \setminus p \subseteq B^*$ ,  $p \notin B^*$ . Nach 8.3 ist  $B = S \setminus B^*$  Basis von  $\mathcal{M}(\Gamma)$  mit  $B \subseteq (S \setminus A) \cup p$ ,  $p \in B$ ,  $q \notin B$ . Die Menge  $B \cup q$  ist abhängig in  $\mathcal{M}(\Gamma)$  und enthält daher einen Kreis  $D \in \mathcal{K}$  mit  $q \in D \subseteq B \cup q \subseteq (S \setminus A) \cup \{p, q\}$ .  $A$  und  $D$  haben  $q$  und höchstens noch  $p$  gemeinsam und wegen  $|A \cap D| \neq 1$  gilt somit  $A \cap D = \{p, q\}$ . Für die symmetrische Differenz  $C + D$  erhalten wir daraus  $|A \cap (C + D)| = |A \cap C| - 2$ . Da

nach (ii) der Träger von  $C + D$  von  $\Gamma^*$  in eine disjunkte Vereinigung von Kreisen aus  $\mathcal{K}$  zerfällt,  $C + D = C_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_t$ , muss es einen Kreis  $C_i$  geben mit  $|A \cap C_i| < |A \cap C|$  und  $|A \cap C_i|$  ungerade, im Widerspruch zur Wahl von  $C$ .

Der Beweis von (iv) ist nun denkbar einfach. Sei  $\Gamma$  die gegebene Kettengruppe. Wir indizieren  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  und halten diese Nummerierung fest, und schreiben die Ketten von  $\Gamma$  als Zeilen einer Matrix  $R$ , und die Ketten von  $\Gamma^*$  als Zeilen einer Matrix  $R^*$ .  $R$  und  $R^*$  sind also jeweils 0,1-Matrizen mit  $n$  Spalten. Der Rang  $r(\Gamma)$  ist nach Definition der Zeilenrang von  $R$ , und entsprechend  $r(\Gamma^*)$  der Zeilenrang von  $R^*$ . Wegen  $\hat{R}^* = \hat{R}^\perp$  folgt aus (i) und (ii), dass eine Menge  $A \subseteq S$  genau dann unabhängig in  $\mathcal{M}(\Gamma)$  ist, wenn die der Menge  $A$  entsprechenden Spalten von  $R$  *linear unabhängig* sind; entsprechend für  $\Gamma^*$ . Das heißt: Der Rang  $r(\mathcal{M}(\Gamma))$  des Matroides  $\mathcal{M}(\Gamma)$  ist nichts anderes als der Spaltenrang von  $R$ , also gilt tatsächlich  $r(\mathcal{M}(\Gamma)) = r(\Gamma)$ , und analog  $r(\mathcal{M}(\Gamma^*)) = r(\Gamma^*)$ .  $\square$

Machen wir uns den zum Schluss besprochenen Zusammenhang nochmals klar. Anstelle aller Ketten aus  $\Gamma$  brauchen wir natürlich nur eine erzeugende Menge (z.B. eine Basis) von  $\Gamma$  als Zeilen einer Matrix hinschreiben. Jede auf diese Weise erhaltene Matrix  $R$  hat die Eigenschaften: Der *Zeilenraum* ist die Kettengruppe  $\Gamma$ , die *Spalten* ergeben mit linearer Unabhängigkeit genau das Matroid  $\mathcal{M}(\Gamma)$ . Jedes solcherart konstruierte Matroid ist also linear, genauer linear über  $\text{GF}(2)$  oder, wie man sagt, *binär*. Wir nennen jede solche Matrix  $R$  eine *Koordinatisierungsmatrix* von  $\mathcal{M}(\Gamma)$ . Aber auch die Umkehrung ist richtig: Ist  $\mathcal{M}$  ein binäres Matroid, und schreiben wir die Elemente von  $\mathcal{M}$ , also die Vektoren, als Spalten einer Matrix, so erzeugen die Zeilen dieser Matrix eine Kettengruppe  $\Gamma$ , deren zugehöriges Matroid  $\mathcal{M}(\Gamma)$  genau das Ausgangsmatroid  $\mathcal{M}$  ist. Und weiter besagt unser Satz: Ist  $R$  Koordinatisierungsmatrix von  $\mathcal{M}$ , so erhalten wir eine Koordinatisierungsmatrix  $R^*$  des dualen Matroides  $\mathcal{M}^*$ , indem wir eine Basis des zum Zeilenraum von  $R$  dualen Raumes, d. h. des Lösungsraumes des Gleichungssystems  $Rx = 0$  hinschreiben.

**Beispiel.** Unsere Matroide  $\mathcal{P}(G)$  und  $\mathcal{B}(G)$  sollen dies nochmals verdeutlichen. Wir wissen, dass die zu  $\mathcal{P}(G)$  gehörende Kettengruppe gerade aus den Cozyklen  $\mathcal{C}(G)$  besteht und die zu  $\mathcal{B}(G)$  gehörende Gruppe  $\mathcal{Z}(G)$  ist. Zu jeder Ecke  $v \in V$  erklären wir die 0-Kette  $g_v : V \rightarrow \text{GF}(2)$  durch

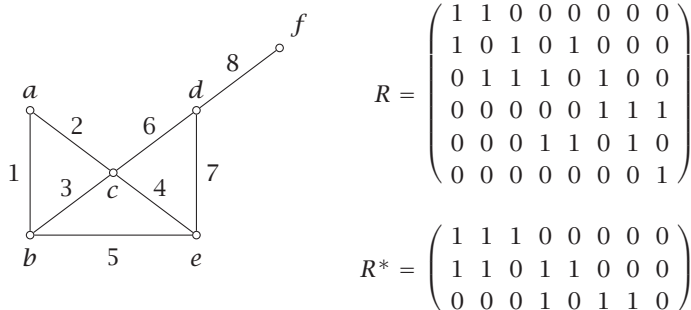
$$g_v(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = v \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der zugehörige Cozyklus  $\delta g_v$  erfüllt

$$\delta g_v(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in e, \quad e \text{ nicht Schlinge} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Vektor  $\delta g_v(e)$  ist also nichts anderes als der Inzidenzvektor von  $v$ . Da die Menge  $\{g_v : v \in V\}$  offensichtlich den 0-Kettenraum  $\mathcal{K}_0$  aufspannt, so erzeugen die Cozyklen  $\{\delta g_v : v \in V\}$  die Cozyklengruppe  $\mathcal{C}$ . Schreiben wir die  $\delta g_v$  als die Zeilen einer 0,1-Matrix, so resultiert genau die Ecken-Kanten Inzidenzmatrix von  $G$ . Somit erhalten wir Veblens Ausgangssituation: Die Ecken-Kanten Inzidenzmatrix  $R$  ist eine Koordinatisierungsmatrix von  $\mathcal{P}(G)$ , d. h. das von den Spalten von  $R$  mit linearer Unabhängigkeit erzeugte lineare Matroid ist genau das Matroid  $\mathcal{P}(G)$ .

Figur 8.4 zeigt einen Graphen  $G$ , die Koordinatisierungsmatrix  $R$  von  $\mathcal{P}(G)$  und eine Koordinatisierungsmatrix  $R^*$  des Bondmatroides  $\mathcal{B}(G)$ , die man durch Auflösung des Gleichungssystems  $Rx = 0$  erhält.



Figur 8.4

Die Zeilen von  $R^*$  ergeben die Zyklenbasis  $\{123, 1245, 467\}$ . Eine Basis von  $\mathcal{B}(G)$  ist beispielsweise  $\{1, 3, 4\}$ , deren Komplementärbasis  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  ein Baum in  $G$  ist.

Wegen des Zusammenhanges  $\mathcal{C}(G) \leftrightarrow \mathcal{P}(G)$ ,  $\mathcal{Z}(G) \leftrightarrow \mathcal{B}(G)$  nennen wir die Gruppen  $\mathcal{C}(G)$  auch *graphische* Gruppen und die Gruppen  $\mathcal{Z}(G)$  *cographische* Gruppen.

Wir kommen zur Verallgemeinerung des Färbungsbegriffes auf beliebige Kettengruppen. Motiviert durch 8.9 und 8.10 geben wir folgende Definition.

**Definition.** Sei  $\Gamma$  eine Kettengruppe auf  $S$ . Eine *Färbung* von  $\Gamma$  ist ein Paar von Ketten  $f, g \in \Gamma$ , so dass  $(f(s), g(s)) \neq (0, 0)$  für alle  $s \in S$  gilt. Oder in der Mengensprache: Ein Paar von Trägern  $\|f\|, \|g\|$  aus  $\Gamma$ , die zusammen alle Elemente von  $S$  bedecken. Wir sagen,  $\Gamma$  ist *färbbar* oder *chromatisch*, wenn eine Färbung existiert, ansonsten *achromatisch*.

Die Aussagen 8.9 und 8.10 lauten in dieser Terminologie:  $\mathcal{C}(G)$  ist genau dann chromatisch, wenn  $G$  4-färbbar ist. Für einen 3-regulären Graphen  $G$  ist  $\mathcal{Z}(G)$  genau dann chromatisch, wenn  $G$  3-kantenfärbbar ist. Beispielsweise ist  $\mathcal{C}(K_5)$  achromatisch und ebenso  $\mathcal{Z}(P)$ ,  $P =$  Petersen Graph.

Zur weiteren Analyse der Existenz von Färbungen erinnern wir an Hadwigers Vermutung aus Kapitel 5, für  $n = 5$ : Ein Graph  $G$ , der nicht 4-färbbar ist, enthält einen Untergraphen, der zu einem Graphen  $K_5$  kontrahiert werden kann. Die Frage der 4-Färbbarkeit – d. h. in unserer Terminologie, der Färbbarkeit der Cozyklengruppe  $\mathcal{C}(G)$  – hängt also allein von der Existenz eines solchen  $K_5$  ab. Um dies auf beliebige Kettengruppen übertragen zu können, müssen wir daher zunächst die Begriffe „Untergraph“ und „Kontraktion“ übersetzen.

**Definition.** Sei  $\Gamma$  eine Kettengruppe auf  $S$  und  $A \subseteq S$ . Für  $f \in \Gamma$  definieren wir  $f_A$  als die Einschränkung von  $f$  auf  $A$ , d. h.  $f_A(s) = f(s)$  für alle  $s \in A$ . Die Menge der verschiedenen Ketten  $f_A$ ,  $f \in \Gamma$ , bildet wieder eine Kettengruppe, die *Restriktion*  $\Gamma.A$  von  $\Gamma$ .

Ist  $\mathcal{M}(\Gamma)$  das Matroid von  $\Gamma$ , so erhalten wir offensichtlich das zu  $\Gamma.A$  korrespondierende Matroid, indem wir alle unabhängigen Mengen von  $\mathcal{M}(\Gamma)$  nehmen, die ganz in  $A$  liegen. Wir nennen dieses Matroid ebenfalls die *Restriktion* auf  $A$ , mit der Bezeichnung  $\mathcal{M}(\Gamma).A = \mathcal{M}(\Gamma.A)$ . Klarerweise gilt  $r(\mathcal{M}(\Gamma).A) = r(A)$ , wobei  $r(A)$  der Rang von  $A$  in  $\mathcal{M}(\Gamma)$  ist. Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist daher  $\mathcal{P}(G).A$  genau das Polygonmatroid des Untergraphen  $G = (V, A)$ . Zur Beibehaltung der Analogie schreiben wir für diesen Untergraphen ebenfalls  $G.A$  und haben somit:

$$C(G).A = C(G.A), \mathcal{P}(G).A = \mathcal{P}(G.A).$$

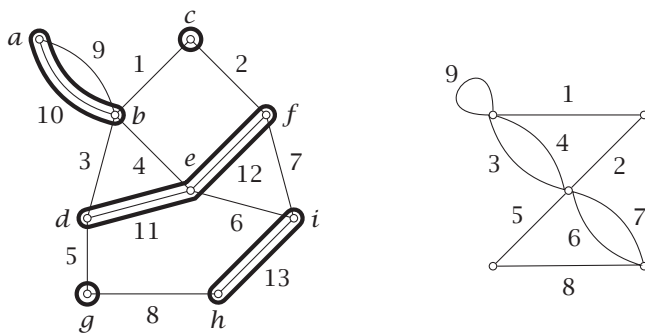
Ist  $(f, g)$  eine Färbung von  $\Gamma$ , so ergibt  $\{f_A, g_A\}$  klarerweise eine Färbung von  $\Gamma.A$ , so dass wir notieren können:

**Satz 8.12.** *Ist die Kettengruppe  $\Gamma$  färbbar, so auch jede Restriktion  $\Gamma.A$ .*

Als Nächstes übertragen wir die Kontraktion.

**Definition.** Sei  $\Gamma$  eine Kettengruppe auf  $S$ ,  $A \subseteq S$ . Die Menge der Ketten  $f \in \Gamma$ , welche außerhalb  $A$  identisch verschwinden, bilden mit ihrer Einschränkung  $f_A$  auf  $A$  eine weitere Kettengruppe, die *Kontraktion*  $\Gamma \times A$  auf  $A$ .

Wie sieht dies für Graphen aus? Wir definieren die *Kontraktion*  $G \times A$  von  $G$  auf  $A \subseteq E$  folgendermaßen: Die Ecken seien die Komponenten des Untergraphen  $G.(E \setminus A)$ , die Kanten seien jene aus  $A$ , und wir verbinden  $e$  mit jenen Komponenten aus  $G.(E \setminus A)$ , welche in  $G$  die Endecken von  $e$  enthalten. Wählen wir beispielsweise im Graphen  $G$  aus Figur 8.5 die Menge  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$ , so hat  $G.(E \setminus A)$  die Komponenten  $\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}, \{g\}, \{h, i\}$  und wir erhalten als Kontraktion  $G \times A$  den in Figur 8.5 rechts abgebildeten Graphen.



Figur 8.5

Unsere Konstruktion  $G \rightarrow G \times A$  geht also so vor sich, dass wir die Komponenten aus  $G.(E \setminus A)$  auf einzelne Ecken zusammenziehen, oder, mit anderen Worten, dass wir die Kanten aus  $E \setminus A$  nacheinander kontrahieren – daher der Name.

Die Leser können sich mühelos überlegen (wir können die Kontraktion ja Kante für Kante durchführen wie im Beweis von 4.8), dass die Cozyklen von  $G \times A$  genau

die Ketten aus  $\mathcal{C}(G) \times A$  sind. Nach Definition der Kontraktion sind im Matroid  $\mathcal{M}(\Gamma) \times A$  korrespondierend zu  $\Gamma \times A$  genau jene Mengen  $B \subseteq A$  unabhängig, für die  $B \cup C$  unabhängig in  $\mathcal{M}(\Gamma)$  ist, für alle unabhängigen Mengen  $C \subseteq S \setminus A$ . Wir nennen  $\mathcal{M}(\Gamma) \times A$  das zu  $A$  *kontrahierte* Matroid, für dessen Rang nach dem eben Gesagten  $r(\mathcal{M}(\Gamma) \times A) = r(\mathcal{M}(\Gamma)) - r(S \setminus A)$  gilt. Mit dieser Schreibweise haben wir also

$$\mathcal{C}(G) \times A = \mathcal{C}(G \times A), \quad \mathcal{P}(G) \times A = \mathcal{P}(G \times A).$$

Wie können wir die Restriktionen und Kontraktionen der Zykelgruppe bzw. des Bondmatroides eines Graphen deuten? Dazu stellen wir einige nützlichen Formeln zusammen. Zunächst ist folgender Sachverhalt klar:

**Hilfssatz 8.13.** *Sei  $\Gamma$  Kettengruppe auf  $S$  und  $A \subseteq B \subseteq S$ . Dann gilt:  $(\Gamma.B).A = \Gamma.A$ ,  $(\Gamma \times B) \times A = \Gamma \times A$ .*

Nun kommen wir zu einem wichtigen Begriff, der die beiden Operationen Restriktion und Kontraktion zusammenfasst.

**Definition.** Ein *Minor* einer Kettengruppe  $\Gamma$  auf  $S$  ist eine Kettengruppe der Gestalt  $(\Gamma.B) \times A$  mit  $A \subseteq B \subseteq S$ . Analog sprechen wir von *Minoren* des Matroides  $\mathcal{M}(\Gamma)$ .

Wegen  $\Gamma.S = \Gamma$ ,  $\Gamma \times S = \Gamma$  ist jede Restriktion und jede Kontraktion, und somit auch  $\Gamma$  selber, ein Minor. Dass die Reihenfolge der Operationen keine Rolle spielt, zeigt der folgende Hilfssatz, der direkt aus der Definition gewonnen werden kann.

**Hilfssatz 8.14.** *Sei  $\Gamma$  Kettengruppe auf  $S$  und  $A \subseteq B \subseteq S$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} (\Gamma.B) \times A &= \left( \Gamma \times (S \setminus (B \setminus A)) \right) \cdot A \\ (\Gamma \times B).A &= \left( \Gamma.(S \setminus (B \setminus A)) \right) \times A. \end{aligned}$$

*Somit: Jeder Minor eines Minors ist ein Minor.*

**Hilfssatz 8.15.** *Sei  $\Gamma$  Kettengruppe auf  $S$ ,  $\Gamma^*$  die duale Gruppe,  $A \subseteq S$ . Dann gilt:*

$$\begin{aligned} (\Gamma.A)^* &= \Gamma^* \times A, \\ (\Gamma \times A)^* &= \Gamma^*.A. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir beweisen die erste Behauptung, woraus die zweite durch Dualität folgen wird. Es sei  $f$  irgendeine Kette auf  $A$  und  $\hat{f}$  die Kette auf  $S$ , welche auf  $A$  mit  $f$  übereinstimmt, und außerhalb  $A$  identisch 0 ist.  $f$  ist genau dann orthogonal zu allen Ketten aus  $\Gamma.A$  (und damit in  $(\Gamma.A)^*$ ), wenn  $\hat{f}$  orthogonal zu allen Ketten aus  $\Gamma$  ist. Dies bedeutet aber gerade, dass  $f \in \Gamma^* \times A$  ist.  $\square$

Als Anwendung auf die Graphenmatroide erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(G.A) &= \mathcal{Z}(G) \times A, & \mathcal{Z}(G \times A) &= \mathcal{Z}(G).A, \\ \mathcal{B}(G).A &= \mathcal{B}(G \times A), & \mathcal{B}(G) \times A &= \mathcal{B}(G.A). \end{aligned}$$

Halten wir unsere Ergebnisse für Graphen fest.

**Satz 8.16.** *Jeder Minor einer graphischen Gruppe  $\mathcal{C}(G)$  ist wieder graphisch, jeder Minor einer cographischen Gruppe  $\mathcal{Z}(G)$  ist wieder cographisch. Oder in Matroidform: Jeder Minor eines graphischen Matroides  $\mathcal{P}(G)$  ist wieder graphisch, und jeder Minor eines cographischen Matroides  $\mathcal{B}(G)$  ist wieder cographisch.*

Angenommen, die gegebene Kettengruppe  $\Gamma$  ist nicht färbbar. Dies ist trivialerweise immer dann der Fall, wenn es ein Element  $a \in S$  gibt, auf dem alle Ketten verschwinden. In der Cozyklengruppe  $\mathcal{C}(G)$  sind dies genau die Schlingen und in der Zyklengruppe  $\mathcal{Z}(G)$  die Brücken von  $G$ . Weist  $\Gamma$  kein solches Element auf, so nennen wir  $\Gamma$  eine *volle Kettengruppe*. Ist die volle Gruppe  $\Gamma$  nicht färbbar, so existiert gemäß 8.12 und 8.13 eine minimale (volle) Restriktion  $\Gamma.A$ , die ebenfalls nicht färbbar ist. Nun versuchen wir  $\Gamma.A$  solange zu kontrahieren, wie die Nichtfärbbarkeit erhalten bleibt. Damit kommen wir zur folgenden fundamentalen Definition.

**Definition.** Eine *irreduzible Kettengruppe* ist eine volle achromatische Kettengruppe, die keinen vollen achromatischen Minor außer sich selbst enthält.

Jede volle achromatische Kettengruppe muss eine irreduzible Gruppe als Minor enthalten. Gelingt es uns demnach, eine Liste aller irreduziblen Kettengruppen aufzustellen, so ist das Problem der Färbbarkeit im Prinzip gelöst: Wenn die Gruppe  $\Gamma$  achromatisch ist, so muss sie einen Minor aus der Liste enthalten. Somit ist unser (zugegeben ehrgeiziges) Programm:

*Man finde alle irreduziblen Kettengruppen!*

Wegen 8.16 müssen die in einer Cozyklengruppe  $\mathcal{C}(G)$  enthaltenen irreduziblen Gruppen wieder graphisch sein, und analog für  $\mathcal{Z}(G)$ . Hadwigers Vermutung lautet in dieser Formulierung somit:

*Die Cozyklengruppe  $\mathcal{C}(K_5)$  ist die einzige irreduzible graphische Gruppe.*

Dass  $\mathcal{C}(K_5)$  tatsächlich irreduzibel ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass jeder echte Untergraph von  $K_5$  und jeder Graph auf weniger als 5 Ecken 4-färbbar ist.

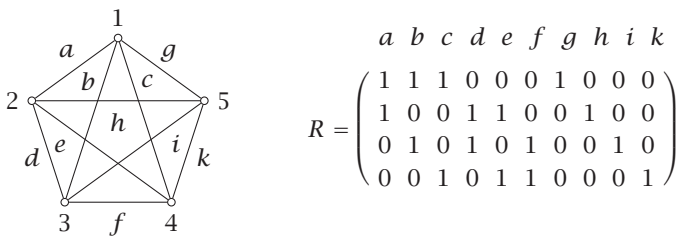
Welche Zyklengruppen  $\mathcal{Z}(G)$  sind irreduzibel? Ist  $G$  3-regulär, so bedeutet dies nach 8.10, dass  $G$  jedenfalls brückenlos ist und keine 3-Kantenfärbung besitzt. Natürlich ist es der Petersen Graph  $P$ , der einem sofort in den Sinn kommt. Die Leser können sich (nicht ganz mühelos) überlegen, dass  $\mathcal{Z}(P)$  tatsächlich irreduzibel ist. Tutte hat dies zum Anlass genommen, die folgende Vermutung auszusprechen:

*Die Zyklengruppe  $\mathcal{Z}(P)$  ist die einzige irreduzible cographische Gruppe.*

Wir haben schon bemerkt, dass die Hadwiger Vermutung die 4-Farben Vermutung einschließt, aber auch für die Tutte Vermutung trifft dies zu. In der Graphensprache besagt sie ja: Jeder brückenlose 3-reguläre Graph ohne 3-Kantenfärbung besitzt einen Untergraphen, der zu  $P$  kontrahiert werden kann. Ist aber  $G$  ein ebener brückenloser 3-regulärer Graph, so kann  $G$  keinen Minor isomorph zu dem nichtplättbaren Graphen  $P$  haben, ist somit 3-kantenfärbbar – woraus mit 1.7 der 4-Farbensatz bewiesen wäre.



Wir wollen uns nun überlegen, wie die Matroide  $\mathcal{M}(\Gamma)$  irreduzibler Kettengruppen  $\Gamma$  aussehen. Nehmen wir als Beispiel  $\mathcal{P}(K_5)$  mit der Inzidenzmatrix als Koordinatisierungsmatrix, wobei wir eine Zeile, z.B. die letzte, weglassen können, da  $r(\mathcal{P}) = 4$  ist. Wir wissen bereits (Satz 8.11 und die anschließenden Bemerkungen), dass  $\mathcal{P}(K_5)$  genau durch die lineare Abhängigkeit auf den Spalten gegeben ist. Wir fassen nun die Spalten als Punkte im 3-dimensionalen projektiven Raum  $PG_3$  über  $GF(2)$  auf und versuchen, die so erhaltene Konfiguration geometrisch zu beschreiben – genau dies war Veblens ursprüngliche Idee.



Figur 8.6

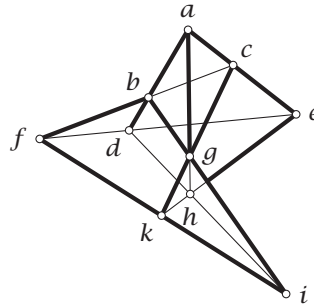
Was versteht man unter dem *projektiven Raum*  $PG_{m-1}$  über  $GF(2)$ ? Nichts anderes als die Unterraumstruktur des Vektorraumes  $V_m$  der Dimension  $m$  über  $GF(2)$ . Die *Punkte* von  $PG_{m-1}$  sind die 1-dimensionalen Unterräume von  $V_m$ , d.h. alle Vektoren  $\neq 0$  (geometrische Dimension 0). Die *Geraden* sind die 2-dimensionalen Unterräume von  $V_m$  (geometrische Dimension 1), und allgemein ist ein Unterraum der geometrischen Dimension  $k-1$  ein  $k$ -dimensionaler Unterraum von  $V_m$ . Jede Gerade enthält 3 Punkte, nämlich zu  $P$  und  $Q$  als dritten Punkt  $P + Q$ . Mit  $V_m$  bezeichnen wir die Punktmenge von  $PG_{m-1}$ , also alle Vektoren  $\neq 0$  und mit  $\bar{U}$  den von  $U \subseteq V_m$  erzeugten Unterraum. Zum Beispiel ist für  $P \neq Q$ ,  $\overline{PQ} = \{P, Q, P + Q\}$  die von  $P$  und  $Q$  erzeugte Gerade.

Um Verwirrungen vorzubeugen, werden wir stets die *Vektorraum-Dimension* betrachten und wie bisher vom *Rang*  $r(A)$  einer Menge  $A \subseteq V_m$  sprechen. Die geometrische Dimension ist stets um 1 kleiner.

Betrachten wir  $\mathcal{P}(K_5)$  in Figur 8.6. Fassen wir die Spalten von  $R$  als Punkte in  $PG_3$  auf, so sehen wir z.B., dass  $a + b = d$  ist, also  $\{a, b, d\}$  eine Gerade bildet (korrespondierend zum Polygon  $\{a, b, d\}$  in  $K_5$ ). Nehmen wir als weiteres Beispiel  $\{e, h, i, f\}$ . Da dies im Graphen ein Polygon ist, so muss für die entsprechenden Spalten gelten, dass je 3 von ihnen unabhängig sind, alle 4 zusammen aber abhängig. In einer geometrischen Realisierung, und bis Rang 4 (= geometrische Dimension 3) kann dies noch veranschaulicht werden, werden wir versuchen, die Geraden mit 3 Punkten nach Möglichkeit als affine reelle Geraden zu zeichnen, und alle Ebenen (also Unterräume des Ranges 3) als affine reelle Ebenen. Führen wir dies für  $\mathcal{P}(K_5)$  durch, so erhalten wir die in Figur 8.7 abgebildete Konfiguration. Die zehn 3-punktigen Geraden entsprechen genau den 10 Dreiecken in  $K_5$ .

Diese Konfiguration ist in der projektiven Geometrie wohlbekannt. Sie gibt die Situation des Desargues'schen Satzes wieder mit Zentrum  $g$  und Achse  $\{f, d, e\}$ . Wir nennen die Figur daher den *Desargues Block*.

Im allgemeinen Fall gehen wir genauso vor. Wir nehmen zu einer gegebenen Kettengruppe  $\Gamma$  auf  $S$  irgendeine Koordinatisierungsmatrix  $R$  mit  $m$  Zeilen ( $m \geq r(\Gamma)$ ) und



Figur 8.7

$n = |S|$  Spalten und fassen die Spaltenvektoren als Punkte in  $\text{PG}_{m-1}$  auf. Die auf solche Weise erhaltene Punkte-Konfiguration nennen wir den zugehörigen *Block* von  $\Gamma$  in  $\text{PG}_{m-1}$ . Unser Problem besteht nun darin, die Blöcke *irreduzibler* Kettengruppen *geometrisch* zu beschreiben. Im Folgenden werden wir die Sätze rein algebraisch, also im Vektorraum  $\mathcal{V}_m$ , formulieren und sie anschließend geometrisch interpretieren.

Als ersten Schritt charakterisieren wir die vollen achromatischen (aber noch nicht notwendigerweise minimalen) Konfigurationen.

**Satz 8.17.** *Sei  $\Gamma$  eine volle Kettengruppe auf  $S$ .  $\Gamma$  ist genau dann achromatisch, wenn der zugehörige Block  $B$  Rang  $\geq 3$  hat und  $B$  in  $\mathcal{V}_m$  jeden Unterraum des Ranges  $m - 2$  nichttrivial schneidet.*

*Beweis.* Wir können uns auf den Fall  $m = r(\Gamma) = r(B)$  beschränken. Denn schneidet  $B$  jeden Unterraum  $U \subseteq \bar{B}$  mit  $r(U) = r(B) - 2$  nichttrivial, so gilt dies auch für jeden Unterraum  $W \subseteq \mathcal{V}_m$  mit  $r(W) = m - 2$ , da nach der Rangformel für Unterräume  $r(W \cap \bar{B}) = r(W) + r(\bar{B}) - r(W + \bar{B}) \geq m - 2 + r(B) - m = r(B) - 2$  ist, also  $W \cap \bar{B}$  einen Unterraum von  $\bar{B}$  des Ranges  $\geq r(B) - 2$  enthält. Wir bezeichnen den zu  $s_j \in S$  gehörenden Vektor in  $\mathcal{V}_m$  mit  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und setzen  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Sei  $f \in \Gamma$ ,  $f \neq 0$ . Wir fassen  $f$  als Abbildung  $f : B \rightarrow \text{GF}(2)$  mittels  $f(b_j) = f(s_j)$  auf. Da  $B$  wegen  $r(B) = m$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{V}_m$  ist, so kann  $f$  eindeutig auf ganz  $\mathcal{V}_m$  erweitert werden, und wir wissen aus der Linearen Algebra, dass  $U_f = \{x \in \mathcal{V}_m : f(x) = 0\}$  einen Unterraum des Ranges  $m - 1$ , also eine Hyperebene bildet. Wegen  $r(\Gamma) = m$  werden andererseits auch alle Hyperebenen auf diese Weise erhalten und es gilt natürlich  $U_f \neq U_g$  für  $f \neq g \in \Gamma$ . Also: Jede der  $2^m - 1$  Hyperebenen  $U$  korrespondiert mittels  $U = U_f$  eineindeutig zu einer Kette  $f \neq 0$  aus  $\Gamma$ .

Es sei nun  $\Gamma$  chromatisch. Falls  $m \leq 2$  ist, so ist die Bedingung  $r(B) \geq 3$  verletzt. Wir nehmen also  $m \geq 3$  an. Nach Definition der Färbbarkeit gibt es Ketten  $f$  und  $g$  in  $\Gamma$ , so dass  $f(s) \neq 0$  oder  $g(s) \neq 0$  für alle  $s \in S$  gilt. Dies heißt aber, dass der Unterraum  $U_f \cap U_g$  (vom Rang  $m - 2$ ) keinen einzigen Punkt von  $B$  enthält.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass  $B$  nicht beide Bedingungen erfüllt. Falls  $r(B) = m \geq 3$  verletzt ist, so haben wir  $m = 1$  oder  $2$  ( $m = 0$  ist nicht möglich, da  $\Gamma$  voll ist), d.h.  $\Gamma$  enthält eine linear unabhängige Kette  $f$  (identisch 1) oder zwei linear unabhängige Ketten  $f, g$ . In jedem Fall ist  $\{f, f\}$  bzw.  $\{f, g\}$  eine Färbung, also  $\Gamma$  chromatisch. Es bleibt der Fall, dass  $m \geq 3$  ist und ein Unterraum  $W$  des Ranges  $m - 2$  existiert mit  $W \cap B = \emptyset$ . Dann gilt aber  $W = U_f \cap U_g$  mit  $f, g \in \Gamma$ , also

$W = \{x \in \mathcal{V}_m : f(x) = g(x) = 0\}$ . Wegen  $W \cap B = \emptyset$  folgt daraus sofort, dass  $\{f, g\}$  eine Färbung von  $\Gamma$  ist.  $\square$

Einen Block, der die Bedingungen in 8.17 erfüllt, wollen wir *2-Block* nennen. Also:  $\Gamma$  ist genau dann achromatisch, wenn  $B$  ein 2-Block ist. Um von  $\Gamma$  zu einem irreduziblen Minor zu kommen, können wir nach 8.13 und 8.14 in zwei Schritten vorgehen. Zuerst bestimmen wir eine minimale achromatische Restriktion und davon eine minimale volle achromatische Kontraktion. Die minimalen achromatischen Restriktionen entsprechen offenbar den *minimalen 2-Blöcken*. Es ist also nur noch zu klären, wie die Blöcke von  $\Gamma$  und einer Kontraktion  $\Gamma \times A$  zusammenhängen.

**Lemma 8.18.** *Es sei  $\Gamma$  eine volle achromatische Kettengruppe,  $r(\Gamma) = m$ , deren 2-Block  $B \subseteq \mathcal{V}_m$  minimal ist.  $\Gamma$  besitzt genau dann eine echte volle achromatische Kontraktion  $\Gamma \times A$ , wenn  $\emptyset \neq C \subseteq B$  mit  $r(C) \leq m - 2$  existiert, so dass jeder  $(m - 2)$ -dimensionale Unterraum  $W$ , der  $C$  enthält, auch einen Punkt  $b \in B \setminus \overline{C}$  enthält.*

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $b_j \in B$  wieder den zu  $s_j \in S$  entsprechenden Punkt. Es sei  $\Gamma \times A$  eine echte volle achromatische Kontraktion und  $C \subseteq B$  die zu  $S \setminus A$  korrespondierenden Punkte des Blocks. Nach 8.17 haben wir  $r(\Gamma \times A) \geq 3$ , also  $r(C) = r(S \setminus A) = r(\Gamma) - r(\Gamma \times A) \leq m - 3$ . Nach Definition verschwinden alle Ketten  $f \in \Gamma \times A$  auf  $S \setminus A$ . Wäre  $b_j \in B \setminus C$  abhängig von  $C$ , so hätten wir  $f(s_j) = 0$  für alle  $f \in \Gamma \times A$ , d. h.  $\Gamma \times A$  wäre nicht voll. Wir schließen daraus  $B \setminus C = B \setminus \overline{C}$ . Es sei  $U \subseteq \mathcal{V}_m$  ein Unterraum der Dimension  $m - r(C) = m - r(\overline{C})$  mit  $U \cap \overline{C} = \{0\}$ . Jeder Punkt  $b \in B \setminus C$  determiniert einen Unterraum  $\overline{C \cup \{b\}}$  des Ranges  $r(C) + 1$  und somit einen eindeutigen Punkt  $b' = \overline{C \cup \{b\}} \cap U$ . Die Konfiguration  $B' = \{b' : b \in B \setminus C\}$  ist aber ein Block korrespondierend zur Gruppe  $\Gamma \times A$ . Denn  $b'_1, \dots, b'_n$  in  $B'$  sind linear unabhängige Punkte genau dann, wenn  $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$  unabhängig von  $C$  ist. Dies war aber genau der Unabhängigkeitsbegriff im Matroid  $\mathcal{M}(\Gamma) \times A$  (siehe die Bemerkung vor 8.13). Ist nun  $W$  ein Unterraum des Ranges  $m - 2$ , der  $C$  umfasst, so muss  $W \cap B' \neq \emptyset$  sein wegen 8.17. Ist  $b' \in W \cap B'$ , so haben wir  $W \supseteq \overline{C \cup \{b'\}} = \overline{C \cup \{b\}}$ ,  $b \in B \setminus C$ , also enthält  $W$  einen Punkt  $b \in B \setminus C = B \setminus \overline{C}$ . Der eben durchgeführte Schluss ist ohne Weiteres umkehrbar.  $\square$

Mit 8.17 und 8.18 haben wir die geometrische Charakterisierung irreduzibler Kettengruppen fertiggestellt. Sei  $B$  ein 2-Block und  $\emptyset \neq C \subseteq B$ . Eine *Tangente* von  $C$  in  $B$  ist ein Unterraum vom Rang  $m - 2$ , der ganz  $C$  (und damit  $\overline{C}$ ) enthält, aber keinen weiteren Punkt  $b \in B \setminus \overline{C}$ . Der Name Tangente ist klar: Ist  $C = \{b\}$  ein einzelner Punkt, so ist eine Tangente von  $b$  ein Unterraum  $U$  mit  $r(U) = m - 2$ , der  $B$  genau in  $b$  trifft. Hat jede nichtleere Untermenge  $C \subseteq B$  mit  $r(C) \leq m - 2$  eine Tangente, so möge  $B$  ein *tangentialer 2-Block* heißen. Jeder tangentiale 2-Block ist minimal, denn ansonsten gäbe es einen Punkt  $b \in B$ , dessen Komplementärmenge  $B \setminus \{b\}$  ein 2-Block wäre, so dass nach Definition jeder Unterraum vom Rang  $m - 2$ , also auch jede Tangente von  $b$ , die Menge  $B \setminus \{b\}$  treffen müsste.

Als Zusammenfassung unserer Analyse können wir das folgende Hauptergebnis formulieren:

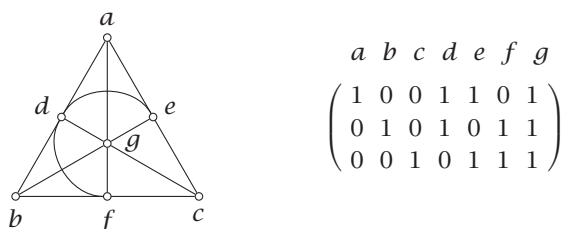
**Satz 8.19** (Tutte). *Eine Kettengruppe  $\Gamma$  ist genau dann irreduzibel, wenn jeder zugehörige Block (d. h. jeder geometrischen Realisierung) ein tangentialer 2-Block ist.*

Wir stehen also nun vor dem geometrischen Problem:

*Man finde alle tangentialen 2-Blöcke!*

Als Start wollen wir alle tangentialen 2-Blöcke  $B$  mit  $r(B) \leq 4$  bestimmen. Aus 8.17 wissen wir, dass ein 2-Block mindestens Rang 3 hat. Für Rang 3 bzw. geometrische Dimension 2 ist die Sache trivial. Die volle projektive Ebene  $\text{PG}_2$  (d.h.  $\mathcal{V}_3 \setminus \{0\}$ ) ist ein tangentialer 2-Block (jeder Punkt ist seine eigene Tangente), und dies ist auch der einzige, da jede echte Untermenge  $B \subsetneq \text{PG}_2$  mindestens einen Punkt, d.h. einen Unterraum des Ranges  $r(B) - 2 = 1$ , nicht trifft und daher nicht 2-Block sein kann.

In der Geometrie nennt man  $\text{PG}_2$  die Fano Ebene, so dass wir in unserer Sprache  $\text{PG}_2$  den *Fano Block*  $F$  nennen wollen. Eine ebene Realisierung ist in Figur 8.8 angegeben.  $F$  hat 7 Punkte und 7 dreipunktige Geraden, von denen eine krumm gezeichnet ist.



Figur 8.8

Eine Koordinatisierungsmatrix des zugehörigen Matroides  $\mathcal{M}(S)$  erhält man, indem man alle Vektoren  $\neq 0$  der Länge 3 nebeneinander schreibt. Ist  $\mathcal{M}(S)$  graphisch? Angenommen, es gibt einen Graphen  $G = (V, S)$ ,  $S = \{a, b, \dots, g\}$  mit  $\mathcal{P}(G) \cong \mathcal{M}(S)$ . Da je zwei Elemente aus  $S$  in einem Kreis enthalten sind, müsste  $G$  zusammenhängend sein, woraus wegen  $r(\mathcal{M}) = 3$  und  $r(\mathcal{P}(G)) = |V| - c(G)$  folgt, dass  $|V| = 4$  sein muss. Jeder Graph mit 4 Ecken ist aber natürlich 4-färbbar, im Widerspruch dazu, dass der Fano Block tangential ist. Genauso einfach überlegt man sich, dass  $\mathcal{M}(S)$  nicht cographisch sein kann.

Nun zu Rang 4 bzw. geometrische Dimension 3. Es sei  $B$  ein tangentialer 2-Block vom Rang 4. Der volle Raum  $\text{PG}_3 = \mathcal{V}_4 \setminus \{0\}$  enthält  $2^4 - 1 = 15$  Punkte. *Einen* solchen tangentialen 2-Block kennen wir bereits, den Desargues Block  $D$  aus Figur 8.7. Wir wollen zeigen, dass  $D$  (bis auf Isomorphie) der einzige ist.  $D$  ist leicht mittels der Komplementärmenge  $D' = \text{PG}_3 \setminus D$  zu beschreiben. Sehen wir in Figur 8.6 nach: Die dort fehlenden Spalten  $\neq 0$  sind

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden 5 Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  sind in *allgemeiner Lage*, d.h. je 4 von ihnen sind linear unabhängig. Ferner sehen wir, dass  $D$  genau aus den Punkten  $P_i + P_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 5$ , besteht. Sind umgekehrt 5 Punkte  $P_1, \dots, P_5$  in allgemeiner Lage gegeben, so können sie durch geeignete Koordinatentransformation auf die

Form  $D'$  von oben gebracht werden, so dass die Komplementärmenge genau der Desargues Block  $D$  aus Figur 8.7 ist. Wir können dies auch direkt sehen. Sei  $D = \text{PG}_3 \setminus \{P_1, \dots, P_5\} = \{P_i + P_j : 1 \leq i < j \leq 5\}$ . Wir definieren  $\{P_1, \dots, P_5\}$  als die Ecken eines Graphen und erklären  $P_i + P_j$  als die Kante von  $P_i$  nach  $P_j$ , so dass  $K_5$  resultiert. Eine Punktmenge  $\{P_i + P_j, P_k + P_\ell, \dots\}$  von  $D$  ist genau dann minimal abhängig, wenn jedes  $P_i$ , das überhaupt vorkommt, genau zweimal vorkommt, also genau dann, wenn die entsprechende Kantenmenge ein Polygon in  $K_5$  ist.

Es sei also nun  $B$  ein beliebiger tangentialer 2-Block mit  $r(B) = 4$ . Da  $B$  ein minimaler 2-Block ist, kann  $B$  keinen Fano Block, d. h. keine Ebene in  $\text{PG}_3$  enthalten. Die Komplementärmenge  $B' = \text{PG}_3 \setminus B$  muss also jede Ebene nichttrivial schneiden. Es bleibt zu zeigen, dass  $B'$  fünf Punkte in allgemeiner Lage enthält, denn dann muss wegen der Minimalität  $B$  ein Desargues Block sein. Da  $B$  als 2-Block jede Gerade schneidet, kann  $B'$  keine ganze Gerade enthalten. Das heißt insbesondere: Sind  $P, Q \in B'$ , so muss  $P + Q \in B$  sein. Da umgekehrt  $B'$  jede Ebene trifft, muss  $B'$  zumindest 3 unabhängige Punkte  $P_1, P_2, P_3$  enthalten, da es zu  $P_1, P_2$  eine Ebene  $E$  gibt mit  $E \cap \overline{P_1 P_2} = P_1 + P_2 \in B$ . Die 3 Punkte  $P_1 + P_2, P_1 + P_3, P_2 + P_3$  sind allesamt in  $B$  und bilden eine Gerade. Diese Gerade ist neben  $\overline{P_1 P_2 P_3}$  noch in zwei weiteren Ebenen enthalten, also muss es  $P_4 \in B'$  unabhängig von  $P_1, P_2, P_3$  geben, d. h.  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \subseteq B'$  ist unabhängig. Die 6 Punkte  $P_i + P_j, 1 \leq i < j \leq 4$ , und  $P_5 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$  bilden eine Ebene. Da alle Punkte  $P_i + P_j \in B$  sind, muss demnach  $P_5 \in B'$  sein, und wir sind fertig, da die 5 Punkte  $P_1, \dots, P_5 \in B'$  in allgemeiner Lage sind.

Schon der Rang 4 Fall deutet an, dass das Auffinden oder Ausschließen von tangentialen 2-Blöcken keine leichte Sache ist. Tutte hat weiter zeigen können, dass es keinen Rang 5 tangentialen 2-Block gibt und dass der einzige solche Block vom Rang 6 der *Petersen Block*  $P$  ist, korrespondierend zum Bondmatroid des Petersen Graphen. Inzwischen weiß man, dass es auch keine Beispiele für Rang 7 gibt, und vielleicht wird man eines Tages Tuttes weitestgehende Vermutung klären können:

**Vermutung** (Tutte). *Der Fano, Desargues und Petersen Block sind die einzigen tangentialen 2-Blöcke.*

Diese letzte Vermutung schließt die Hadwiger Vermutung und damit die 4-Farben Vermutung ein. Doch schon die äußerst mühsame Abhandlung der Fälle mit Rang 5, 6 und 7 deutet an, dass es hier ohne grundlegend neue Techniken keine Fortschritte geben wird.

Wir sind ans Ende der letzten großen theoretischen Idee zur Lösung des 4-Farben Problems gekommen und zeitlich bis zur Mitte der 1960'er Jahre vorgestoßen. In den gut 30 Jahren seit den Sätzen von Menger und Kuratowski und dem Buch von König hatte die Graphentheorie einen enormen Aufschwung genommen, ihre Ergebnisse wurden in vielen anderen Gebieten angewandt – kurzum sie war eine etablierte Disziplin innerhalb der Diskreten Mathematik geworden.

Und das 4-Farben Problem? Es war so ungelöst wie eh und je. Bei jedem Angriff war man einen Schritt vor dem Ziel gestoppt worden. Ob dies Heawoods 5-Farbensatz war, ob Vizings Resultat über die Kanten 4-Färbbarkeit 3-regulärer Graphen oder Tuttes Ergebnis über die Existenz Hamiltonscher Kreise in 4-fach zusammenhängenden ebenen Graphen – der letzte entscheidende Durchbruch wollte nicht gelingen. Gerade der Erfolg der Graphentheorie in ihrer Gesamtheit einerseits und die scheinbare Unmög-

lichkeit, die 4-Farben Vermutung zu entscheiden, andererseits, waren wohl ein Hauptgrund, warum das Interesse am 4-Farben Problem in den 1950'er und 1960'er Jahren deutlich abnahm. Vielleicht war es wirklich die topologische Kuriosität, als die es in der Frühzeit angesehen wurde, und möglicherweise war es auch gar nicht entscheidbar. Und wahrscheinlich ist es im Rückblick nur natürlich, dass eine Wiederbelebung mit neuen Impulsen, Fortschritten bis hin zur endgültigen Lösung gerade dort stattfand, wo man es am allerwenigsten vermutet hätte - nämlich beim ursprünglichen Programm von Kempe: *Man finde eine unvermeidbare Menge reduzierbarer Konfigurationen*. Und so wollen wir die letzten beiden Kapitel des 4-Farben Problems aufschlagen.

## Übungen zu Kapitel 8

1. Vervollständige den Beweis von 8.1.
2. Es sei  $S$  eine endliche Menge und  $t$  eine natürliche Zahl. Eine Familie  $\mathcal{H} \subseteq 2^S$ ,  $|\mathcal{H}| \geq 2$ , heißt  $t$ -Partition von  $S$ , falls (i)  $A \in \mathcal{H} \Rightarrow |A| \geq t$ , (ii) jede  $t$ -Untermenge von  $S$  in genau einer Menge aus  $\mathcal{H}$  enthalten ist. Zeige, dass  $\mathcal{G} = \{I \subseteq S : |I| \leq t\} \cup \{J \subseteq S : |J| = t + 1, J \not\subseteq A \text{ für } A \in \mathcal{H}\}$  ein Matroid auf  $S$  definiert. Bestimme den Rang  $r(A)$  für  $A \subseteq S$ . Gib Beispiele von 2- und 3-Partitionen.
- 3.\* Konstruiere das kleinste nicht-graphische Matroid (auf 4 Elementen).
4. Beweise 8.2 und zeige die Äquivalenz von (C2) und (C2').
5. Rechneraufgabe: Entwirf Programme zur Auflistung der Basen und Kreise eines Matroides, welches durch die Familie  $\mathcal{G}$  der unabhängigen Mengen gegeben ist.
6. Sei  $\mathcal{M}(S)$  das Matroid auf  $S$  mit der Familie  $\mathcal{G} = \{A \subseteq S : |A| \leq k\}$  als unabhängige Mengen. Wie sieht  $\mathcal{M}^*(S)$  aus?
- 7.\* Es sei  $S$  eine endliche Menge und  $r : 2^S \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften: (i)  $A \subseteq B \Rightarrow r(A) \leq r(B)$ , (ii)  $r(A \cap B) + r(A \cup B) \leq r(A) + r(B)$ , (iii)  $0 \leq r(A) \leq |A|$  für alle  $A, B \subseteq S$ . Zeige, dass ein eindeutiges Matroid auf  $S$  existiert, welches  $r$  als Rangfunktion besitzt. Vervollständige damit den Beweis von 8.5. (Hinweis: Definiere  $I$  als unabhängig  $\Leftrightarrow r(I) = |I|$ .)
- 8.\* Sei  $r$  die Rangfunktion von  $\mathcal{M}(S)$  und  $r^*$  die Rangfunktion des dualen Matroides  $\mathcal{M}^*(S)$ . Zeige, dass  $r^*(A) = |A| - r(S) + r(S \setminus A)$  für alle  $A \subseteq S$  gilt.
9. Beweise: Ein Matroid  $\mathcal{M}$  ist binär genau dann, wenn  $|C \cap D|$  gerade ist, für alle Kreise  $C$  in  $\mathcal{M}$  und alle Kreise  $D$  in  $\mathcal{M}^*$ .
10. Zeige, dass jedes Matroid auf höchstens 5 Elementen isomorph zu einem Transversalmatroid ist. Gilt dies auch noch für 6 Elemente?
- 11.\* Etwas schwieriger. Es sei  $(S, \mathcal{G})$  ein Matroid mit Rangfunktion  $r$  und  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  ein Mengensystem auf  $S$ . Wir nennen eine partielle Transversale  $T$  unabhängig, falls  $T \in \mathcal{G}$  ist. Zeige die folgende Verallgemeinerung des Hallschen Satzes: Genau dann hat  $\mathcal{A}$  eine unabhängige Transversale, wenn  $r(\bigcup_{i \in I} A_i) \geq |I|$  für alle  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  gilt. Wieso ist dies eine Verallgemeinerung von 6.5? (Hinweis: Betrachte eine submodulare Funktion wie nach 8.5.)
12. Es seien  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  zwei Matroide auf  $S$  mit den Rangfunktionen  $r_1$  und  $r_2$ . Zeige: Genau dann existiert eine  $t$ -Menge  $B \subseteq S$ , welche sowohl in  $\mathcal{M}_1$  wie in  $\mathcal{M}_2$  unabhängig ist, wenn  $r_1(A) + r_2(S \setminus A) \geq t$  für alle  $A \subseteq S$  gilt.
13. Folgere aus der vorhergehenden Übung einen Satz über gemeinsame Transversalen zweier Mengensysteme  $(S; \mathcal{A})$  und  $(S; \mathcal{B})$ .
- 14.\* Sei  $\mathcal{M}$  das binäre Matroid auf der Menge  $\mathcal{V}_n$  aller 0,1-Vektoren der Länge  $n$ . Bestimme  $\pi(\mathcal{M})$  und  $\beta(\mathcal{M})$ .

15. Zeige, dass 8.7(ii) im Fall von Graphen auf 6.20 reduziert.
16. Nach dem Satz von Brooks (5.5) ist der Petersen Graph  $P$  3-färbbar. Bestimme laut 8.8 zwei Cozyklen, die  $P$  überdecken.
17. Überlege nochmals im Detail die Konstruktion der Kontraktion  $G \times A$  eines Graphen.
- 18.\* Zeige: Jede Restriktion eines Transversalmatroides ist wieder ein Transversalmatroid, aber dasselbe gilt nicht für die Kontraktion.
19. Beschreibe die Kreise und Basen in einer Kontraktion  $\mathcal{M} \times A$ .
- 20.\* Zeige, dass der Fano Block nicht cographisch ist.



# III Finale

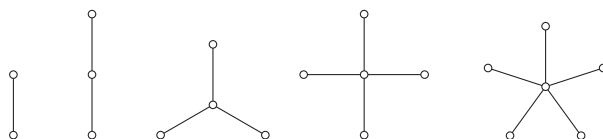
## 9 Zurück zum Anfang

Wir greifen die Ideen von Kempe zur Lösung des 4-Farben Problems und vor allem ihre Präzisierung durch Birkhoff (Kapitel 3) wieder auf - und zwar in der dualen Form. Nach Heawoods 5-Farbensatz 2.1 wissen wir, dass jeder ebene Graph  $G$  chromatische Zahl  $\chi(G) \leq 5$  hat. Ist die 4-Farben Vermutung falsch, so muss es also 5-chromatische ebene Graphen geben - und die Idee des Induktionsbeweises von Kempe war es gerade, die minimalen Graphen unter ihnen zu studieren, um schließlich aus einem Widerspruch heraus ihre Nichtexistenz und damit die 4-Farben Vermutung zu beweisen. Wir beginnen demnach mit der folgenden Definition, wobei klar ist, dass wir uns auf einfache Graphen beschränken können.

**Definition.** Ein *irreduzibler Graph*  $G$  ist ein einfacher 5-chromatischer ebener Graph mit einer minimalen Anzahl von Ecken.

Wie soll nun der Widerspruch erzielt werden? In zwei Schritten: Einmal, indem man eine Liste von Konfigurationen aufstellt, die in einem irreduziblen Graphen nicht auftreten können - diese Konfigurationen werden *reduzierbar* genannt. Und zweitens durch den Nachweis, dass gewisse Konfigurationenmengen *unvermeidbar* sind, in dem Sinne, dass in jedem irreduziblen Graphen mindestens eine der Konfigurationen enthalten sein muss.

Die einfachste unvermeidbare Menge ist die zu Figur 1.14 duale Menge. Jeder ebene Graph muss eine Ecke vom Grad  $\leq 5$  enthalten, und wir erhalten die in Figur 9.1 abgebildete unvermeidbare Menge:



Figur 9.1

Kempe hat, wie wir bereits in Kapitel 1 gesehen haben, die Reduzierbarkeit der ersten 4 Konfigurationen aus Figur 9.1 nachgewiesen, beim Beweis der Reduzierbarkeit der 5-Ecke war ihm jedoch ein irreparabler Fehler passiert. Kempes Fehler zum Trotz war das Programm, oder besser gesagt die Hoffnung, vorgegeben, immer mehr reduzierbare Konfigurationen zu finden, bis sie in ihrer Gesamtheit schließlich eine unvermeidbare Menge ergeben. In vielen Arbeiten, beginnend mit Birkhoff 1913, wurde die Liste reduzierbarer Konfigurationen nach und nach vergrößert, doch war sie auch in den 1960'er Jahren noch weit davon entfernt, eine unvermeidbare Menge zu bilden, ja es ist wohl so, dass die daran beteiligten Mathematiker in erster Linie interessiert waren,

eine untere Schranke für die Eckenzahl eines irreduziblen Graphen, die sogenannte *Birkhoff Zahl*  $b$ , zu finden. Konnte man zeigen, dass jeder ebene Graph mit  $n$  Ecken mindestens eine der bekannten reduzierbaren Konfigurationen enthalten muss, so folgte daraus  $b \geq n + 1$ , und je größer die Liste reduzierbarer Konfigurationen wurde, desto höher stieg die Birkhoff Zahl.

Von 1913 bis 1950 wurde die Birkhoff Zahl von der trivialen Schranke  $b \geq 12$  auf  $b \geq 36$  angehoben (wir werden einige dieser zum Teil äußerst spitzfindigen Methoden zum Nachweis der Reduzierbarkeit kennenlernen), aber insgesamt war dieser langsame Fortschritt eher Anlass zum Pessimismus. Es scheint, dass Heinrich Heesch von der Universität Hannover der erste war, der wieder mit Elan das ursprüngliche Kempe'sche Programm in Angriff genommen hat. Er gab nicht nur seiner Überzeugung Ausdruck, dass eine unvermeidbare Menge reduzierbarer Konfigurationen existiert, sondern schätzte konkret, dass eine unvermeidbare Menge von einigen Tausend Konfigurationen zu finden sein müsste, deren sämtliche Konfigurationen eine bestimmte Größe nicht übersteigen, die wir weiter unten näher erläutern wollen. Dies war bei Weitem zuviel, um es mit Bleistift und Papier nachzuprüfen, aber in den 1960'er Jahren stand die erste Generation von Hochgeschwindigkeitsrechnern zur Verfügung, so dass Heesch seine Ideen und Hypothesen anhand von Rechnern testen konnte. Heesch formulierte sowohl in der Reduzierbarkeits- wie in der Unvermeidbarkeitsfrage bahnbrechende Ideen, die von Appel und Haken aufgegriffen wurden und schließlich zum Erfolg führten. Bevor wir auf diese Ideen näher eingehen, wollen wir die historische Entwicklung kurz nachzeichnen.

Fassen wir zusammen: Zwei Probleme gilt es zu bewältigen.

1. *Wie beweist man die Reduzierbarkeit einer gegebenen Konfiguration?*
2. *Wie erzeugt man unvermeidbare Mengen?*

In den Anfangsjahren wurde nahezu ausschließlich Frage 1 aufgegriffen, und so wollen auch wir damit beginnen. Als Erstes stellen wir einige Eigenschaften zusammen, die ein irreduzibler Graph jedenfalls haben muss; zuvor noch ein Begriff. Aus dem Jordanschen Kurvensatz folgt, dass jeder Kreis  $C$  eines ebenen Graphen  $G$  die Ebene in ein inneres und ein äußeres Gebiet zerlegt. Enthält jedes dieser beiden Gebiete mindestens eine Ecke, so nennen wir  $C$  einen *trennenden Kreis*. Die nichttrennenden Kreise sind also gerade die Randkreise der Länder von  $G$ .



**Heinrich Heesch** wurde 1906 in Kiel geboren. Sein erstes Interesse galt der Musik mit Konzertprüfung für Violine 1928. Er studierte Mathematik und Physik in München und Zürich und promovierte mit einer Arbeit über kristallographische Gruppen. Bekannt wurde er durch die Lösung des Hilbert'schen Parkettierungsproblems in der Ebene. Nach der Machtübernahme durch die Nazis trat er 1935 von seiner Stelle an der Universität Göttingen zurück und lebte 20 Jahre als Privatgelehrter bis zur Aufnahme einer Lehrtätigkeit in Hannover. Für das 4-Farben Problem interessierte er sich schon seit der Göttinger Zeit. Letztlich fehlten ihm für die entscheidenden Computerarbeiten die finanziellen Mittel. Er starb 1995 in Hannover.

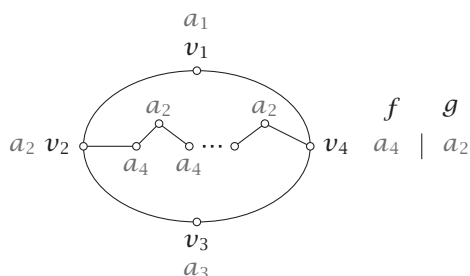
**Satz 9.1.** Sei  $G = (V, E)$  ein irreduzibler Graph mit  $p$  Ecken und  $q$  Kanten. Dann gilt:

- (i)  $G$  ist ein maximal ebener Graph, d. h. eine einfache Triangulierung.
- (ii)  $\sum_{v \in V} (6 - d(v)) = 12$ ,  $q = 3p - 6$ .
- (iii) Jede Ecke  $v$  hat einen Grad  $d(v) \geq 5$ .
- (iv) Jeder trennende Kreis  $C$  hat eine Länge  $\ell(C) \geq 5$ . Insbesondere ist  $G$  also 5-fach zusammenhängend.

*Beweis.* Angenommen,  $G$  ist keine Triangulierung und  $F$  ist ein Land mit den Rand-ecken  $v_1, v_2, \dots, v_t$ ,  $t \geq 4$ . Dann gibt es (siehe die Bemerkung vor 7.2) zwei nichtbenachbarte Ecken  $v_i, v_j$ , die außerhalb  $F$  nicht verbunden sind. Wir kontrahieren  $v_i, v_j$  innerhalb  $F$  zu einer einzelnen Ecke (ohne die ebene Realisierung zu zerstören). Der neue Graph  $G'$  hat eine Ecke weniger als  $G$  und ist somit 4-färbbar. Diese 4-Färbung können wir aber sofort auf  $G$  übertragen, indem wir  $v_i$  und  $v_j$  mit derselben Farbe belegen, im Widerspruch zur Irreduzibilität von  $G$ . Bedingung (ii) folgt nun aus 7.2 und die Aussage (iii) ist klar - die Reduzierbarkeit von Ecken  $v$  mit  $d(v) \leq 4$  war ja gerade Kempes Ausgangspunkt. Es bleibt der Nachweis von (iv) (was im übrigen auch (iii) miteinschließt).

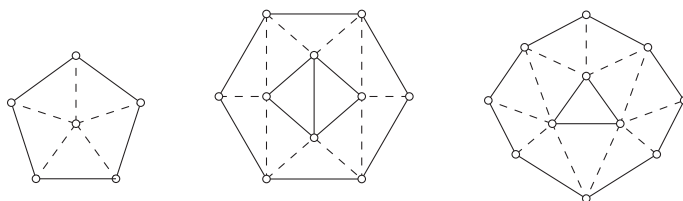
Es sei  $C$  ein trennender Kreis mit den Ecken  $v_1, v_2, \dots, v_t$  in dieser Reihenfolge. Mit  $A$  bezeichnen wir den Teilgraphen erzeugt vom Inneren von  $C$  zusammen mit  $C$ , und mit  $B$  den Teilgraphen erzeugt vom Äußeren von  $C$  zusammen mit  $C$ . Da  $G$  einfach ist, muss  $t \geq 3$  sein. Die beiden echten Untergraphen  $A$  und  $B$  sind 4-färbbar. Ist  $t = 3$ , d. h.  $C = K_3$ , so können wir durch Permutation der Farben auf  $C$  erreichen, dass die Färbungen von  $A$  und  $B$  auf  $C$  übereinstimmen, womit der ganze Graph  $G$  mit 4 Farben gefärbt wäre. Es bleibt der Fall  $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ . Der Graph  $A \cup v_1 v_3$  ist 4-färbbar und ebenso  $B \cup v_1 v_3$ . Es sei  $f$  eine 4-Färbung von  $A \cup v_1 v_3$  und  $g$  eine 4-Färbung von  $B \cup v_1 v_3$ , wobei wir durch Permutation wieder erreichen können, dass  $f(v_i) = g(v_i)$  für  $i = 1, 2, 3$  gilt. Nehmen wir an, dass  $f(v_i) = g(v_i) = a_i$  ist,  $i = 1, 2, 3$ , wobei  $a_1, a_2, a_3$  verschieden sind, da  $v_1, v_2, v_3$  in  $A \cup v_1 v_3$  und  $B \cup v_1 v_3$  jeweils Dreiecke bilden. Wir löschen nun wieder die Kante  $v_1 v_3$  und haben somit  $A$  und  $B$  zulässig mit 4 Farben gefärbt, die auf  $v_1, v_2, v_3$  übereinstimmen. Ist auch  $f(v_4) = g(v_4)$ , so sind wir fertig. Andernfalls können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $f(v_4) = a_4$  und  $g(v_4) = a_2$  ist. Betrachten wir  $A$ . Falls keine abwechselnd  $a_2, a_4$ -gefärbte Kette, kurz eine  $a_2, a_4$ -Kette von  $v_2$  nach  $v_4$  in  $A$  existiert, so können wir wie in Kempes Beweis in der  $a_2, a_4$ -Komponente von  $v_4$  in  $A$  die Farben austauschen, so dass  $v_4$  sowohl in  $A$  wie in  $B$  die Farbe  $a_2$  erhält. Nehmen wir also an, es gibt eine  $a_2, a_4$ -Kette von  $v_2$  nach  $v_4$  in  $A$  (siehe Figur 9.2).

Dann enthält  $A$  keine  $a_1, a_3$ -Kette von  $v_1$  nach  $v_3$ , so dass wir die Färbung  $f$  von  $A$  so abändern können, dass  $f'(v_1) = f'(v_3) = a_1$  ist (und nach wie vor  $f'(v_2) = a_2$ ,  $f'(v_4) = a_4$ ). Da nun  $B \cup v_2 v_4$  ebenfalls 4-färbbar ist, gibt es eine 4-Färbung  $g'$  von  $B$ , welche auf  $v_1, v_2$  und  $v_4$  verschiedene Werte annimmt, wobei wir durch Permutation der Farben  $g'(v_1) = a_1$ ,  $g'(v_2) = a_2$  und  $g'(v_4) = a_4$  erreichen können. Ist nun  $g'(v_3) = a_3$ , so stimmt  $g'$  auf  $C$  mit  $f$  überein, ist aber  $g'(v_3) = a_1$ , so stimmt  $g'$  auf  $C$  mit  $f'$  überein. In allen Fällen ist somit eine 4-Färbung von  $G$  gegeben, im Widerspruch zur Definition der Irreduzibilität von  $G$ . Die Aussage über den 5-fachen Zusammenhang folgt schließlich aus 7.2(v).  $\square$



Figur 9.2

Wie erkennt man nun die Reduzibilität einer vorgegebenen Konfiguration? Zunächst einmal: Was ist eine *Konfiguration*? Im Prinzip jeder mögliche Untergraph. In der Praxis hat es sich als vorteilhaft erwiesen, unter einer Konfiguration  $K$  einen trennenden Kreis  $C$  zusammen mit dem Inneren  $H$  von  $C$  zu verstehen – und diese Definition wollen auch wir zugrundelegen. Wir schreiben  $K = (H, C)$  und nennen  $H$  das *Innere* der Konfiguration  $K$  und  $C$  den *Ring*. Die Länge von  $C$  ist die *Größe des Ringes*. Figur 9.3 zeigt drei Konfigurationen mit den Ringgrößen 5, 6 und 8, wobei wir die inneren Kanten (also die Kanten von  $H$ ) und die Ringkanten voll zeichnen und die von innen an den Ring führenden Kanten gestrichelt.



Figur 9.3

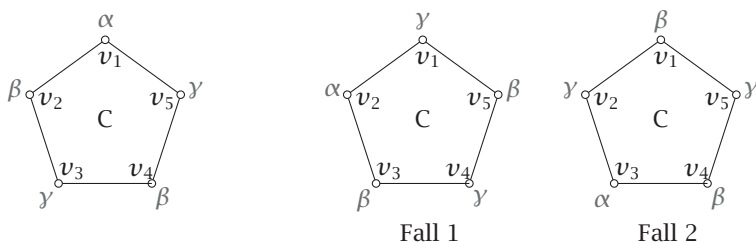
Der Nachweis der Reduzierbarkeit einer vorgegebenen Konfiguration erfolgt nun im Wesentlichen nach dem Vorbild des Beweises in 9.1. Man trennt das Innere  $H$  samt den inzidenten Kanten heraus und erhält dadurch ein Loch im Graphen  $G$ . Das Loch wird nun irgendwie mit einem neuen ebenen Graphen  $H'$  gefüllt, wobei wir als einzige Bedingung verlangen, dass  $H'$  weniger Ecken als  $H$  enthält. Wegen der Irreduzibilität von  $G$  ist  $G'$  4-färbbar. Können wir nun – und dies ist natürlich der springende Punkt – die 4-Färbung von  $G'$  so manipulieren, dass eine 4-Färbung von  $G$  geschlossen werden kann, so muss  $K$  reduzierbar gewesen sein!

Mit der Definition einer Konfiguration lässt sich 9.1(iv) so aussprechen: Jede Konfiguration mit Ringgröße  $\leq 4$  ist reduzierbar. Wie sieht es mit Größe 5 aus? Hier sind nichtreduzierbare Konfigurationen natürlich denkbar, z.B. die erste in Figur 9.3, in der das Innere aus einer einzelnen Ecke vom Grad 5 besteht. Als ersten bedeutenden Fortschritt nach Kempe zeigte Birkhoff 1913, dass dies im Wesentlichen die einzig mögliche ist.

**Satz 9.2** (Birkhoff). *Es sei  $C$  ein trennender Kreis der Länge 5 in dem irreduziblen Graphen  $G$ . Dann besteht entweder das Innere oder das Äußere von  $C$  aus einer einzelnen Ecke.*

*Beweis.* Wir nehmen das Gegenteil an, dass das Innere  $A$  und das Äußere  $B$  von  $C$  jeweils mindestens zwei Ecken enthalten. Ersetzen wir  $B$  durch eine einzelne Ecke  $b$ , die wir mit allen Ecken von  $C$  verbinden, so ist der resultierende Graph 4-färbbar, wobei die Ecken aus  $C$ , da sie alle zu  $b$  benachbart sind, mit 3 Farben gefärbt werden. Das heißt also: Es existiert eine 4-Färbung  $f_A$  von  $A \cup C$ , welche den Ecken von  $C$  drei Farben erteilt, und analog eine entsprechende Färbung  $f_B$  von  $B \cup C$ . Die Ecken von  $C$  seien zyklisch nummeriert,  $C = (v_1, v_2, \dots, v_5)$ , und die Farbmenge sei  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ . Offensichtlich gibt es zu jeder 3-Färbung  $f$  eines 5-Kreises zwei Paare von gleichgefärbten Ecken und eine weitere, einzeln gefärbte Ecke  $v$ , die wir die *markierte Ecke* von  $f$  nennen wollen,  $v = m(f)$ . Durch geeignete Nummerierung der  $v_i$  und Permutation der Farben können wir erreichen, dass  $v_1$  die markierte Ecke von  $f_A$  ist und die Farbe  $\alpha$  erhält, und dass ferner  $f_A(v_2) = f_A(v_4) = \beta$ ,  $f_A(v_3) = f_A(v_5) = \gamma$  ist. Ebenso können wir durch Permutation der Farben in  $B \cup C$  erreichen, dass die markierte Ecke von  $f_B$  ebenfalls mit  $\alpha$  gefärbt ist und die anderen Paare mit  $\beta$  und  $\gamma$ . Ist  $m(f_B) = v_1$ , so ist klar, dass nach eventuellem Austausch von  $\beta$  und  $\gamma$  in  $f_B$  die Färbungen auf  $C$  übereinstimmen, so dass wir fertig sind.

Ist  $m(f_B) \neq v_1$ , so ergeben sich zwei Möglichkeiten, je nachdem ob  $m(f_B)$  zu  $v_1$  benachbart ist oder nicht. Durch eventuelles Wechseln der zyklischen Ordnung auf  $C$  und Vertauschen von  $\beta$  und  $\gamma$  in  $f_B$  erhalten wir o.B.d.A. die beiden in Figur 9.4 abgebildeten Möglichkeiten. Zur Abkürzung schreiben wir  $f_A = (\alpha, \beta, \gamma, \beta, \gamma)$  und entsprechend für  $f_B$ . Bevor wir die beiden Fälle diskutieren, bemerken wir, dass durch Kontraktion wie im Beweis von 9.1 eine 4-Färbung von  $A \cup C$  bzw.  $B \cup C$  existiert, die einem vorgegebenen Paar von nichtbenachbarten Ecken auf  $C$  dieselbe Farbe zuweist.



Figur 9.4

**Fall 1.** Existiert keine  $\alpha, \gamma$ -Kette in  $B \cup C$  von  $v_2$  nach  $v_4$ , so können wir  $v_4$  mit  $\alpha$  umfärben, so dass nun  $v_1$  die markierte Ecke der neuen Färbung  $f'_B$  ist und wir fertig sind. Im anderen Fall existiert keine  $\beta, \delta$ -Kette in  $B \cup C$  von  $v_3$  nach  $v_5$ . Wir wechseln die Farben in der  $\beta, \delta$ -Komponente von  $v_3$  und erhalten eine neue Färbung  $f'_B = (\gamma, \alpha, \delta, \gamma, \beta)$ . Nun färben wir  $A \cup C$  irgendwie mit 4 Farben, so dass  $v_1$  und  $v_4$  dieselbe Farbe erhalten. Durch Permutation der Farben können wir  $f'_A = (\gamma, \alpha, \delta, \gamma, z)$  annehmen, wobei  $z = \alpha, \beta$  oder  $\delta$  ist. Ist  $z = \beta$ , so stimmen  $f'_A$  und  $f'_B$  auf  $C$  überein und wir sind fertig, ebenso für  $z = \delta$ , da dann  $C$  3-gefärbt ist und  $m(f'_A) = m(f'_B)$  ist. Es bleibt der Fall  $z = \alpha$ , also  $f'_A = (\gamma, \alpha, \delta, \gamma, \alpha)$  mit  $m(f'_A) = v_3$ . In diesem Fall setzen wir  $f'_B = f_B$ .

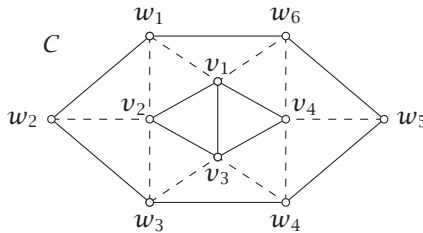
Fassen wir die bisherige Analyse zusammen: Aus einem Paar von 3-Färbungen  $f_A, f_B$  von  $C$  mit  $m(f_A) = v_1, m(f_B) = v_2$  haben wir ein weiteres Paar  $f'_A, f'_B$  konstruiert mit  $m(f'_A) = v_3, m(f'_B) = v_2$ . Vertauschen wir nun die Rollen von  $A$  und  $B$ , so erhalten

wir ein weiteres Paar  $f''_A, f''_B$  mit  $m(f''_A) = v_3, m(f''_B) = v_4$  und mit einer weiteren Iteration dieses Doppelschrittes ein Paar  $f'''_A, f'''_B$  mit  $m(f'''_A) = v_5$  und  $m(f'''_B) = v_1$ . Nun ist aber  $m(f_A) = m(f'''_B) = v_1$ , und wir sind wieder fertig.

**Fall 2.** Hier ist  $f_B = (\beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma)$ . Falls keine  $\alpha, \gamma$ -Kette von  $v_3$  nach  $v_5$  in  $B \cup C$  existiert, so können wir  $v_5$  zu  $\alpha$  umfärben, und die neue Färbung  $f'_B$  hat die markierte Ecke  $m(f'_B) = v_2$ , d. h. wir sind wieder in Fall 1. Andernfalls gibt es keine  $\beta, \delta$ -Kette von  $v_1$  nach  $v_4$ , so dass wir durch Umfärben von  $v_4$  eine Färbung  $f'_B$  mit  $f'_B = (\beta, \gamma, \alpha, \delta, \gamma)$  erhalten. Wie im vorigen Fall wählen wir eine 4-Färbung  $f'_A$  von  $A \cup C$ , in der  $v_2$  und  $v_5$  dieselbe Farbe bekommen, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f'_A = (z, \gamma, \alpha, \delta, \gamma)$  annehmen können. Ist  $z = \beta$ , so stimmen  $f'_A$  und  $f'_B$  auf  $C$  überein, in den Fällen  $z = \alpha$  bzw.  $z = \delta$  haben  $f'_A$  und  $f'_B$  benachbarte markierte Ecken (Fall 1) bzw.  $f'_A$  und  $f_B$  dieselbe markierte Ecke, so dass wir in allen Fällen die 4-Färbbarkeit von  $G$  nachgewiesen haben, im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Die Leser können anhand dieser mühseligen Fallunterscheidung schon erkennen, dass der Reduzierbarkeitsnachweis bei Ringgrößen  $\geq 6$  auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen wird. Dementsprechend wollen wir nur noch ein weiteres Ergebnis, die Reduzierbarkeit des sogenannten *Birkhoff Diamanten* (zweite Konfiguration in Figur 9.3), ableiten und uns ansonsten mit der Zitierung der wichtigsten späteren Ergebnisse begnügen.

**Satz 9.3 (Birkhoff).** *Der Birkhoff Diamant ist reduzierbar.*

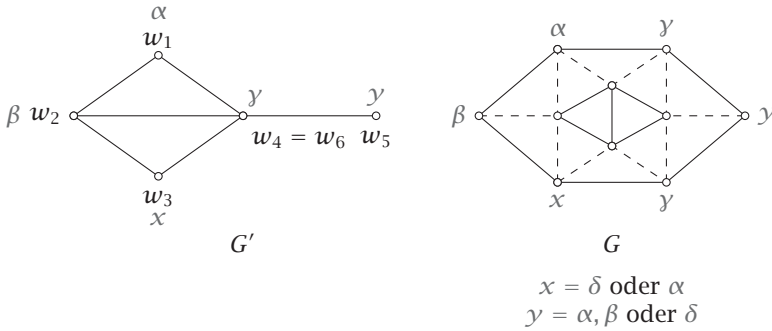


Figur 9.5

*Beweis.* Wir löschen das Innere samt den inzidenten Kanten. Die Ecken  $w_4$  und  $w_6$  können (außerhalb  $C$ ) nicht benachbart sein, da wir ansonsten einen trennenden Kreis der Länge 3 erhielten. Wir modifizieren nun das Innere, indem wir  $w_4$  und  $w_6$  identifizieren und diese Ecke mit  $w_2$  verbinden. Der neue Graph  $G'$  ist 4-färbbar. Nennen wir die Farben wieder  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , so ergibt sich die Situation von Figur 9.6. Wir wollen zeigen, dass wir in jedem Fall diese 4-Färbung auf das Innere übertragen können.

**Fall 1.**  $\chi = \delta$ . Dann müssen wir  $v_2$  mit  $\gamma$  färben. Die nachstehende Liste vervollständigt diese 4-Färbung für jeden möglichen  $\gamma$ -Wert.

$\gamma$	$v_1$	$v_3$	$v_4$
$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\delta$
$\beta$	$\beta$	$\alpha$	$\delta$
$\delta$	$\delta$	$\beta$	$\alpha$



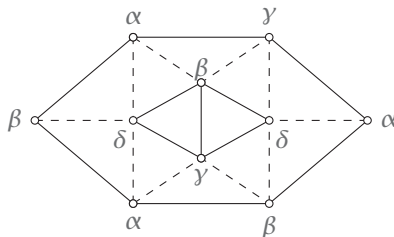
Figur 9.6

**Fall 2.**  $x = \alpha$ . Wiederum können wir anhand der folgenden Tabelle die Färbung auf das Innere übertragen, falls  $y = \beta$  oder  $\delta$  ist.

$y$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$\beta$	$\delta$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha$
$\delta$	$\delta$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha$

Für  $y = \alpha$  geht dies nicht mehr. Die Ecken  $v_1, v_3$  müssen, da sie beide zu  $\alpha, \gamma$ -Ecken benachbart sind, die Farben  $\beta$  und  $\delta$  erhalten, so dass  $v_4$  zu Ecken aller 4 Farben benachbart wäre.

Hier hilft aber der folgende Kempe Schluss weiter. Angenommen, es gibt keine  $\alpha, \delta$ -Kette in  $G \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  von  $w_5$  nach  $w_3$ . Ist  $w_1$  in der  $\alpha, \delta$ -Komponente von  $w_5$ , so färben wir  $w_3$  um zu  $\delta$ , andernfalls färben wir  $w_5$  um zu  $\delta$  und sind zurück bei den schon behandelten Fällen  $x = \delta, y = \alpha$  bzw.  $x = \alpha, y = \delta$ . Falls aber eine  $\alpha, \delta$ -Kette von  $w_5$  nach  $w_3$  existiert, so kann es keine  $\beta, \gamma$ -Kette von  $w_4$  nach  $w_2$  geben und auch keine  $\beta, \gamma$ -Kette von  $w_4$  nach  $w_6$ . Wir färben  $w_4$  zu  $\beta$  um und erweitern diese Färbung ins Innere laut Figur 9.7. □



Figur 9.7

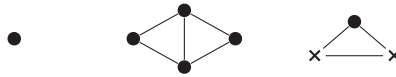
Für die folgenden Resultate empfiehlt sich die von Heesch vorgeschlagene Bezeichnungsweise: Eine  $n$ -Ecke ist eine Ecke vom Grad  $n$ . *Kleine Ecken* sind Ecken vom Grad 5 oder 6, *große Ecken* die übrigen. Die Markierungen der Ecken sind in Figur 9.8 eingetragen:





Figur 9.8

Zur Abkürzung lassen wir auch die Ringe weg, so dass beispielsweise die drei Konfigurationen aus Figur 9.3 nun wie folgt aussehen (Figur 9.9):

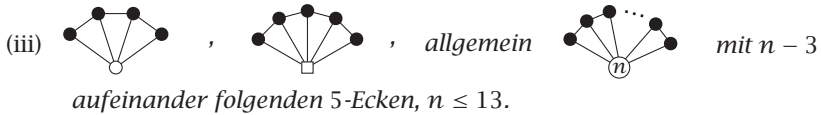


Figur 9.9

Die Ringgröße ist dann stets eindeutig gegeben.

Der folgende Satz stellt einige der frühest gefundenen reduzierbaren Konfigurationen zusammen.

**Satz 9.4.** *Die folgenden Konfigurationen sind reduzierbar.*



Heesch, der ebenfalls eine ganze Reihe von reduzierbaren Konfigurationen gefunden hatte, steuerte in den 1960'er Jahren, wie oben erwähnt, zwei ganz entscheidende neue Ideen bei. Zum Einen analysierte er genauer als bisher die Technik des Reduzierens und zum Anderen postulierte er heuristische Prinzipien, wann eine gegebene Konfiguration wahrscheinlich reduzierbar ist und wann nicht.

Zur ersten Idee: Es sei  $K = (H, C)$  eine Konfiguration mit dem Inneren  $H$  und dem Ring  $C$ . Mit  $J$  wollen wir die Menge aller 4-Färbungen von  $C$  bezeichnen (wobei wir natürlich nur die Farbschemata induziert durch Permutationen der Farben betrachten), und mit  $J(H)$  die Menge jener 4-Färbungen aus  $J$ , die von  $C$  direkt auf das Innere  $H$  erweitert werden können. Ideal wäre natürlich, wenn  $J(H) = J$  ist, denn dann kann die nach Induktion existierende 4-Färbung von  $G' = G \setminus H$ , wie immer sie auch aussehen möge, direkt auf  $H$  erweitert werden. Dies aber bedeutet, dass  $G$  4-färbbar ist und

somit, dass  $K$  reduzierbar ist. Leider ist jedoch in den allermeisten Fällen  $J(H) \subsetneq J$ . Tritt dies ein, so wenden wir das Kempe Verfahren an. Es sei  $\bar{J}(H)$  die Menge aller Färbungen von  $C$ , die durch Austauschen der Farben in einer oder mehreren 2-Farben Komponenten aus den Färbungen  $J(H)$  entstehen. Ist nun  $\bar{J}(H) = J$ , so nennt Heesch die Konfiguration  $D$ -reduzierbar.

Wenn auch  $\bar{J}(H) \subsetneq J$  ist, so können wir wie in den Sätzen 9.1 bis 9.3 einen sogenannten *Reduktor*  $H'$  probieren. Das heißt, wir ersetzen  $H$  durch  $H'$ , wobei wir eventuell nur Kanten in das Innere einfügen oder Ecken von  $C$  identifizieren. Alles ist erlaubt, solange das Äußere von  $C$  unverändert bleibt und der neue ebene Untergraph  $K' = (H', C')$  (der keine Konfiguration im bisherigen Sinn mehr zu sein braucht) weniger Ecken als  $K$  enthält. Es sei wiederum  $J(H')$  die Menge der 4-Färbungen von  $C$ , die mit  $H'$  (und  $C'$ ) verträglich sind. Ist  $J(H') \subseteq J(H)$ , so ist die nach Induktion existierende 4-Färbung des neuen Graphen  $G'$  (mit  $K'$  anstelle  $K$ ) wieder direkt auf  $H$  fortsetzbar. Gilt zumindest  $J(H') \subseteq \bar{J}(H)$ , so führt jedenfalls ein Kempe-Austausch zum Erfolg, und wir nennen in diesem Fall  $K = (H, C)$   $C$ -reduzierbar.

In unserem Beispiel des Birkhoff Diamanten ist  $K' = (H', C')$  der linke Graph in Figur 9.6. Wie wir gesehen haben, sind alle Färbungen aus  $J(H')$  auch in  $J(H)$  mit Ausnahme der letzten Färbung  $(\alpha, \beta, \alpha, \gamma, \alpha, \gamma)$ , welche in  $\bar{J}(H)$  ist.  $D$ -Reduzierbarkeit ist also stärker als  $C$ -Reduzierbarkeit, nämlich der Spezialfall, wo die leere Menge als Reduktor zum Erfolg führt. Die Leser können sich übrigens leicht überzeugen, dass der Birkhoff Diamant sogar  $D$ -reduzierbar ist. Nicht jede  $C$ -reduzierbare Konfiguration ist aber auch  $D$ -reduzierbar. Das kleinste Beispiel hierfür ist die letzte Konfiguration aus 9.4(ii).

Heesch schlug nun vor, die Menge  $\bar{J}(H)$  zu berechnen, *bevor* man sich den Kopf über einen der Konfiguration angepassten Reduktor zerbricht. Bei Tests kleiner Konfigurationen hatte sich nämlich herausgestellt, dass sehr oft  $\bar{J}(H) = J$ , also  $K = (H, C)$   $D$ -reduzierbar ist, was natürlich die Suche nach einem Reduktor überflüssig macht. Allgemein scheint  $C$ -Reduzierbarkeit gegenüber  $D$ -Reduzierbarkeit die Klasse der reduzierbaren Konfigurationen nur unwesentlich zu vergrößern, so dass alle Computer Programme vornehmlich auf  $D$ -Reduzierbarkeit abzielen.

Spätestens an dieser Stelle erhebt sich die Frage nach dem Rechenaufwand. Ein Ring der Größe 13 besitzt bereits 66 430 verschiedene 4-Färbungen, und Heesch hatte vermutet, dass man möglicherweise bis Ringgröße 18 gehen müsste, um eine unvermeidbare Menge zu konstruieren. Für Hochgeschwindigkeitsrechner sind Zahlen dieser Größenordnung noch kein unüberwindliches Hindernis, zumal die Erzeugung von  $\bar{J}(H)$  programmtechnisch äußerst einfach ist. Diese Idee ist also anwendbar, solange  $\bar{J}(H) = J$ , d. h. die Konfiguration  $D$ -reduzierbar ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so spielt für den weiteren Rechenaufwand (Suche nach  $H'$ ) natürlich die Größe und die innere Komplexität von  $H$  eine entscheidende Rolle.

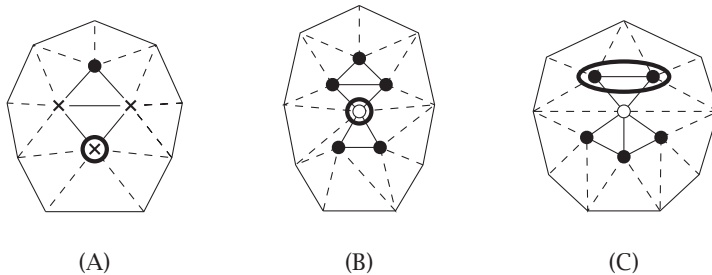
Seinen zweiten bemerkenswerten Vorschlag hat Heesch zur *Struktur* einer Konfiguration gemacht. Bis zu den 1960'er Jahren war die Liste der reduzierbaren Konfigurationen in die Hunderte gewachsen, aber auch die Liste jener Typen, die allen Reduzierungskünsten widerstanden hatten. Heesch bemerkte, dass in den meisten dieser „nicht-reduzierbaren“ Konfigurationen eine von drei Unterkonfigurationen auftauchte, die er folgerichtig *Obstruktionen* nannte. Dazu ein paar Begriffe: Sei  $K = (H, C)$  eine Konfiguration mit Innerem  $H$  und Ring  $C$ . Die Kanten, die von einer inneren Ecke  $v$  an den Ring führen, nennen wir die *Beine* von  $v$ . Eine innere Ecke  $v$  heißt *Artikula-*

tion, falls  $H \setminus v$  zerfällt oder äquivalent dazu, falls die Beine von  $v$  nicht alle am Ring aufeinanderfolgen.

Die Obstruktionen sind nun:

- (A) Eine innere Ecke mit mindestens 4 Beinen.
- (B) Eine Artikulation mit mindestens 3 Beinen.
- (C) Zwei benachbarte innere 5-Ecken, die noch genau zu einer weiteren inneren Ecke benachbart sind, und zwar zur selben. (Genannt: Hängendes 5-Paar)

Figur 9.10 gibt Beispiele für jeden der drei Typen, wobei die Obstruktionen jeweils umrandet sind.



Figur 9.10

Heesch vermutete, dass jede minimale reduzierbare Konfiguration obstruktionfrei ist. Das ist nach wie vor offen, jedenfalls konnte bis heute noch keine Konfiguration, die eine der Obstruktionen enthält, reduziert werden, und es erscheint plausibel, dass mit der üblichen Kempe Methode dies auch so bleiben wird. In der anderen Richtung liegen die Dinge weniger klar, da es eine ganze Reihe von Konfigurationen gibt, die keine Obstruktion enthalten, aber bisher jeder Reduzierung widerstanden haben. Allerdings haben diese Typen bereits höhere Ringgröße. Als Leitprinzip erwies sich Heesch's Idee der Obstruktionen unentbehrlich:

*Bei der Suche nach einer unvermeidbaren Menge gehe man tunlichst jenen Konfigurationen aus dem Wege, die Obstruktionen enthalten!*

Damit sind wir beim zweiten Thema: Unvermeidbarkeit. Vor allem: Wie beweist man die Unvermeidbarkeit einer gegebenen Menge? Ein simples Beispiel kennen wir bereits, die Menge  $\{\bullet\}$  bestehend aus einer 5-Ecke, ja wir wissen aus 9.1(ii), dass ein irreduzibler Graph sogar mindestens 12 solcher 5-Ecken enthalten muss. Formel 9.1(ii) bildet nun den Ausgangspunkt unserer Überlegungen, die in ihren Grundzügen ebenfalls auf Heesch zurückgehen.

Es sei  $G$  ein irreduzibler Graph. Wir erteilen jeder Ecke  $v$  die *Anfangsladung*  $a(v) = 6 - d(v)$ , so dass nach 9.1(ii) die Summe der Ladungen  $\sum_{v \in V} a(v) = 12$  ist. 5-Ecken haben somit die Anfangsladung 1, 6-Ecken die Ladung 0, 7-Ecken die Ladung  $-1$ , usf. Wir erinnern uns, dass 5- bzw. 6-Ecken als *kleine* Ecken bezeichnet werden,  $k$ -Ecken mit  $k \geq 7$  als *große* Ecken. Es sind also gerade die großen Ecken, die negative Anfangsladung haben.

Nun erklären wir eine Regel, wie wir die Ladung in  $G$  transferieren, ohne die Gesamtsumme 12 zu ändern – wir nennen dies einen *Entladungsalgorithmus*. Die Endladung

$e$  erfüllt dann wieder  $\sum_{v \in V} e(v) = 12$ . Je nach der Gestalt der Endladung erhalten wir mannigfache notwendige Bedingungen über  $G$ , die wir im Wesentlichen in drei Gruppen einteilen können.

1. Da die Gesamtsumme  $> 0$  ist, muss es (endlich viele) lokale Stellen geben, wo eine *positive Endladung* auftritt - diese lokalen Konfigurationen bilden eine *unvermeidbare Menge*. Oder umgekehrt betrachtet: Wäre keine dieser Konfigurationen in  $G$  gegeben, so hätten wir  $\sum e(v) \leq 0$ , was nicht geht.
2. Falls wir zeigen können, dass  $e(v) \leq s \leq 1$  für jede Ecke  $v \in V$  gilt, so folgt  $12 = \sum_{v \in V} e(v) \leq |V|s$ , und wir erhalten eine Schranke für die *Birkhoff Zahl*  $b \geq 12s^{-1}$ .
3. Es sei  $p_k$  die Anzahl der  $k$ -Ecken,  $k \geq 5$ . Mit den  $p_k$ 's lautet 9.1(ii) dann  $\sum_{k \geq 5} (6 - k)p_k = 12$ . Wir versuchen die Endladung so einzurichten, dass  $e(v) = 0$  ist für alle 5-Ecken  $v$  und  $e(v) \leq f_k$  für  $d(v) = k, k \geq 6$ . Aus der Beziehung  $\sum_{k \geq 6} f_k p_k \geq 12$  können wir *Ungleichungen* zwischen den  $p_k$ 's herleiten.

Die folgenden Beispiele werden diese drei Gesichtspunkte sofort klarmachen. Der einfachste Entladungsalgorithmus ist der, dass wir überhaupt nichts machen, also  $e = a$  setzen. Damit erhalten wir die unvermeidbare Menge  $\langle \bullet \rangle$  und in 2) die Schranke  $b \geq 12$ . Da  $\langle \bullet \rangle$  bis heute nicht reduziert werden konnte (und beim jetzigen Stand der Reduzierungstechnik wird sich daran wohl nichts ändern), liegt es nahe,  $\langle \bullet \rangle$  durch eine größere unvermeidbare Menge zu ersetzen, in der Hoffnung, der Reduzierbarkeit näher zu kommen.

Als ersten Versuch schreiben wir vor, dass jede 5-Ecke gleichmäßig mit  $\frac{1}{5}$  auf jede der benachbarten großen Ecken (falls es welche gibt) entladen wird. Wie sieht die Endladung  $e$  aus? Der Einfachheit halber setzen wir  $v_k$  für eine  $k$ -Ecke,  $k \geq 5$ . Eine 5-Ecke kann nur dann  $e(v_5) > 0$  aufweisen, wenn nicht alle Nachbarn große Ecken sind, wenn also  $\bullet \text{---} \bullet$  oder  $\bullet \text{---} \times$  vorliegt. Da 6-Ecken nicht betroffen sind, ist stets  $e(v_6) = 0$ . Falls für eine 7-Ecke  $e(v_7) > 0$  ist, so muss wegen  $e(v_7) = -1 + \frac{m}{5}$  ( $m$  =Anzahl der 5-Nachbarn)  $v_7$  mindestens 6 solche Nachbarn haben, von denen natürlich zwei ihrerseits benachbart sein müssen, woraus wiederum  $\bullet \text{---} \bullet$  resultiert. Für  $v_k, k \geq 8$ , haben wir schließlich  $e(v_k) = (6 - k) + \frac{m}{5} \leq (6 - k) + \frac{k}{5} = \frac{30 - 4k}{5} < 0$ . Somit folgern wir:

$$\langle \bullet \text{---} \bullet, \bullet \text{---} \times \rangle \text{ ist eine unvermeidbare Menge.}$$

Dieses Ergebnis war eines der frühesten Unvermeidbarkeitsresultate, gefunden (durch eine andere, wenn auch im Prinzip ähnliche, Abzählung) von Wernicke im Jahre 1904.

Gehen wir einen Schritt weiter. Wir entladen jede 5-Ecke, indem wir  $\frac{1}{4}$  auf höchstens 4 benachbarte große Ecken transferieren. Ist die Endladung  $e(v_5) > 0$ , so hat  $v_5$  mindestens zwei kleine Nachbarn, d. h. es liegt



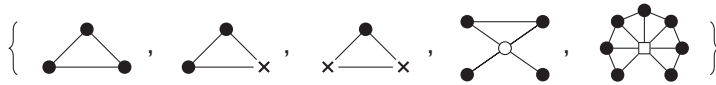
vor. Ist  $e(v_7) = -1 + \frac{m}{4} > 0$ , so folgt  $m \geq 5$ , also tritt unter den 5-Nachbarn von  $v_7$

wiederum  $\bullet \text{---} \bullet$  auf. Für  $k \geq 8$  erhalten wir  $e(v_k) = (6 - k) + \frac{m}{4} \leq (6 - k) + \frac{k}{4} = \frac{24 - 3k}{4} \leq 0$ . Ergebnis:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \times \\ \times \text{---} \times \end{array} \right\} \text{ ist unvermeidbar.}$$

Dieses Resultat wurde im Wesentlichen von Franklin 1922 gefunden. Wir bemerken, dass diese unvermeidbare Menge stärker als die von Wernicke ist.

Es sollte klar sein, was wir als nächstes probieren. Wir entladen jede 5-Ecke, indem wir  $\frac{1}{3}$  auf höchstens 3 benachbarte große Ecken transferieren. Dieselbe Analyse wie in den vorhergehenden Fällen führt zu dem Resultat: Die in Figur 9.11 abgebildete Menge ist unvermeidbar.



Figur 9.11

Nach 9.4(iii) ist die letzte Konfiguration reduzierbar, so dass wir sie aus der Liste streichen können. Die Leser mögen die entsprechende Menge für einen Transfer von  $\frac{1}{2}$  bestimmen. Es leuchtet ein, dass die unvermeidbaren Mengen immer komplexer und unübersichtlicher werden, gleichzeitig wächst aber auch die Chance, immer mehr reduzierbare Konfigurationen darunter zu finden. Genau dies ist ja die Zielrichtung der Methode: Dass in diesem Zwiespalt sich die Waage an irgendeiner nicht zu fernen Stelle auf die Seite der Reduzierbarkeit *aller* Konfigurationen einer unvermeidbaren Menge neigt.

Dem Erfindungsreichtum von Entladungsalgorithmen sind natürlich keine Grenzen gesetzt, doch wollen wir uns mit diesen Beispielen zur Illustration von Punkt 1 begnügen. Fassen wir zusammen:

**Satz 9.5.** *Die folgenden Mengen sind sämtlich unvermeidbar.*

- (i)  $\left\{ \bullet \right\}$
- (ii)  $\left\{ \bullet - \bullet, \bullet - \times \right\}$
- (iii)  $\left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \times \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \quad \times \end{array} \right\}$
- (iv)  $\left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \times \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \quad \times \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}.$

Nun zum zweiten Gesichtspunkt: Schranken für die Birkhoff Zahl. Der nachstehende Entladungsalgorithmus von Bernhart bietet ein schönes Beispiel. Wir transferieren die Ladung von jeder 5-Ecke  $v_5$  folgendermaßen: Nach 9.4(i) wissen wir, dass  $v_5$  mindestens einen großen Nachbarn hat.

- (a) Falls  $v_5$  genau einen großen Nachbarn hat, so muss  $v_5$  mindestens zwei 6-Nachbarn haben, da ansonsten eine der beiden ersten reduzierbaren Konfigurationen in 9.4(ii) resultieren würde. Wir transferieren  $\frac{28}{100}$  auf die große Ecke und je  $\frac{12}{100}$  auf genau zwei der 6-Nachbarn.
- (b) Falls  $v_5$  mindestens zwei große Nachbarn hat, so geben wir genau zwei von ihnen je  $\frac{26}{100}$ .

Wie sieht die Endladung  $e(v)$  aus? Für  $v_5$  erhalten wir im Fall (a)  $e(v_5) = 1 - \frac{28}{100} - 2 \cdot \frac{12}{100} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ , und im Fall (b)  $e(v_5) = 1 - 2 \cdot \frac{26}{100} = \frac{12}{25}$ . Eine 6-Ecke  $v$  hat wegen 9.4(ii) höchstens vier 5-Nachbarn, so dass  $e(v_6) \leq 0 + 4 \cdot \frac{12}{100} = \frac{12}{25}$  resultiert. Eine 7-Ecke  $v_7$  hat höchstens fünf 5-Nachbarn, also ist  $e(v_7) \leq -1 + 5 \cdot \frac{28}{100} = \frac{10}{25} < \frac{12}{25}$ , und für  $k$ -Ecken  $v_k$  mit  $k \geq 8$  gilt schließlich  $e(v_k) \leq (6-k) + k \cdot \frac{28}{100} = 6 - \frac{72}{100}k \leq 6 - \frac{576}{100} = \frac{24}{100} < \frac{12}{25}$ . In allen Fällen haben wir  $e(v) \leq \frac{12}{25}$  bewiesen, wobei mindestens einmal strikte Ungleichung gilt (da wegen 9.4(i) große Ecken vorkommen müssen), so dass für die Birkhoff Zahl  $b \geq 26$  gelten muss.

Diese Schranke wurde 1922 von Franklin angegeben. Es ist ein Hinweis auf die Überlegenheit der Entladungstechnik, wenn man die eben geführte Ableitung mit der mühseligen (wenn auch im Prinzip äquivalenten) Abzählmethode von Franklin vergleicht.

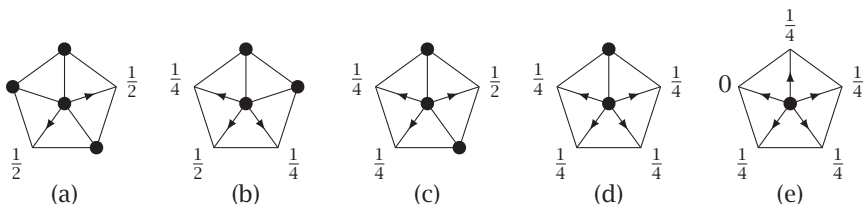
Die folgende Illustration des dritten Gesichtspunktes geht auf Chojnacki (1942) und Mayer (wieder unser Literaturprofessor, 1975) zurück. Schreiben wir die Ausgangsgleichung  $\sum_{k \geq 5} (6-k)p_k = 12$  in der Form

$$p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k-6)p_k,$$

so erhalten wir eine erste Gleichung zwischen den Zahlen  $p_k$ .

Wir entladen die  $v_5$ 's nun auf folgende Weise. Eine 5-Ecke hat entweder 3, 2, 1 oder keine 5-Nachbarn.

Die jeweiligen Entladungen sind in Figur 9.12 eingetragen. Die letzte Figur ist so zu verstehen, dass die vier der fünf Nachbarecken, denen wir jeweils  $\frac{1}{4}$  zukommen lassen, beliebig ausgewählt werden.



Figur 9.12

Wie viel erhält eine  $k$ -Ecke für  $k \geq 6$ ? Betrachten wir die Nachbarschaft  $C_k$ . Die 5-Ecken auf  $C_k$  ergeben Wege  $W_i, i = 1, \dots, t$ , der Eckenzahl  $\ell_i \geq 1$ , die durch  $n$ -Ecken,  $n \geq 6$ , voneinander getrennt sind. Ist  $\ell_i = 1$ , so liegt einer der Fälle (b), (d) oder (e) vor und die isolierte 5-Ecke  $v = W_i$  trägt höchstens  $\frac{1}{2}$  bei. Sei  $W_i = (x_1, \dots, x_{\ell_i}), \ell_i \geq 2$ . Jede innere 5-Ecke in  $W_i$  transferiert  $\frac{1}{2}$  nach  $v_k$  (Fall (a) oder (c)), jede Endecke in  $W_i$  transferiert  $\frac{1}{4}$  (Fall (b), (c) oder (d)). Wegen 9.4(iv) muss es in  $C_k$  mindestens 2 Ecken geben, die keine 5-Ecken sind. Insbesondere ist also  $\ell_i \leq k - 2$ , d.h.  $W_i$  enthält Endecken, und wir schließen, dass  $W_i$  höchstens  $\frac{1}{2}(\ell_i - 2) + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}(\ell_i - 1)$  nach  $v_k$  transferiert. Insgesamt ergibt dies  $e(v_k) \leq (6-k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \ell_i - \frac{s}{2}$  ( $s = \text{Anzahl der } \ell_i \geq 2$ ). Da, wie eben erwähnt,  $\sum_{i=1}^t \ell_i \leq k - 2$  gilt, folgt

- (i)  $e(v_k) \leq (6-k) + \frac{1}{2}(k-3) = \frac{9-k}{2}$  falls  $s \geq 1$ ,
- (ii)  $e(v_k) \leq (6-k) + \frac{1}{2} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq 6 - \frac{3k}{4} \leq \frac{9-k}{2}$  falls  $s = 0$ .

Wir setzen  $f_k = \frac{9-k}{2}$  für  $k \geq 14$  und haben somit stets  $e(v_k) \leq f_k$ . Für  $7 \leq k \leq 13$  können wir dies noch verbessern. Wir wissen aus 9.4(iii), dass höchstens  $k-4$  aufeinanderfolgende 5-Ecken in  $C_k$  auftreten können. Daraus folgt aber sofort für  $7 \leq k \leq 13$ :

$$(i') \quad e(v_k) \leq (6-k) + \frac{1}{2}(k-4) = \frac{8-k}{2} \quad \text{falls } s \geq 1,$$

$$(ii') \quad e(v_k) \leq (6-k) + \frac{1}{2} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq \frac{8-k}{2} \quad \text{falls } s = 0.$$

Wir setzen  $f_k = \frac{8-k}{2}$  für  $7 \leq k \leq 13$ , also  $f_7 = \frac{1}{2}$ ,  $f_8 = 0$ ,  $f_9 = -\frac{1}{2}, \dots, f_{13} = -\frac{5}{2}$ . Für  $k = 6$  haben wir  $e(v_6) \leq \frac{3}{2}$  nach (i) und (ii), so dass wir  $f_6 = \frac{3}{2}$  nehmen.

In Zusammenfassung erhalten wir

$$12 = \sum_{v \in V} e(v) \leq \frac{3}{2}p_6 + \frac{1}{2}p_7 - \frac{1}{2}p_9 - \dots - \frac{5}{2}p_{13} - \sum_{k \geq 14} \frac{k-9}{2}p_k$$

und daraus die folgende (geringfügig verschärfte) Ungleichung von Chojnacki:

**Satz 9.6.** Sei  $p_k$  die Anzahl der  $k$ -Ecken eines irreduziblen Graphen  $G$ . Dann gilt :

$$3p_6 + p_7 \geq 24 + p_9 + 2p_{10} + \dots + 5p_{13} + \sum_{k \geq 14} (k-9)p_k.$$

Insbesondere folgt, dass  $\{\times, \circ\}$  eine unvermeidbare Menge ist. (Übrigens wurde von Allaire gezeigt, dass die 6-Ecke allein bereits unvermeidbar ist.)

Durch Heranziehen einer Reihe komplizierterer reduzierbarer Konfigurationen stellte Mayer folgende Ungleichungen auf:

**Satz 9.7.** Für die Zahlen  $p_k$  gelten die Ungleichungen:

$$(i) \quad 2p_6 + p_7 \geq 24 + p_9 + \sum_{k \geq 10} (k-9)p_k,$$

$$(ii) \quad p_6 + p_7 + p_8 \geq 24,$$

$$(iii) \quad p_7 + 2 \sum_{k \geq 8} p_k \geq 12.$$

Kombinieren wir 9.7(iii) mit der Ausgangsgleichung  $p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k-6)p_k$ , so erhalten wir  $p_5 \geq 12 + p_7 + 2 \sum_{k \geq 8} p_k \geq 24$  und daraus mittels 9.7(ii)  $p_5 + p_6 + p_7 + p_8 \geq 48$ . Für die Birkhoff Zahl  $b$  gilt somit  $b \geq 48$ . Kurze Zeit später gelang Mayer mit derselben Methode eine Anhebung der Birkhoff Zahl auf  $b \geq 96$ .

Wir sind in unserer Geschichte bis in die 1970'er Jahre vorgestoßen. Die Methoden der Entladung und Reduzierung waren wohlverstanden und hatten einen hohen Grad der Subtilität erreicht. Und doch waren alle bekannten reduzierbaren Konfigurationen noch weit davon entfernt, in ihrer Gesamtheit eine unvermeidbare Menge zu bilden. Selbst mit sehr schnellen Rechnern zur Hand stand man vor zwei enormen Schwierigkeiten. Erstens war man sicher, dass in jeder unvermeidbaren Menge reduzierbarer Konfigurationen Typen mit Ringgröße  $\geq 14$  auftreten müssten. Heesch und sein Student Dürre hatten schon 26 Rechnerstunden verbraucht, um nur *eine* besonders unangenehme Konfiguration mit Ringgröße 14 auf  $D$ -Reduzierbarkeit zu testen. Da der geschätzte zeitliche Zuwachs zur nächsten Ringgröße etwa vom Faktor 4 ist, so mussten bei Ringgrößen ab 16 auch die schnellsten und größten Computer der damaligen Zeit kapitulieren. Die zweite Schwierigkeit war, dass niemand genau wusste,

wie viele Konfigurationen man benötigen würde. Die gängige Schätzung war einige Tausend - und auch das schien jeden Rahmen der vorhandenen Rechnertechnologie zu sprengen.

Und schließlich: Ein Computer-gestützter Beweis ist sicherlich nicht das, was sich die Mathematiker unter einer eleganten Lösung vorstellen. Andererseits waren die meisten Experten pessimistisch darüber, ob ein Beweis von vernünftiger Länge auch nur annähernd in Reichweite war. Mit all diesen Hindernissen mathematischer und außermathematischer Art konfrontiert begannen 1972 Wolfgang Haken (ursprünglich aus Kiel) und sein Kollege Kenneth Appel von der Universität von Illinois ihre Arbeit am 4-Farben Problem, die vier Jahre später zum Erfolg führte.



## Übungen zu Kapitel 9

- 1.\* Zeige, dass der Birkhoff Diamant  $D$ -reduzierbar ist.
2. Zeige die Reduzierbarkeit des Birkhoff Diamanten durch Wahl eines anderen Reduktors als in 9.3.
3. Verifiziere die Reduzierbarkeit der zweiten und vierten Konfiguration in 9.4(ii).
- 4.\* Zeige, dass die vierte Konfiguration in 9.4(ii) nicht  $D$ -reduzierbar ist.
5. Gegeben der Entladungsalgorithmus vor Figur 9.11. Überprüfe, dass die unvermeidbare Menge aus Figur 9.11 resultiert.
- 6.\* Transferiere die Anfangsladung von 5-Ecken auf höchstens zwei benachbarte große Ecken (jeweils  $1/2$ ) und bestimme die resultierende unvermeidbare Menge.
7. Versuche die Birkhoff Zahl durch eine geeignete Entladung (wie nach 9.5) auf über 26 zu heben.

# 10 Lösung und „Problem“

Wir haben anhand mehrerer Beispiele gesehen, wie die klassische Methode funktionierte. Als Erstes wurde eine Liste von reduzierbaren Konfigurationen aufgestellt (Reduzierbarkeit) und als Zweites der Nachweis versucht, dass in jeder beliebigen Triangulierung mindestens eine der schon bekannten reduzierbaren Konfigurationen auftaucht (Unvermeidbarkeit).

Vielleicht war es bereits der entscheidende Schritt, dass Appel und Haken diese klassische Ordnung umkehrten und zuerst eine umfassende Theorie der Unvermeidbarkeit entwickelten, wobei sie Heesch's Leitprinzip der Obstruktionen folgten und dann erst auf Reduzierbarkeit testeten. Dementsprechend wollen auch wir die Ideen von Appel und Haken zu den beiden Themen in dieser Reihenfolge behandeln.

Das erste Ziel ist somit vorgegeben: Man finde eine unvermeidbare Menge von Konfigurationen, die keine der Obstruktionen enthalten. Falls solch eine Menge annehmbarer Größe existierte (sowohl was die Anzahl der Konfigurationen betrifft als auch ihre Größe), so bestand begründete Hoffnung, auch eine Menge zu finden, deren Mitglieder alle reduzierbar sind.

Um einen ersten Überblick zu gewinnen, beschränkten sich Appel und Haken zunächst auf die ersten beiden Obstruktionen. Sie nannten eine Konfiguration *geographisch gut*, falls sie weder Obstruktion (A) noch Obstruktion (B) enthielt. Sehen wir die Definition nach, so ist eine Konfiguration geographisch gut, falls jede innere Ecke höchstens 3 Beine hat und genau 3 Beine nur dann, wenn die korrespondierenden Ringecken aufeinanderfolgen. Eine einzelne innere 5-Ecke hat 5 Beine und ist demnach geographisch schlecht. Gibt es kleine unvermeidbare Mengen, in denen innere Ecken höchstens 4 Beine haben? Ja, zum Beispiel die unvermeidbare Menge aus 9.5(iv). Als nächste Verbesserung produzierte Haken per Hand eine unvermeidbare Menge mit 68 Konfigurationen, welche die Obstruktionen (A) und (B) vermieden mit Ausnahme vielleicht einer einzigen 4-beinigen inneren Ecke. 1972 schrieben er und Appel ein Computer Programm zu einem Entladungsalgorithmus, der die Ladung von den 5-Ecken ähnlich wie im vorigen Kapitel gleichmäßig auf die benachbarten großen Ecken transferiert. Die resultierende unvermeidbare Menge bestand auch nicht ausnahmslos aus geographisch guten Konfigurationen, aber zwei wichtige Informationen wurden erhalten: Erstens wurden geographisch gute Konfigurationen mäßiger Größe (Ringgröße  $\leq 16$ ) in der Nähe der meisten Ecken mit einer positiven Endladung gefunden. Zweitens traten die gleichen Konfigurationen verhältnismäßig oft auf, so dass begründete Hoffnung bestand, die endgültige Liste wäre von erträglicher Größe.

Mit den Ergebnissen des ersten Computer Durchlaufs gingen Appel und Haken daran, ihren Entladungsalgorithmus entsprechend zu modifizieren. Es begann ein Dialog mit dem Computer, der etwa sechs Monate andauerte, bis sie sicher waren, dass das modifizierte Programm tatsächlich das gewünschte Resultat – eine unvermeidbare Menge geographisch guter Konfigurationen – liefern würde. Der endgültige Beweis,

mit allen möglichen Fallunterscheidungen, war eine veritable tour de force, die über ein Jahr in Anspruch nahm.

Nach dem Beweis der Existenz einer unvermeidbaren Menge geographisch guter Konfigurationen kam die nächste Hürde: Wie groß würde die Liste sein und wie kompliziert die einzelnen Konfigurationen? Dazu testeten Appel und Haken ihr Programm anhand einer speziellen Situation: Sie betrachteten nur Triangulierungen, in denen niemals benachbarte 5-Ecken auftraten. Wenn dies auch eine starke Einschränkung war, so stimmte das Ergebnis optimistisch: Sie erhielten eine unvermeidbare Menge von 47 Konfigurationen und Ringgröße  $\leq 16$ . Weitere Experimente mit dem Rechner legten die Erwartung nahe, dass bei Ausschließung auch der dritten Obstruktion (also einem hängenden 5-Paar) die ursprüngliche Liste der geographisch guten Konfigurationen nur etwa verdoppelt würde und dass die Ringgröße vielleicht sogar auf  $\leq 14$  gedrückt werden könnte.

Erst jetzt wurde die Reduzierbarkeitsfrage aufgegriffen. Wir wollen eine Konfiguration *wahrscheinlich reduzierbar* nennen, wenn sie obstruktionsfrei ist. Unsere Analyse hat uns zu folgendem Programm geführt: Gegeben eine unvermeidbare Menge  $\mathcal{M}$  wahrscheinlich reduzierbarer Konfigurationen. Falls eine Konfiguration  $K$  in  $\mathcal{M}$  trotzdem nicht reduzierbar ist, so modifiziere man den Entladungsalgorithmus derart, dass  $K$  durch andere wieder obstruktionsfreie Konfigurationen ersetzt wird und teste diese auf Reduzierbarkeit, usf. Aber wie können wir sicher sein, dass dieser Modifikationsprozess ein Ende nimmt? Vielleicht produzieren wir nur immer größere unvermeidbare Mengen mit immer größeren Ringgrößen? Der neben der ausgefeilten Entladungs-technik bedeutendste Aspekt der Arbeit von Appel und Haken ist eine heuristische Plausibilitätsüberlegung, dass dieser Fall nicht eintreten wird, auf die wir ganz kurz eingehen wollen.

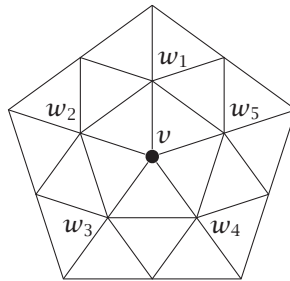
Nehmen wir das Ergebnis vorweg: In ihrer Computer-gestützten Lösung des 4-Farben Problems konstruierten Appel und Haken eine unvermeidbare Menge von 1936 reduzierten Konfigurationen, alle mit Ringgröße  $n \leq 14$ . Da zum Beweis der Reduzierbarkeit einzig Kempes ursprüngliche Methode des Farbaustauschs verwendet wurde, mutet dieses Resultat auf den ersten Blick äußerst merkwürdig an. Warum muss man zu derart großen Mengen greifen, um Kempes Beweis zu retten, während kleinere Mengen dies nicht schaffen? Dazu stellten Appel und Haken raffinierte Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen an, die es sehr plausibel erscheinen ließen, dass eine unvermeidbare Menge reduzierbarer Konfigurationen mit Ringgröße  $n \leq 17$  existiert, vielleicht sogar mit  $n \leq 14$ , während es unwahrscheinlich ist, dass es eine solche Menge mit  $n \leq 12$  gibt. Für  $n = 13$  konnte in diesem Stadium keine Voraussage getroffen werden. Die von Appel und Haken konstruierte Menge hat  $n \leq 14$  und bestätigt somit das positive Ergebnis. Andererseits hat Moore 1977 eine Triangulierung gefunden, die keine reduzierbare Konfiguration mit  $n \leq 11$  enthält, so dass auch das negative Ergebnis fast erreicht ist. Auf den zweiten Blick ist also die Kempe-Lösung von Appel und Haken keineswegs merkwürdig, sondern bestätigt im Gegenteil - in den Worten von Appel und Haken - dass es in der Mathematik keine Überraschungen gibt.

Was die Struktur der Konfigurationen betrifft, so ließen sie sich von einer weiteren Vermutung von Heesch leiten. Eine Konfiguration  $K = (H, C)$  mit  $m$  inneren Ecken und  $n$  Ringecken heißt  $(m, n)$ -Konfiguration. Zur Verdeutlichung schreiben wir manchmal  $K = (H_m, C_n)$ . Wie können wir die Wahrscheinlichkeit der Reduzierbarkeit von

$K = (H_m, C_n)$  abschätzen? Je größer  $m$  ist im Verhältnis zu  $n$ , desto eher können wir annehmen, dass *jede* 4-Färbung von  $C$  zumindest mittels Kempe-Austausch auf  $H$  erweitert werden kann, dass  $K$  also  $D$ -reduzierbar ist. Dieses Plausibilitätsargument führte zusammen mit einer Analyse kleiner Konfigurationen zur nachstehenden (unbewiesenen) Vermutung, deren Berechtigung wir im Folgenden untermauern wollen.

**Reduzibilitätsvermutung.** *Jede  $(m, n)$ -Konfiguration mit  $m > \frac{3n}{2} - 6$  ist  $D$ -reduzierbar.*

Sehen wir uns ein paar Beispiele an. Angenommen, das Innere besteht allein aus einer 5-Ecke  $v$ . Dann ist  $m = 1$ ,  $n = 5$  und die Reduzibilitätsvermutung, kurz R-Vermutung, wird wegen  $1 < \frac{3}{2} \cdot 5 - 6 < 2$  um eine Einheit von  $m$  verfehlt. Nehmen wir als Nächstes als Inneres die *erste Nachbarschaft* von  $v$ , d. h.  $v$  mit den 5 Nachbarn. Welche Ringgröße  $n$  ist zu erwarten? Aus 9.1(ii) folgt, dass mit  $|V| = p$  der Durchschnittsgrad einer Ecke  $\bar{d} = 6 - \frac{12}{p}$  ist. Wir erhöhen das durchschnittliche  $n$  also höchstens, wenn wir den Grad der Nachbarecken durchwegs mit 6 ansetzen. Die Gradsumme der Nachbarecken  $w_1, \dots, w_5$  ist somit 30. Ziehen wir davon die 3 Grade jeweils im Inneren ab und berücksichtigen zusätzlich die gemeinsamen Ringecken benachbarter  $w_i$ 's, so erhalten wir  $n \approx 30 - 3 \cdot 5 - 5 = 10$  (Figur 10.1).



Figur 10.1

Mit  $m = 6$ ,  $n = 10$  verfehlen wir die R-Vermutung wegen  $6 < \frac{3}{2} \cdot 10 - 6 = 9 < 10$  um 4 Einheiten von  $m$ . Dies sieht hoffnungslos aus. Durch Vergrößerung der Konfiguration sind wir weiter von der Reduzierbarkeit entfernt als zuvor. Gehen wir aber einen Schritt weiter und nehmen als Inneres die *zweite Nachbarschaft* (also  $v$  zusammen mit  $w_1, \dots, w_5$  und deren Nachbarn), so kehrt sich die Situation wieder um. Jetzt ist, wie gesehen,  $m \approx 16$ , und, wie man durch leichte Rechnung bestätigt,  $n \approx 15$ . Die R-Vermutung ist mit  $16 < \frac{3}{2} \cdot 15 - 6 < 17$  wiederum nur um eine Einheit von  $m$  verfehlt. Genau dies ist die (zugegeben noch sehr schwache) Erklärung des eingangs erwähnten Phänomens: Während kleine Modifikationen der ursprünglichen Kempe Situation nicht ausreichen, so wird ein Erfolg sehr wahrscheinlich, wenn wir in die Gegend von  $n = 15$  bis 17 hinaufgehen. Diese Tatsache ist theoretisch vielleicht weniger interessant, doch praktisch war sie von eminenter Bedeutung, da die Rechenkapazität damaliger Computer ab etwa  $n = 17$  hoffnungslos überfordert war. Obendrein lässt es die obige Überlegung plausibel erscheinen, dass man nicht über die zweiten Nachbarschaften von Ecken mit positiver Endladung hinausgehen muss.

Die Details der wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen würden den Rahmen der Darstellung sprengen, so dass hier auf die Originalarbeit von Appel und Haken verwiesen sei. Jedenfalls führten sie zu dem eingangs erwähnten Ergebnis:

*Es ist fast sicher, dass eine unvermeidbare Menge reduzierbarer Konfigurationen mit  $n \leq 17$  existiert, und sehr wahrscheinlich, dass schon  $n \leq 14$  ausreicht, während es höchstwahrscheinlich Triangulierungen gibt, in denen alle Konfigurationen mit  $n \leq 12$  irreduzibel (genauer nicht C-reduzierbar) sind.*

Dies war die Situation 1975. Die probabilistischen Überlegungen überzeugten Appel und Haken, dass eine Computer-gestützte Lösung des 4-Farben Problems möglich war, und sie zeigten auch an, welche Konfigurationen in Frage kamen. Insbesondere legten sie nahe, ausschließlich Konfigurationen mit  $n \leq 14$  in Betracht zu ziehen. Und schließlich belegten sie das vielleicht bittere aber unumstößliche Faktum, dass es zumindest bei der Kempe Methode ohne Computer nicht geht. Menschliche Rechnung ist bei Zehntausenden von Einzelschritten einfach zu langsam.

Im letzten Stadium ihrer Arbeit wurden Verbesserungen des Entladungsalgorithmus und Tests auf Reduzierbarkeit (hauptsächlich durch John Koch) parallel ausgeführt. Die endgültigen Durchläufe waren sozusagen „selbstkorrigierend“. Appel, Haken und Koch begannen mit einer ersten Approximation zu ihrem Entladungsalgorithmus. Wann immer eine große Ecke mit positiver Endladung resultierte, wurde die zweite Nachbarschaft dieser Ecke getestet, ob darin eine obstruktionsfreie Konfiguration auftrat. Falls keine vorkam, wurde die Nachbarschaft *kritisch* genannt. Wurde eine obstruktionsfreie  $(m, n)$ -Konfiguration gefunden, so wurde sie auf Reduzierbarkeit getestet, und zwar nach den Richtlinien der Wahrscheinlichkeitsüberlegungen: Für  $n > 14$  wurde die Konfiguration nicht akzeptiert. Für  $n \leq 14$  wurde zuerst auf *D*-Reduzierbarkeit getestet. Falls dies zu einem negativen Ergebnis führte, wurden einige Typen von Reduktoren zur *C*-Reduzierbarkeit getestet. Jede Konfiguration, die auf diese Weise nicht relativ schnell reduziert werden konnte (90 Minuten auf einer IBM 370-158 bzw. 30 Minuten auf einer IBM 370-168) wurde ebenfalls verworfen. In all diesen Fällen wurde die Nachbarschaft ebenfalls kritisch genannt. Nach Ende des Durchlaufs fand eine Klassifizierung der kritischen Nachbarschaften statt, worauf der Algorithmus entsprechend modifiziert wurde, um diese Nachbarschaften auszuschließen.

Von Januar bis Juni 1976 dauerte dieser Dialog zwischen Mensch und Maschine. Über 1000 Stunden wurde auf drei Computern auf Reduzierbarkeit getestet, während die endgültigen Modifikationen des Entladungsalgorithmus per Hand ausgeführt wurden. Etwa 10 000 Nachbarschaften von Ecken mit positiver Ladung wurden per Hand analysiert und über 2000 Konfigurationen per Maschine auf Reduzierbarkeit geprüft. Im Juni 1976 war dieses monumentale Unternehmen von Erfolg gekrönt: Eine unvermeidbare Menge von 1936 reduzierbaren Konfigurationen (alle mit  $n \leq 14$ ) war gefunden. Durch Korrektur von Duplikationen und kleinen Verbesserungen wurde die Anzahl kurz darauf auf 1482 und schließlich auf 1405 gedrückt. Damit war endgültig nach 124 Jahren aus dem 4-Farben Problem der 4-Farben Satz geworden:

**4-Farben Satz.** *Jede ebene Landkarte ist 4-färbbar.*

Die Bekanntgabe der Lösung des 4-Farben Problems wurde von der mathematischen Welt mit gemischten Gefühlen aufgenommen. In die Begeisterung, dass ein über 100 Jahre altes Problem gelöst war, und die Hochachtung vor der Leistung der beteiligten Forscher mischte sich ein Gefühl der Skepsis und Enttäuschung, vornehmlich aus zwei Gründen: Der erste und wichtigere Einwand betraf die Durchsichtigkeit und Länge

des Beweises. Ein Computer-gestützter Beweis derartiger Länge und Komplexität ist für den, der nicht über ähnliche Rechenkapazität verfügt, nicht nachprüfbar. Der zweite Einwand war mathematisch-ästhetischer Natur. Die Hoffnung, dass eines der eleganten, theoretisch ausgefeilten Konzepte (die wir in den Kapiteln 4-8 besprochen haben), zum Ziel führen würde, hatte getrogen. Erfolgreich war schließlich die älteste und direkteste Methode und dies unter massivem Einsatz von Computern.

Was die Durchsichtigkeit und Validität des Appel-Haken Beweises betrifft, so wurden zuvorderst die äußerst komplizierten Entladungsregeln (mehrere hundert) kontroversiell diskutiert. Es wurde angemahnt, dass erst eine unabhängige Computer-Überprüfung (vor allem auch der Rechenprogramme) endgültige Wahrheit bringen würde. So eine Überprüfung wurde 1997 von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas durchgeführt. Sie hatten sich anfangs daran gemacht, die Arbeit von Appel und Haken durchzuarbeiten, entschieden sich aber schließlich für einen eigenen Zugang. Die Methode, eine unvermeidbare Menge von reduzierbaren Konfigurationen zu finden, blieb die gleiche, doch wies ihr Beweis wesentliche Verbesserungen auf: Die Entladungsregeln (insgesamt 34) sind einfacher und die Anzahl der Konfigurationen wird auf 633 gedrückt. Natürlich spielte beim Experimentieren auch die gestiegene Rechnerleistung eine Rolle. Dieser neue Beweis wurde seinerseits mehrfach überprüft und inzwischen durch ein formalisiertes Computercheckprogramm zweifelsfrei verifiziert.

Der zweite, mathematisch-ästhetische, Einwand ist verständlich, aber bei näherer Betrachtung und insbesondere aus heutiger Sicht (2015) wohl nicht gerechtfertigt. Alle anderen in diesem Buch geschilderten Attacken benötigen stärkere theoretische Mittel als die der Kempe Methode zugrundeliegende Euler Formel. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, dass solche Mittel zu finden sind, aber niemand kann garantieren, dass sie erstens tatsächlich existieren, und zweitens, dass sie den Beweis erheblich verkürzen würden.

Die überragende Bedeutung des 4-Farben Satzes könnte letztlich darin liegen, dass er das erste und besonders einprägsame Beispiel eines mathematischen Satzes ist, dessen Beweis von Natur aus sehr lang sein muss, so lang, dass er ohne Computer-Unterstützung nicht bewältigt werden *kann*. Jedenfalls ist die Scheu vor solchen Beweisen in den vergangenen Jahrzehnten seit der Arbeit von Appel und Haken geschwunden, und es gibt nun Computer-gestützte Beweise in nahezu allen Bereichen der Mathematik. Ob ein verstärkter oder schließlich selbstverständlicher Einsatz von Großrechnern der mathematischen Forschung zum Segen gereichen wird, lässt sich noch nicht absehen, jedenfalls wird er sie grundlegend verändern. Die mathematische Welt wird gezwungen sein, totale Verifizierbarkeit per Hand aufzugeben (gerade so

**Kenneth Appel**, geboren 1932 in New York, studierte an der University of Michigan und ging 1961 an die University of Illinois at Urbana. In seinen gruppentheoretischen Arbeiten verwendete er bereits früh Computer Rechnungen. **Wolfgang Haken** wurde 1928 in Berlin geboren, studierte in Kiel und arbeitete viele Jahre bei Siemens. In der mathematischen Welt wurde er durch Arbeiten über Topologie und insbesondere seinen Algorithmus zur Knotenerkennung bekannt. Seit Mitte der 1960'er Jahre lehrte er ebenfalls in Urbana, wo er 1972 seine Zusammenarbeit mit Kenneth Appel begann, die vier Jahre später von Erfolg gekrönt war. Appel starb 2013 in Durham. Wolfgang Haken lebt in Urbana.

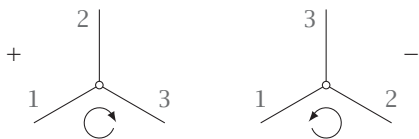


wie es in den angewandten Naturwissenschaften der Fall ist), aber die Breite der mathematischen Erkenntnisse wird diesen Verlust mehr als wettmachen.

Die ganz spezielle Faszination des 4-Farben Problems bleibt auch nahezu vierzig Jahre nach dem Beweis ungebrochen. Ein Grund ist die Tatsache, dass wir an vielen Stellen des Buches den Beweis „fast“ erbracht haben. Das begann mit Heawoods Satz 2.1, dass jede Landkarte 5-färbbar ist, der Beweis jedoch für 4 Farben nicht funktioniert. Oder die Formel  $\chi(S_h) \leq \lfloor \frac{7+\sqrt{1+48h}}{2} \rfloor$  (siehe 2.4), die für jede orientierbare Fläche  $S_h$  mit  $h \geq 1$  gültig ist, die Beweisführung aber genau für den Fall  $h = 0$  zusammenbricht. Oder die Folgerung 5.6 aus Vizings Satz: Jeder 3-reguläre ebene Graph ist 4-kantenfärbbar; wir benötigen aber die 3-Färbbarkeit, und so weiter. Es drängt sich der Eindruck auf, dass der 4-Farben Satz einen ganz speziellen Platz in der ebenen Geometrie und Topologie einnimmt. Vielleicht haben wir ihn noch nicht wirklich verstanden, und vielleicht gibt es doch eine tief liegende Idee, die einen völlig neuen Zugang ermöglicht.

Es gibt aber noch eine zweite Quelle der andauernden Faszination, nämlich die Vielzahl von mathematischen Sätzen (zum Teil aus ganz anderen Gebieten), deren Gültigkeit *äquivalent* zur Richtigkeit des 4-Farben Satzes ist. Und mit einem besonders eleganten und verblüffenden Beispiel eines solchen Satzes aus dem Jahr 1990 wollen wir das Kapitel und das Buch beschließen.

Wir nehmen einen beliebigen 3-regulären zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  ohne Brücken und Schlingen und betten  $G$  irgendwie in die Ebene ein (mit oder ohne Überkreuzungen); wir nennen diese Graphen von nun an *normal*. Ferner sei  $f : E \rightarrow \{1, 2, 3\}$  eine 3-Kantenfärbung von  $G$ . Jeder Ecke  $u$  ordnen wir ein Vorzeichen  $+$  oder  $-$  zu, je nach dem Durchlaufsinn der Kantenfarben 1, 2, 3 bei  $u$ . Wir setzen  $\sigma(u) = i$  für positive Ecken und  $\sigma(u) = -i$  für negative, wobei  $i = \sqrt{-1}$  ist, und definieren  $\sigma(f) = \prod_{u \in V} \sigma(u)$ .

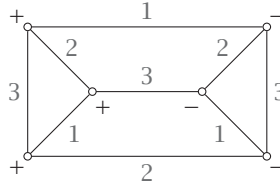


Figur 10.2

Es seien  $s_+(f)$  und  $s_-(f)$  die Anzahl der positiven bzw. negativen Ecken unter der Färbung  $f$ . Wegen der 3-Regularität hat  $G$  eine gerade Anzahl  $p = 2m$  von Ecken, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \prod_{u \in V} \sigma(u) = i^{s_+(f)} (-i)^{s_-(f)} = \\ &= (-1)^{s_-(f)} (i^2)^m = (-1)^{s_-(f)+m} \in \{+1, -1\}. \end{aligned}$$

Natürlich hängt  $\sigma(f)$  von der Einbettung ab, aber es ist unschwer zu sehen, dass mit  $U(G) = \sum_f \sigma(f)$ , summiert über alle 3-Färbungen, der *Absolutbetrag*  $|U(G)|$  eine Invariante des Graphen  $G$  ist, unabhängig von der Einbettung. (Wenn keine 3-Färbung existiert, so setzen wir  $U(G) = 0$ .) In dem Graphen in Figur 10.3 erhalten wir z.B.  $\sigma(f) = (-1)^{3+3} = 1$ .



Figur 10.3

Der folgende erstaunliche Satz wurde von dem Physiker Penrose entdeckt, der ebenfalls mehrere Jahre an der 4-Farben Vermutung arbeitete.

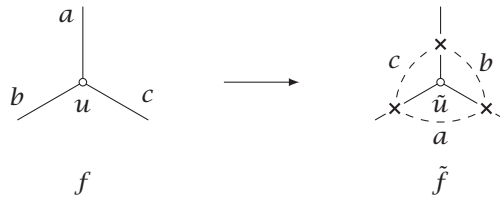
**Satz 10.1** (Penrose). *Es sei  $G = (V, E)$  ein normaler ebener Graph (also ohne Überkreuzungen eingebettet). Dann ist  $\sigma(f) = +1$  für jede 3-Kantenfärbung  $f$  von  $G$ .*

*Beweis.* Es sei  $f$  eine 3-Kantenfärbung mit  $\{1, 2, 3\}$ . Wir konstruieren zu  $G$  den sogenannten Medialgraphen  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  auf folgende Weise: Wir setzen eine neue Ecke auf jede Kante und verbinden benachbarte Karten mit einer kleinen Kurve innerhalb des entsprechenden Landes (siehe Figur 10.4).



Figur 10.4

Der entstehende Graph  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  heißt der *Medialgraph*.  $\tilde{G}$  ist 4-regulär und wieder eben. Aus der Definition folgt sofort, dass jede Ecke  $u \in V$  in  $\tilde{G}$  von einem Dreiecksland umschlossen wird, das wir mit  $\tilde{u}$  bezeichnen. Wir übertragen nun die Kantenfärbung  $f$  von  $G$  auf die Kantenfärbung  $\tilde{f}$  von  $\tilde{G}$  wie in Figur 10.5:



Figur 10.5

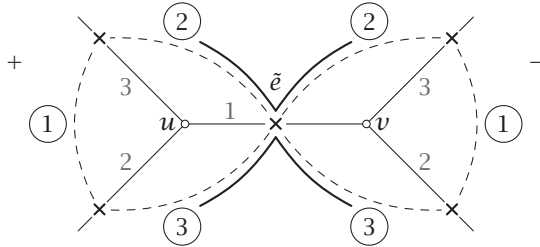
Auf diese Weise können wir die Länder  $\tilde{u}$  in  $\tilde{G}$  wieder nach dem Umlaufsinn signieren, und Figur 10.5 zeigt, dass stets  $\sigma(u) = \sigma(\tilde{u})$  gilt. Wegen  $\sigma(f) = \pm 1$  haben wir  $\sigma(f) = \sigma(f)^3$  und daher wegen der 3-Regularität von  $G$

$$\sigma(f) = \sigma(f)^3 = \prod_{u \in V} \sigma(u)^3 = \prod_{uv \in E} \sigma(u)\sigma(v) = \prod_{\substack{\tilde{u}, \tilde{v} \\ uv \in E}} \sigma(\tilde{u})\sigma(\tilde{v}). \quad (*)$$

Sehen wir uns die rechte Figur 10.4 an, so ergeben sich zwei Fälle:



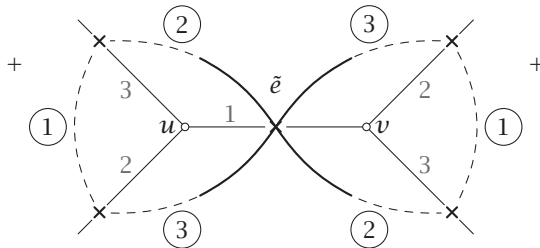
**Fall 1.**  $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ . Dann ist  $\sigma(\tilde{u})\sigma(\tilde{v}) = i(-i) = 1$  und wir haben o. B. d. A. folgende Situation an der Ecke  $\tilde{e}$  in  $\tilde{G}$ .



Figur 10.6

Zur besseren Unterscheidung sind die Farben für  $\tilde{G}$  eingekreist.

**Fall 2.**  $\sigma(u) = \sigma(v)$ . Dann ist  $\sigma(\tilde{u})\sigma(\tilde{v}) = -1$  und wir haben o. B. d. A. folgende Färbung:



Figur 10.7

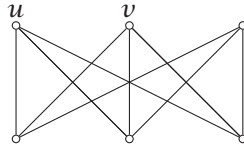
Wir sehen, dass in beiden Fällen an der Ecke  $\tilde{e}$  von  $\tilde{G}$  genau zwei Farben je zweimal erscheinen. Bezeichnet  $\tilde{E}_j$  die Menge aller Kanten mit Farbe  $j$ , so zerfallen die Untergraphen  $\tilde{G}_j = (\tilde{V}, \tilde{E}_j)$  in disjunkte Kreise in der Ebene, wobei im Fall 1 bei  $\tilde{e}$  keine Kreuzung vorliegt, im Fall 2 (also  $\sigma(\tilde{u})\sigma(\tilde{v}) = -1$ ) aber schon. Damit können wir (\*) umschreiben zu  $\sigma(f) = (-1)^t$ ,  $t$  = Anzahl der Kreuzungen der Farbkreise.

Nach dem Jordanschen Kurvensatz (jetzt kommt er!) ist aber die Anzahl der Kreuzungen zwischen verschiedenen gefärbten Kreisen *gerade*, somit auch die Gesamtzahl  $t$  der Kreuzungen gerade, und wir schließen  $\sigma(f) = 1$ . □

Für jeden ebenen Graphen  $G$  gilt somit  $U(G) = \sum_f \sigma(f) = \text{Anzahl der 3-Kantenfärbungen}$  und wir erhalten das folgende Ergebnis.

**Folgerung 10.2.** Für einen plättbaren normalen Graphen  $G$  ist stets  $U(G) = \pm(\text{Anzahl der 3-Kantenfärbungen})$ .

**Beispiel.** Betrachten wir den Kuratowski Graphen  $K_{3,3}$  mit der Einbettung wie in Figur 10.8:



Figur 10.8

Die Kantenfärbung bei  $u$  kann auf  $3! = 6$  Weisen gewählt werden. Liegt die Farbe fest, so gibt es jeweils zwei Möglichkeiten bei  $v$ , also sind es 12 Kantenfärbungen insgesamt. Andererseits berechnet man leicht  $U(K_{3,3}) = 0$  für die gegebene Einbettung und wir haben einen neuen Beweis für die Nichtplättbarkeit von  $K_{3,3}$ .

Nun zur angekündigten, zum 4-Farben Satz äquivalenten, Aussage. Es seien  $x_1, \dots, x_n$  Variablen über  $\mathbb{R}^3$ . Wir betrachten zwei beliebige Beklammerungen der Variablen, geschrieben von links nach rechts. Das folgende Beispiel mit  $n = 5$  wird durch alle Überlegungen beibehalten:

$$(x_1(x_2x_3))(x_4x_5) \stackrel{?}{=} (x_1x_2)(x_3(x_4x_5)).$$

Im Allgemeinen haben wir eine Beklammerung  $L$  auf der linken Seite und eine Beklammerung  $R$  auf der rechten Seite. Als Produkt nehmen wir das *Vektorprodukt*, d. h. sind  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$ ,  $k = (0, 0, 1)$  die Einheitsvektoren, so gelte

$$\begin{aligned} ij = k, jk = i, ki = j; ji = -k, kj = -i, ik = -j; \\ ii = jj = kk = 0 \quad (\text{Nullvektor}). \end{aligned} \tag{**}$$

**Frage.** Gegeben zwei Beklammerungen  $L$  und  $R$ . Gibt es eine Auswertung  $f : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{i, j, k\}$  so dass  $L = R$  gilt?

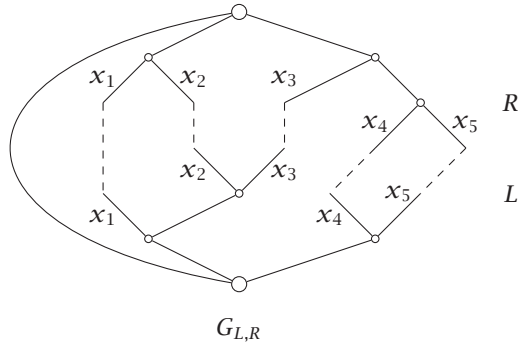
Natürlich geht das, indem wir  $x_1 = \dots = x_n = j$  setzen, da dann  $j = j$  für  $n = 1$  steht, und  $0 = 0$  für  $n \geq 2$ . Wir präzisieren daher: Gibt es eine Belegung  $f$  mit  $L = R \neq 0$ ? Die unerwartete Antwort gibt der folgende Satz.

**Satz 10.3 (Kauffman).** *Solch eine Auswertung mit  $L = R \neq 0$  ist für jedes  $n$  und je zwei Beklammerungen möglich dann und nur dann, wenn der 4-Farben Satz gilt.*

*Beweis.* Wir verwenden den 4-Farbensatz in der Form 1.7: Jeder ebene normale Graph ist 3-kantenfärbbar.

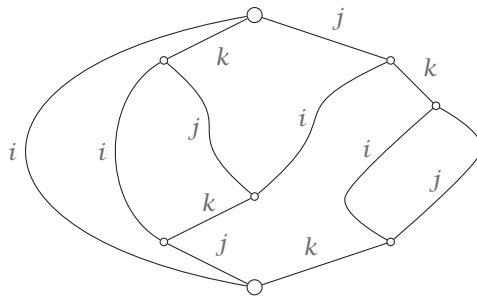
Es sei die Aussage 1.7 richtig und  $L, R$  zwei Beklammerungen der Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . Zu  $L$  und  $R$  assoziieren wir zwei Wurzelbäume, indem wir die Beklammerungen von innen nach außen aufrollen (d. h. die Ecken entsprechen den Produkten und die Wurzel dem äußersten Produkt. Da wir  $n - 1$  Produkte aufrollen, haben also die Bäume jeweils  $n - 1$  Ecken. Den Baum von  $L$  zeichnen wir von unten nach oben, den Baum  $R$  von oben nach unten. Die Endkanten, entsprechend den Variablen, werden verschmolzen, und schließlich fügen wir eine Verbindungskante zwischen den Wurzeln hinzu.

Auf diese Weise erhalten wir einen ebenen normalen Graphen. Figur 10.9 zeigt den so erhaltenen Graphen  $G_{L,R}$  für das obige Beispiel, und es ist klar, dass die Konstruktion ganz allgemein funktioniert. Der Graph  $G_{L,R}$  hat  $2(n - 1)$  Ecken.



Figur 10.9

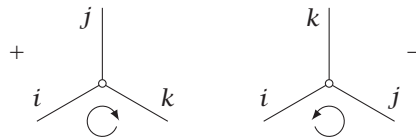
Wir wählen nun eine beliebige 3-Kantenfärbung (die nach Voraussetzung existiert) mit den Farben  $i, j, k$ . Ein Beispiel ist in Figur 10.10 enthalten, entsprechend der Belegung  $x_1 = i, x_2 = j, x_3 = i, x_4 = i, x_5 = j$ .



Figur 10.10

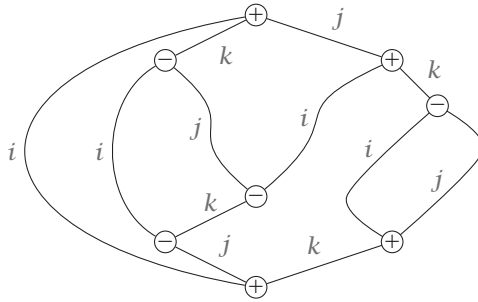
Laut den Produktregeln (\*\*\*) ist  $ab = \pm c$ , wobei  $c \neq a, b$  ist. Wenn wir daher die Bezeichnungen in den Bäumen verfolgen, so entsprechen die Produktresultate genau der Färbung, *abgesehen vom Vorzeichen*. Insbesondere erscheint in den Wurzeln die Farbe der Verbindungskante (in unserem Beispiel  $i$ ), und es bleibt nachzuprüfen, dass in beiden Wurzeln das *gleiche* Vorzeichen auftritt - und dazu verwenden wir den Satz von Penrose.

Wir nehmen  $i, j, k$  in dieser zyklischen Reihenfolge (anstelle von 1, 2, 3):



Figur 10.11

Die nächste Figur zeigt die positiven bzw. negativen Ecken in den Bäumen  $L$  und  $R$ , mit den entsprechenden Anzahlen  $\ell_+, \ell_-$  bzw.  $r_+, r_-$ .



Figur 10.12

Wann findet ein Vorzeichenwechsel in den Auswertungen statt? Aus Figur 10.12 ersehen wir (man beachte, dass in  $L$  die Auswertung nach unten verläuft, in  $R$  nach oben):

Anzahl der Vorzeichenwechsel in  $L = \ell_-$   
 Anzahl der Vorzeichenwechsel in  $R = r_+$ .

In Figur 10.12 ist z.B.  $ji = -k$  an einer negativen Ecke von  $L$  oder  $ik = -j$  an einer positiven Ecke in  $R$ . Es sei  $s_-$  wie in 10.1 die Anzahl der negativen Ecken in  $G_{L,R}$ , dann gilt

$$s_- = \ell_- + r_-,$$

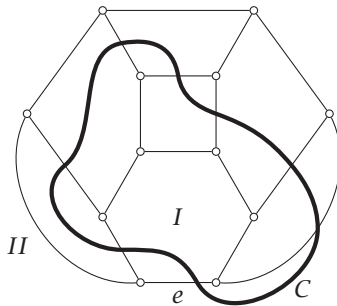
$$\ell_- + \ell_+ = r_- + r_+ = n - 1 \quad (n = \text{Anzahl der Variablen}),$$

und somit nach 10.1

$$(-1)^{n-1+s_-} = (-1)^{r_-+r_++\ell_-+r_-} = (-1)^{\ell_-+r_+} = 1.$$

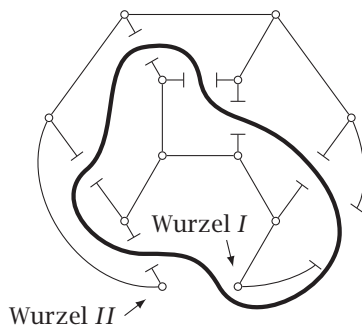
Also ist  $(-1)^{\ell_-} = (-1)^{r_+}$ , und wir erhalten tatsächlich das gleiche Vorzeichen an den Wurzeln.

Nun zur Umkehrung. Wir nehmen an, dass eine Auswertung mit  $i, j, k$  immer existiert. Nach Sätzen von Whitney (duale Aussagen zu 7.3 und 7.4) genügt es zum Nachweis des 4-Farben Satzes zu zeigen, dass jeder 3-reguläre ebene Graph  $G$  3-kantenfärbbar ist, dessen *Dualgraph*  $G^*$  einen Hamiltonschen Kreis enthält. Figur 10.13 zeigt solch einen Graphen  $G$  und einen Hamiltonschen Kreis  $C$  in  $G^*$  (also durch die Länder von  $G$ ).



Figur 10.13

Der Graph  $G$  habe  $p$  Ecken,  $q$  Kanten und  $r$  Länder, wobei  $p - q + r = 2$  ist. Nach dem Jordanschen Kurvensatz zerlegt  $C$  die Ebene in ein Inneres I und Äußeres II. Die Kurve  $C$  schneidet  $r$  Kanten (jene, die vom Inneren zum Äußeren führen), und man überzeugt sich leicht, dass die Untergraphen  $G_I$  und  $G_{II}$  in I bzw. II Bäume sind mit  $\frac{p}{2}$  Ecken und  $\frac{p}{2} - 1 = \frac{q-r}{2}$  Kanten. Wir wählen eine Kante  $e = uv$  vom Inneren ins Äußere, löschen sie, und betrachten  $u$  und  $v$  als Wurzeln der Bäume  $G_I$  und  $G_{II}$ . Schließlich trennen wir alle weiteren Schnittstellen (siehe Figur 10.14).



Figur 10.14

Der Graph  $G$  zerfällt auf diese Weise in zwei verklebte Bäume (plus die Kante  $e$ ). Die Bäume  $G_I$  und  $G_{II}$  entsprechen Beklammerungen, die wir nach Voraussetzung mit  $i, j, k$  belegen können (ohne auf das Vorzeichen zu achten), so dass *dasselbe* Symbol auf der Kante  $e$  erscheint. Also ist  $G$  3-kantenfärbbar, und der 4-Farben Satz folgt.  $\square$

Und so kommen wir zum Schluss. Über 100 Jahre hat das 4-Farben Problem bedeutende Mathematik hervorgebracht, eine ganze heute unverzichtbare Theorie entstehen lassen, und in der Lösung stößt es das Tor zu neuen Erkenntnissen und Problemen auf, die vielleicht die Forschung der nächsten 100 Jahre mitprägen werden. Manche Jahrhundertprobleme scheinen ihr Geheimnis auch nach der Lösung zu bewahren. Kann man mehr verlangen?

## Übungen zu Kapitel 10

1. Überprüfe die heuristischen Betrachtungen im Anschluss an die R-Vermutung.
- 2.\* Zeige, dass der Birkhoff Diamant die einzige (4,6)-Konfiguration in einer irreduziblen Triangulierung ist.
- 3.\* Sei  $\tilde{G}$  Medialgraph zu dem normalen ebenen Graphen  $G$ . Wir färben die Dreiecksländer  $\tilde{u}$  schwarz, die übrigen weiß. Zeige:
  - a. Die weißen Länder von  $\tilde{G}$  entsprechen den Ländern von  $G$ , mit derselben Anzahl von Grenzen.
  - b. Jede Kante von  $\tilde{G}$  ist inzident zu einem schwarzen und einem weißen Land.
  - c. Zwei Ecken in  $G$  sind genau dann benachbart, wenn die korrespondierenden schwarzen Länder eine Ecke gemeinsam haben.
4. Zeige, dass  $|U(G)|$  unabhängig von der Einbettung ist. (Hinweis: Betrachte lokale Änderungen der Einbettung.)
- 5.\* Überprüfe 10.3 an dem Beispiel

$$L = ((x_1 x_2)(x_3(x_4 x_5)))(x_6, x_7), \quad R = (x_1(x_2 x_3))((x_4(x_5 x_6))x_7).$$

# Literatur

Jede Literaturliste spiegelt eine gewisse Sicht des Themas wider. Sie wurde hier nach den drei Teilen des Buches zusammengestellt und enthält neben einführenden Lehrbüchern auch spezialisierte Texte und Originalarbeiten, die zu einem weitergehenden Studium einladen.

*Zu Teil I.* Eine ausgezeichnete Darstellung der Anfänge der Graphentheorie ist das Buch von Biggs-Lloyd-Wilson. Das Buch von Goodman gibt eine schöne Einführung in geschlossene Flächen und diskutiert den Jordanschen Kurvensatz. Ringels Buch bietet eine geschlossene Darstellung des Beweises des Heawoodschen Farbensatzes. Grünbaums Buch ist eine sehr lesenswerte Einführung in die Konvexe Geometrie.

N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson: *Graph Theory 1736-1936*. Oxford Univ. Press 1976.

S. E. Goodman: *Beginning Topology*. AMS Publications 2009.

B. Grünbaum: *Convex Polytopes*. Wiley 1967.

G. Ringel: *Map Color Theorem*. Springer 1974.

*Zu Teil II.* Es gibt eine große Anzahl von allgemeinen Lehrbüchern zur Graphentheorie in englischer Sprache, die deutschsprachige Literatur ist spärlicher. Stellvertretend für viele gute Texte seien die Bücher von West bzw. Diestel genannt. Eine sehr lesbare Darstellung über Einbettungsfragen ist das Buch von Mohar-Thomassen. Wer sich für Färbungsprobleme interessiert, dem sei die Sammlung von Jensen-Toft empfohlen. Das Standardwerk zur Matching Theorie ist das Buch von Lovász-Plummer. Eine anregende Zusammenstellung von Resultaten über Hamiltonsche Graphen findet man im Buch von Bermond. Wer sich näher über Ramsey Theorie informieren möchte, sollte das Buch von Graham-Rothschild-Spencer konsultieren. Als Einführung in die Theorie der Matroide seien die Bücher von Aigner bzw. Oxley empfohlen.

M. Aigner: *Combinatorial Theory*. Springer 1997.

J. C. Bermond: Hamiltonian Graphs. In: *Selected Topics in Graph Theory* (Beineke, Wilson Hrsg.). Academic Press 1978.

R. Diestel: *Graphentheorie*, 4. Auflage. Springer 2010.

R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer: *Ramsey Theory*, 2. Auflage. Wiley 1990.

T. R. Jensen, B. Toft: *Graph Coloring Problems*. Wiley 1995.

L. Lovász, M. D. Plummer: *Matching Theory*. AMS Publ., vol. 367, 2009.

B. Mohar, C. Thomassen: *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins Univ. Press 2001.

J. Oxley: *Matroid Theory*. Oxford Univ. Press 1992.

D. West: *Introduction to Graph Theory*, 2. Auflage. Prentice Hall 2001.

Zu Teil III. Ores Buch gibt einen Überblick über das 4-Farben Problem bis Mitte der 1960'er Jahre. Die ersten detaillierten Entladungsalgorithmen sind im Buch von Heesch enthalten. Reduzierbarkeits- und Unvermeidbarkeitsresultate findet man auch in Saaty-Kainen. Und natürlich kann (und sollte) man sich an die Originalarbeiten von Appel-Haken und vor allem von Robertson-Sanders-Seymour-Thomassen wagen. Eine Übersicht über spätere Entwicklungen findet man in der Arbeit von Thomas.

K. Appel, W. Haken: Every planar map is four colorable. *Contemp. Math.* 98 (1989).

H. Heesch: *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*. Bibliographisches Institut 1969.

O. Ore: *The Four Color Problem*. Academic Press 1967.

N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas: The four-color problem. *J. Combin. Theory B* 70 (1997), 2-44.

T. L. Saaty, P. C. Kainen: *The Four-Color Problem*. McGraw-Hill 1977.

R. Thomas: An update on the four-color theorem. *Notices AMS* 45 (1998), 848-859.



# Symbolverzeichnis

Die häufigsten im Text verwendeten Zeichen sind nach Buchstaben zusammengefasst.

$\hat{A}$	Unterraum aufgespannt von $A$	$\text{cr}(G)$	Kreuzungszahl
$\hat{A}^\perp$	orthogonaler Unterraum	$d(v), d_H(v)$	Grad von $v$
$C_n$	Kreis der Länge $n$	$e(S)$	Euler Charakteristik
$C + D$	Summe zweier Mengen	$\text{ex}(H, p)$	Extremalzahl
$E$	Kantenmenge	$e, f, g, \dots$	Kanten
$F, G, H, \dots$	Länder	$f, g, h, \dots$	Funktionen
$G = (V, E)$	Graph	$\ f\ $	Träger
$G^*$	dualer Graph	$m(G)$	Matching-Zahl
$\overline{G}$	Komplement von $G$	$p$	Eckenzahl
$G^m$	Potenz von $G$	$p(G; \lambda), p(\mathcal{L}; \lambda)$	chromatisches Polynom
$G \setminus A$	Entfernung von $A$	$\text{per}(M)$	Permanente
$G.A$	Restriktion	$q$	Kantenzahl
$G \times A$	Kontraktion	$r$	Länderzahl
$G/e$	Kontraktion durch $e$	$r(A), r(\Gamma)$	Rang
$J(H)$	direkt fortsetzbare Färbungen	$u, v, w, \dots$	Ecken
$K_p$	vollständiger Graph	$v_n$	$n$ -Ecke
$K_{m,n}$	vollständiger bipartiter Graph	$\Gamma$	Kettengruppe
$K = (H, C)$	Konfiguration	$\Gamma^*$	duale Kettengruppe
$L(G)$	Kantengraph	$\Gamma.A$	Restriktion
$N_k$	nicht-orientierbare Fläche	$\Gamma \times A$	Kontraktion
$N(v)$	Nachbarschaft von $v$	$\Delta(G)$	Maximalgrad
$(N; \mathcal{A}),$ $(N; A_1, \dots, A_m)$	Mengensystem	$\alpha(G)$	Unabhängigkeitszahl
$P$	Petersen Graph	$\beta(\mathcal{M})$	Bedeckungszahl
$P_n$	Weg der Länge $n$	$\gamma(G)$	Geschlecht
$\text{PG}_m$	projektiver Raum	$\overline{\gamma}(G)$	nicht-orientierbares Geschlecht
$Q_n$	Würfelgraph	$\delta(G)$	Minimalgrad
$R$	Ländermenge	$\delta f$	Corand
$R(A)$	von $A$ erreichbare Ecken	$\kappa(G)$	Zusammenhangszahl
$R(k, \ell)$	Ramsey Zahl	$\kappa_G(u, v)$	lokale Zusammenhangszahl
$G = (S \cup T, Z)$	bipartiter Graph	$\mu_G(u, v)$	Verbindungszahl
$S_n$	orientierbare Fläche	$\pi(\mathcal{M})$	Packungszahl
$V$	Eckenmenge	$\chi(G), \chi(\mathcal{L})$	chromatische Zahl
$W_n$	Rad	$\chi'(G)$	chromatischer Index
		$\omega(G)$	Clique-Zahl
		$\mathcal{B}$	Basen
$a(G)$	Arborizität	$\mathcal{B}(G)$	Bondmatroid
$b$	Birkhoff Zahl	$\mathcal{J}$	unabhängige Mengen
$c(G)$	Anzahl der Komponenten	$\mathcal{K}$	Kreise
$c_u(G)$	Anzahl der ungeraden Komponenten	$\mathcal{K}_0$	0-Ketten
		$\mathcal{K}_1$	1-Ketten

$\mathcal{M}, \mathcal{M}(S)$	Matroid	$V_q$	Vektorraum aller
$\mathcal{M}^*$	duales Matroid		0,1-Ketten
$\mathcal{M}(\Gamma)$	Matroid einer	$\partial f$	Rand
	Kettengruppe	$\mathcal{C}(G)$	Cozyklengruppe
$\mathcal{M}.A$	Restriktion	$\mathcal{L}; \mathcal{L} = (V, E, R)$	Landkarte
$\mathcal{M} \times A$	Kontraktion	$\mathcal{L}^*$	duale Landkarte
$\mathcal{P}(G)$	Polygonmatroid	$\mathcal{Z}(G)$	Zyklengruppe

# Sachverzeichnis

- 0,1-Matrix, 106
- 0-Kette, 140
- 1-Faktor, 41, 99
- 1-Kette, 140
- 2-Block, 151
  - minimaler, 151
  - tangentialem, 151
- 2-Zellen Einbettung, 67
- 4-Farben Vermutung, 3, 7
  
- abhängige Menge, 135
- Abschluss eines Graphen, 125
- Abstand in einem Graphen, 76
- Anfangsladung, 168
- Arborizität, 115, 140
- Artikulation, 168
- Austauschaxiom, 134
  
- Basis
  - einer Menge, 134
  - eines Matroides, 134
- Baum, 9
- Bedeckungsproblem, 139
- Bedeckungszahl, 139
- Bein, 167
- Beklammerung, 183
- benachbarte
  - Ecken, 4
  - Länder, 7
- Bipartition, 65, 140
- Birkhoff Diamant, 164
- Birkhoff Zahl, 40, 160, 169
- Block
  - einer Kettengruppe, 150
  - eines Graphen, 47
- Block-Graph, 49
- Bond, 61, 136
- Bondmatroid, 137, 140
- Brücke, 8
  
- chromatische Zahl
  - einer Fläche, 21
  - einer Landkarte, 7
  - eines Graphen, 25, 75
- chromatischer Index, 75
  
- chromatisches Polynom, 36, 87
- Clique-Zahl, 83
- Corandoperator, 141
- Cozyklengruppe, 142
- Cozyklenraum, 66, 141
- Cozyklus, 66, 140, 141
  
- Defekt, 102, 103
- Desargues Block, 149
- Diagonale, 106
- Dicke eines Graphen, 73
- disjunkte Wege, 55
- doppelt-stochastische Matrix, 107
- Dualität
  - von Graphen, 25
  - von Landkarten, 24
  
- Ecke, 4
  - große, 165
  - isolierte, 4
  - kleine, 165
- Eckenfärbung, 25
- Endecke, 4
- Endladung, 168
- Entladungsalgorithmus, 168
- erste Nachbarschaft, 177
- Euler Charakteristik, 20
- Euler Formel, 9
- Euler-Poincaré Formel, 20
- Eulerscher Untergraph, 35, 36, 65, 140
- Eulerzug, 33
- Extremalzahl, 128
  
- $f$ -Faktor, 112
- Färbung
  - einer Kettengruppe, 145
  - einer Landkarte, 7
  - eines Graphen, 25, 75
- Fadenproblem, 26
- Faktorisierung, 41
- Fano Block, 152
- Fläche, zweiseitig, 19
- Fundamentallösung, 34
- Fundamentalzyklus, 34

- Gerüst
  - einer Landkarte, 6
  - eines Polytops, 45
- Geschlecht einer Fläche, 19
- Geschlecht eines Graphen
  - nicht-orientierbares, 26, 67
  - orientierbares, 26, 67
- geschlossene Fläche
  - nicht-orientierbare, 19
  - orientierbare, 19
- Goldener Schnitt, 93
- Grad, 8
  - maximaler, 78
  - mimaler, 78
- Gradfolge, 125
- Graph, 4
  - 2-faktorisierbarer, 111
  - bipartiter, 28, 76
  - dualer, 25, 61, 118
  - ebener, 5
  - einbettbarer, 26
  - einfacher, 4
  - Eulerscher, 33
  - fast-Hamiltonscher, 132
  - Hamiltonscher, 43
  - irreduzibler, 159
  - isomorpher, 7
  - kritischer, 84
  - kubischer, 12, 40
  - maximal ebener, 118
  - $n$ -färbbarer, 75
  - $n$ -fach zusammenhängender, 46
  - $n$ -kantenfärbbarer, 75
  - $n$ -kritischer, 84
  - normaler, 180
  - perfekter, 84
  - plättbarer, 5
  - Platonischer, 28
  - polyedrischer, 45, 121
  - $r$ -faktorisierbarer, 41
  - $r$ -regulärer, 40
  - unzusammenhängender, 5
  - vollständig bipartiter, 28, 53, 68
  - vollständiger, 26, 53, 68
  - zusammenhängender, 5
- hängendes 5-Paar, 168
- Hadwiger Vermutung, 85
- Hajós Vermutung, 86
- Hamiltonscher Kreis, 117
- Hamiltonscher Weg, 124
- Heiratssatz, 103
- Ikosaeder Graph, 82
- induzierter Untergraph, 78
- Innere einer Konfiguration, 162
- inzidente
  - Ecken-Kanten, 4
  - Ecken-Länder, 7
  - Kanten, 4
  - Kanten-Länder, 7
- Inzidenzmatrix
  - Ecken-Kanten, 32, 65
  - Kreis-Kanten, 65
  - Länder-Kanten, 32
- Jordansche Kurve, 5
- Jordanscher Kurvensatz, 6
- Kante, 4
  - gerichtete, 69
- Kanten-Zusammenhangszahl, 73
- Kantenfärbung, 13, 75, 80
- Kantengraph, 75
- Kantenmenge, minimale trennende, 61
- Kantenzug, 5
- Kempe-Kette, 11
- Kette, 142
  - elementare, 142
  - orthogonale, 142
- Kettengruppe, 142
  - achromatische, 145
  - chromatische, 145
  - cographische, 145
  - duale, 142
  - graphische, 145
  - irreduzible, 148
  - volle, 148
- Kleinsche Flasche, 24
- Komplement eines Graphen, 84
- Komponente, 5
  - ungerade, 109
- Konfiguration, 12, 162
  - $C$ -reduzierbare, 167
  - $D$ -reduzierbare, 167
  - geographisch gute, 175
  - reduzierbare, 12, 38, 159
- Kontraktion
  - einer Kante, 37, 61
  - einer Kettengruppe, 146
  - eines Graphen, 64, 85, 146
  - eines Matroides, 147
- Koordinatisierungsmatrix, 144
- Kreis
  - eines Graphen, 5
  - eines Matroides, 135
  - Hamiltonscher, 43
  - Länge eines, 5

- trennender, 119, 160
- Kreuzungszahl, 67
- Länge eines Kantenzuges, 5
- Land, 6
  - äußeres, 6
- Landkarte, 6, 7, 20, 67
  - duale, 24
  - irreduzible, 38
  - isomorphe, 7
  - kubische, 12
  - normale, 8
- Lateinisches Quadrat, 108
- Lateinisches Rechteck, 116
- linear unabhängig, 133
- Matching, 99
- Matching-Zahl, 99, 111
- Matroid, 133
  - binäres, 144
  - cographisches, 137
  - duales, 136
  - einer Kettengruppe, 143
  - einfaches, 134
  - graphisches, 134
  - isomorphes, 134
  - lineares, 133
- Medialgraph, 181
- mehrfache Nachbarschaften, 117
- Mehrfachkanten, 4
- Mengensystem, 103
- Minor
  - einer Kettengruppe, 147
  - eines Matroides, 147
- $(m, n)$ -Konfiguration, 176
- $n$ -chromatisch, 7
- $n$ -Ecke, 165
- Obstruktion, 167
- Oktaeder Graph, 82
- Packungsproblem, 139
- Packungszahl, 139
- Perfekte Graphen Vermutung, 84
- Permanente, 106
- Permutationsmatrix, 116
- Petersen Block, 153
- Petersen Graph, 43
- Polygon, 61, 135
- Polygonmatroid, 134, 140
- Polytop, 45
- Potenz eines Graphen, 127
- Prinzip der Inklusion-Exklusion, 89
- Projektiver Raum, 149
- $r$ -Faktor, 41, 99
- Rad, 29
- Ramsey Zahl, 130
- Rand, 35
- Randoperator, 140
- Rang
  - einer Kettengruppe, 142
  - einer Menge, 133
  - eines Matroides, 133
- Reduktor, 167
- Restriktion
  - einer Kante, 37
  - einer Kettengruppe, 145
  - eines Matroides, 146
- Ring, 39
  - Größe eines, 162
- Rotation, 69
- Rotationsschema, 69
- Schlinge
  - eines Graphen, 4
  - eines Matroides, 134
- Schnittecke, 46
- spannender Untergraph, 89
- submodulare Funktion, 137
- Summe von Matroiden, 139
- System verschiedener Repräsentanten, 104
- Tangente, 151
- Tetraeder Graph, 82
- Torus, 18
- Träger
  - einer Kette, 140, 142
  - eines Graphen, 100
- Transversale, 104, 138
  - partielle, 116, 138
- Transversalmatroid, 138
- trennende
  - Eckenmenge, 46, 54
  - Kantenmenge, 61
- Triangulierung, 70, 93
  - einfache, 118
- unabhängige
  - Eckenmenge, 83
  - Menge eines Matroides, 133
- Unabhängigkeitszahl, 83
- unimodale Folge, 91
- Unterteilung
  - einer Kante, 54
  - eines Graphen, 54, 86
- unvermeidbare Menge, 12, 159
- Vektorprodukt, 183
- Verbindungszahl, 55

- W*-Dual, 61  
Würfelgraph, 15  
Wald, 115, 133, 134  
Weg, 5  
Zeichnung eines Graphen, 71
- Zusammenhangszahl, 46  
  lokale, 54  
zweite Nachbarschaft, 177  
Zyklengruppe, 142  
Zyklusraum, 66, 140  
Zyklus, 33, 65, 140