Kapitel 12
Wellengleichungen

Wir analysieren die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \tag{12.1}$$

in beliebiger Raumdimension $n > 1$. Wie im eindimensionalen Fall geben wir uns Anfangsbedingungen für Werte und erste Ableitungen vor, $u(.,0) = u_0$ und $\partial_t u(.,0) = u_1$, vergleiche (2.22). Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei entweder beschränkt oder der Ganzraum, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Wir werden uns intensiv mit dem homogenen Problem (12.1) beschäftigen, eine "rechte Seite" f können wir dann mit der Variation der Konstanten Formel behandeln. Der Faktor c hat die Bedeutung einer Wellengeschwindigkeit, denn $u(x,t) = u_0(x_1 - ct)$ ist eine spezielle Lösung.

12.1 Modellierung und Lösungsformeln

Die Wellengleichung taucht in vielen physikalischen Modellen auf, unter anderem beschreibt sie Schall und Licht. Wasserwellen sind ein eher problematisches Beispiel.

Wellen in elastischen Medien. In einem elastischen Medium werden Auslenkungen durch u und Kräfte durch den Spannungstensor σ beschrieben. Im einfachsten eindimensionalen Fall lautet mit einer Konstanten $A > 0$ das Hooke'sche Gesetz "Kraft $\sim$ Auslenkung" $\sigma = A\partial_x u$, das Newton'sche Gesetz "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" mit der Dichte ρ lautet $\rho \partial_t^2 u = \partial_x \sigma$. Durch Einsetzen erhalten wir die Relation $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ mit $c^2 = A/\rho$, also (12.1). Für die genaue Modellierung verweisen wir auf Kapitel 25 und insbesondere Beispiel 25.1. Dort wird die Geschwindigkeit c für Transversal- und Longitudinalwellen bestimmt.

Druckwellen in einem Gas. Druckwellen in einem Gas müssen anders modelliert werden. Der einfachste Ansatz verwendet die Dichte $\rho(x,t) = \rho_0 + \bar{\rho}(x,t)$ zu einer konstanten Ausgangsdichte ρ_0. Der Druck sei $p(x,t)$ und die Geschwindig-

B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen*, Masterclass,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-56668-8_12

keit sei $v(x,t)$. Die Variablen hängen jeweils von $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ ab. Man verwendet drei Gesetze: Das (linear approximierte) Gasgesetz liefert die Proportionalität $p = p_0 + \lambda\bar{\rho}$ für ein $\lambda > 0$. Die Kräfte sind durch den Druckgradienten ∇p gegeben, daher ist nach dem Newton'schen Gesetz die Beschleunigung gegeben durch $\rho_0 \partial_t v = -\nabla p$, wobei wir als Näherung die Ausgangsdichte anstelle der lokalen Dichte verwenden. Der Erhaltungssatz für die Masse lautet $\partial_t \bar{\rho} + \nabla \cdot v = 0$. Durchdifferenzieren liefert

$$\partial_t^2 \bar{\rho} = -\nabla \cdot \partial_t v = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \nabla p = \frac{\lambda}{\rho_0} \Delta \bar{\rho} \,. \tag{12.2}$$

Wir erhalten (12.1) mit der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{\lambda/\rho_0}$.

Elektromagnetische Wellen. Licht und Radiowellen werden durch die zeitabhängigen Maxwellgleichungen beschrieben, die Unbekannten sind das elektrische Feld $E : \mathbb{R}^3 \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$ und das magnetische Feld $H : \mathbb{R}^3 \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$. Im Vakuum lauten die Gleichungen

$$-\mu_0 \partial_t H = \nabla \times E, \tag{12.3}$$

$$\varepsilon_0 \partial_t E = \nabla \times H, \tag{12.4}$$

wobei $\varepsilon_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ Naturkonstanten sind. Zusätzlich soll $\nabla \cdot E = 0$ und $\nabla \cdot H = 0$ gelten; diese Gleichungen sind allerdings automatisch erfüllt, falls die Felder zum Startzeitpunkt divergenzfrei waren, denn die rechten Seiten der Evolutionsgleichungen sind divergenzfrei.

Wir wenden den Rotationsoperator $\nabla\times$ auf die erste Gleichung an und erhalten wegen $\nabla \times \nabla \times E = -\Delta E + \nabla(\nabla \cdot E) = -\Delta E$ die Gleichung

$$\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 E = \mu_0 \partial_t \nabla \times H = -\nabla \times \nabla \times E = \Delta E \,. \tag{12.5}$$

Das elektrische Feld E wird also durch die Wellengleichung (12.1) beschrieben, wobei $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Helmholtz-Gleichung. Oft ist bei Wellengleichungen ein Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ sinnvoll. Im physikalischen Modell: Wenn man einen geschlossenen Raum mit einer monochromatischen Lampe beleuchtet, so ist nur diese eine Farbe im Raum zu sehen — lediglich die Intensität wird durch Schatten variieren.

Wir machen also den Ansatz einer festen Frequenz und setzen $w(t) = e^{i\omega t}$. Wenn $u(x,t) = v(x)w(t)$ die Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$ löst, so löst v die Helmholtzgleichung[1]

$$\Delta v = -\omega^2 v \text{ in } \Omega. \tag{12.6}$$

Jede Lösung v der Helmholtzgleichung liefert uns eine Lösung $u(x,t) = v(x)e^{i\omega t}$ der Wellengleichung. Wir gehen hier davon aus, dass eine Quelle in der Form einer Randbedingung in (12.6) eine nichttriviale Lösung erzwingt.

[1] H.L.F. von Helmholtz, 1821–1894

In der obigen Form sind zum Beispiel $v(x_1,x_2,x_3) = \sin(\omega x_1)$ planare Lösungen der Helmholtzgleichung, sie entsprechen stehenden Wellen der Wellengleichung. Stehende Wellen in der Form $v(x_1,x_2,x_3) = e^{i\omega x_1}$ mit der zeitlichen Abhängigkeit $e^{i\omega t}$ entsprechen laufenden Wellen.

Wasserwellen. Wasserwellen werden durch ein komplexes System Partieller Differentialgleichungen beschrieben. Das volle Modell beschreibt das zeitabhängige Geschwindigkeitsfeld $v = v(x_1,x_2,x_3,t)$ und Druckfeld $p = p(x_1,x_2,x_3,t)$ des Wassers (im dreidimensionalen Volumen unter der Oberfläche) mit den Navier–Stokes-Gleichungen (siehe Kapitel 24). Die Oberfläche ist ein sogenannter freier Rand, den man oft mit einer Höhenfunktion $h(x_1,x_2,t)$ beschreibt, er muss zusammen mit der Lösung v bestimmt werden. Eine Kopplung zwischen h und (v,p) geschieht über das Druckgleichgewicht am Rand und die kinematische Bedingung: der Rand bewegt sich mit dem Fluid.

Dieses volle Modell beschreibt Wasserwellen sehr gut für Längenbereiche von Millimetern bis Kilometern. Es ist allerdings zu kompliziert für die meisten Berechnungen, daher wird es oft durch vereinfachte Modelle ersetzt. So kann die Strömungsgleichung oft durch die inkompressible Euler-uler Gleichung ersetzt werden (siehe Abschnitt 22.1), oft nimmt man Rotationsfreiheit des Fluids an (“ideales Fluid”), Oberflächenspannung kann oft vernachlässigt werden. Betrachtet man zusätzlich eine Situation mit großen Wellenlängen und geringer Wassertiefe, so kann die Gleichung zu einer sogenannten Flachwassergleichung vereinfacht werden. Die bekannteste Gleichung ist die Korteweg-DeVries Gleichung, in einer Raumdimension

$$\partial_t \phi + \partial_x^3 \phi + 6\,\phi\,\partial_x \phi = 0\,. \tag{12.7}$$

Wir sehen, dass Wasserwellen durch andere Gleichungen als die Standard-Wellengleichung beschrieben werden. Die Korteweg-DeVries Gleichung hat aber ebenfalls Lösungen mit Wellencharakter und wird manchmal auch als eine Wellengleichung bezeichnet.

Explizite Lösungsformeln

Wir hatten bereits in (2.25) die d’Alembert’sche Formel für Lösungen der eindimensionalen Gleichung ($n = 1$) gefunden,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy\,.$$

Wir spezialisieren noch weiter und betrachten den Fall $u_1 \equiv 0$. Dann ist die Lösung $u(x,t)$ immer gegeben durch den Mittelwert der Anfangswerte an den Punkten, die den Abstand t von x haben. Mit dem Mittelwertoperator

$$M[u_0](x,t) := \frac{1}{2}\,[u_0(x+t) + u_0(x-t)] \tag{12.8}$$

ist die Lösung zu $u_1 = 0$ und $f = 0$ gegeben durch $u(x,t) = M[u_0](x,t)$.

Wir gehen im Folgenden konstruktiv vor: Wir studieren zunächst allgemein die Eigenschaften des Mittelwertoperators in höherer Raumdimension, daraus leiten wir anschließend Lösungsformeln ab. Mit der Sphäre $S := \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\dim S = n-1$ und dem Flächenmaß $\omega_n := \mathscr{H}^{n-1}(S)$ setzen wir

$$M[u_0](x,t) := \fint_{tS} u_0(x+\zeta)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \int_S u_0(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\xi)\,. \tag{12.9}$$

Lemma 12.1 (Gleichung für sphärische Mittel). *Sei $n \geq 1$ und $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Funktion. Dann erfüllt die Mittelwertfunktion $w : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$,*

$$w(x,t) := M[v](x,t) \quad \textit{die Gleichung} \quad \partial_t^2 w + \frac{n-1}{t}\partial_t w = \Delta w\,. \tag{12.10}$$

Wie üblich wirkt der Operator Δ in (12.10) nur auf die x-Koordinaten von w. Das Lemma impliziert, dass Mittelwertfunktionen eine Variante einer Wellengleichung erfüllen.

Beweis. Der Fall $n = 1$ kann durch zweifaches Differenzieren überprüft werden, vergleiche (2.25).

In Raumdimension $n > 1$ schreiben wir den Laplace Operator in Kugelkoordinaten mit dem Laplace-Beltrami Operator Δ_S als $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_S$, siehe Lemma 8.17. Wir verwenden Kugelkoordinaten zum Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$, die radiale Koordinate bezeichnen wir mit $t > 0$. Wir können mit der Definition von w für Δw nachrechnen

$$\begin{aligned}
\Delta w(x,t) &= \frac{1}{\omega_n}\int_S \Delta v(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\xi) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_S \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 v(x+t\xi) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} v(x+t\xi) + \frac{1}{t^2}\Delta_S v(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\xi) \\
&= \partial_t^2 w(x,t) + \frac{n-1}{t}\partial_t w(x,t)\,.
\end{aligned}$$

In der dritten Identität haben wir Ableitungen nach t mit Integralen über ξ vertauscht. Zudem haben wir ausgenutzt, dass sphärische Mittelwerte über $\Delta_S v$ verschwinden, was aus der Definition des Laplace-Beltrami Operators folgt, siehe (8.14). □

Lösungsformel in Dimension $n = 3$. In drei Raumdimensionen kann durch einen geschickten Ansatz der Zusatzterm erster Ordnung in der modifizierten Gleichung beseitigt werden. Wir betrachten einfach anstelle der Mittelwerte w deren t-faches. Wegen $n - 1 = 2$ erhalten wir aus (12.10)

$$\begin{aligned}
\partial_t^2[tw(x,t)] - \Delta[tw(x,t)] &= \partial_t[w(x,t) + t\partial_t w(x,t)] - \Delta[tw(x,t)] \\
&= 2\partial_t w(x,t) + t\partial_t^2 w(x,t) - t\Delta w(x,t) = 0\,.
\end{aligned}$$

Für gegebenes v ist also die Funktion $u(x,t) := tw(x,t) = tM[v](x,t)$ tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung.

An diesem Punkt haben wir für ein beliebiges $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung u der homogenen Wellengleichung gefunden. Im nächsten Schritt wollen wir erreichen, dass u die Anfangsbedingungen erfüllt. Für beschränktes v ist die Funktion w als Mittelwertfunktion ebenfalls beschränkt. Die Funktion $u(x,t) = tw(x,t)$ konvergiert daher für $t \to 0$ gleichmäßig gegen 0. Die Funktion u erfüllt also die Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0 = 0$. Für die ersten Ableitungen ergibt sich eine andere Beziehung. Hier berechnen wir zunächst

$$\partial_t w(x,t) = \partial_t \frac{1}{\omega_n} \int_S v(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \xi \cdot \nabla v(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^{n-1}(\xi)\,.$$

Wir erhalten, dass $\partial_t w$ beschränkt ist, falls ∇v stetig ist. Es gilt dann $\partial_t u(x,t) = w(x,t) + t\partial_t w(x,t) \to w(x,0) = v(x)$ für $t \to 0$. Wir haben damit bereits eine Lösung u für das Anfangswertproblem mit $u_0 = 0$ und $u_1 = v$ gefunden,

$$u(x,t) = tM[u_1](x,t) = \fint_S tu_1(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^2(\xi)\,. \tag{12.11}$$

Wir wollen nun noch das Anfangswertproblem mit allgemeinen Daten $u(.,0) = u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und verschwindender Ableitung $\partial_t u(.,0) = u_1 \equiv 0$ lösen. Wir behaupten, dass die Lösung gegeben ist durch

$$u(x,t) := \partial_t \left(tM[u_0]\right)(x,t)\,. \tag{12.12}$$

Es ist offensichtlich, dass diese Funktion eine Lösung der Wellengleichung ist, denn $tM[u_0]$ ist eine Lösung der Wellengleichung von der Klasse $C^3(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, also ist auch die Zeitableitung der Funktion eine klassische Lösung. Für die Anfangswerte gilt wegen der Beschränktheit von $\partial_t M[u_0]$ und $\Delta M[u_0]$, für $t \to 0$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \partial_t \left(tM[u_0]\right)(x,t) = M[u_0](x,t) + t\partial_t M[u_0](x,t) \to u_0(x)\,, \\ \partial_t u(x,t) &= \partial_t^2 \left(tM[u_0]\right)(x,t) = \Delta(tM[u_0])(x,t) \to 0\,. \end{aligned}$$

Durch Addieren der beiden speziellen Lösungen aus (12.11) und (12.12) erhalten wir eine Darstellungsformel für die allgemeine Lösung, die Kirchhoff[2]-Formel.

Theorem 12.2 (Lösungsformel der homogenen Wellengleichung in $\mathbb{R}^3$). *Sei $n = 3$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist eine klassische Lösung $u : \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $\partial_t^2 u = \Delta u$, $u(0) = u_0$ und $\partial_t u(0) = u_1$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \partial_t (tM[u_0])(x,t) + tM[u_1](x,t) \\ &= \fint_S u_0(x+t\xi) + t\xi \cdot \nabla u_0(x+t\xi) + tu_1(x+t\xi)\; d\mathscr{H}^2(\xi)\,. \end{aligned} \tag{12.13}$$

[2] G.R. Kirchhoff, 1824–1887

Lösungsformel in Dimension $n = 2$. Unser Ziel ist nun die Herleitung einer Formel für Lösungen $u(x_1,x_2,t)$ der zweidimensionalen Wellengleichung. Wir wollen dabei die dreidimensionale Formel anwenden; eine Lösung $u = u(x_1,x_2,t)$ in $\mathbb{R}^2$ fassen wir dazu auf als eine spezielle Lösung $\tilde{u} = \tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ in $\mathbb{R}^3$, bei der keine Abhängigkeit der Lösung von der Raumkoordinaten x_3 vorliegt. Die Formel für Lösungen der Wellengleichung in $\mathbb{R}^3$ liefert eine Darstellung von $\tilde{u}$ und damit eine Formel für u. Dieses Verfahren wird als "Absteigemethode" bezeichnet.

Wir setzen diese Idee nun um. Mit

$$\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t) := u(x_1,x_2,t) \quad \text{gilt} \quad \partial_t^2 \tilde{u} = \Delta\tilde{u}\,.$$

Die dreidimensionale Wellengleichung ist erfüllt, weil Ableitungen in die dritte Raumrichtung verschwinden,

$$\Delta\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t) = \Delta u(x_1,x_2,t) = \partial_t^2 u(x_1,x_2,t) = \partial_t^2 \tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t)\,.$$

Die Anfangsbedingungen sind nach der trivialen Fortsetzung in die dritte Raumrichtung ebenfalls die der zweidimensionalen Gleichung,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1,x_2,x_3,0) &= \tilde{u}_0(x_1,x_2,x_3) := u_0(x_1,x_2)\,,\\ \partial_t\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,0) &= \tilde{u}_1(x_1,x_2,x_3) := u_1(x_1,x_2)\,. \end{aligned}$$

Wenn wir die dreidimensionale Lösung $\tilde{u}$ mit der Kirchhoff-Formel ausdrücken, so erhalten wir eine Formel für u.

Bei der Berechnung der sphärischen Mittelwerte über $S := S^2 \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir die Halbsphäre $S^2_+ := \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) | \xi_3 > 0, \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 1\}$ über der zweidimensionalen Kreisscheibe $B := B^2 := \{(\xi_1,\xi_2) | \xi_1^2+\xi_2^2 = 1\}$ parametrisieren. Wir verwenden die Parametrisierung als Graph mit $\Phi : B^2 \to S^2_+$, $\Phi((\xi_1,\xi_2)) = (\xi_1,\xi_2,\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2})$. Das Flächenelement für die Integration wird über die Definitionen aus Abschnitt 3.1 berechnet.

$$D\Phi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-\xi_1}{\sqrt{1-|\xi|^2}} & \frac{-\xi_2}{\sqrt{1-|\xi|^2}} \end{pmatrix}, \qquad \det(D\Phi^T \cdot D\Phi)(\xi) = \frac{1}{1-|\xi|^2}$$

für $\xi = (\xi_1,\xi_2)$. Mit dieser Parametrisierung können wir Integrale über Sphären berechnen. Für eine integrierbare Funktion $\tilde{h} : S^2 \to \mathbb{R}$ gilt, falls $\tilde{h}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = h(\xi_1,\xi_2)$,

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \tilde{h}\, d\mathscr{H}^2 = 2\int_{S^2_+} \tilde{h}\, d\mathscr{H}^2 &= 2\int_{B^2} \tilde{h}\circ\Phi\, \frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= 2\int_{B^2} \frac{h(\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\, d\xi_1\, d\xi_2\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Parametrisierung wollen wir nun die Formel für Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung umformulieren. Wir behandeln wieder zunächst $u_0 = 0$ und eine beliebige Funktion $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann ist die Formel für $\tilde{u}$ durch (12.11) gegeben, und wir rechnen mit $\tilde{h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = h(\xi_1, \xi_2) = u_1(x + t\xi)$

$$\tilde{u}(x,t) = \fint_{S^2} t\tilde{u}_1(x+t\xi)\, d\mathscr{H}^2(\xi) = \frac{1}{4\pi} t \int_{S^2} \tilde{h}\, d\mathscr{H}^2 = \frac{t}{2\pi} \int_{B^2} \frac{u_1(x+t\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \, .$$

Wir erhalten also wieder die Lösung in (x,t) über einen Mittelwert der Anfangswerte — allerdings gehen im zweidimensionalen (im Gegensatz zum dreidimensionalen) nicht nur die Anfangswerte auf der Sphäre ein, sondern die Anfangswerte auf der vollen Kugel.

Dieselbe Rechnung kann für den u_0-Anteil der Lösung durchgeführt werden. Die Formel für allgemeine Anfangswerte u_0 und u_1 wird Poisson-Formel genannt. Im nachfolgenden Satz schreiben wir die Formel mit Mittelwerten.

Theorem 12.3 (Lösungsformel der homogenen Wellengleichung in $\mathbb{R}^2$). *Sei $n = 2$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann ist eine klassische Lösung $u : \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $\partial_t^2 u = \Delta u$, $u(0) = u_0$ und $\partial_t u(0) = u_1$ gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} u_1(y)\, dy + \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t^2 \nabla u_0(y) \cdot y}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\, dy \, . \tag{12.14}$$

Die inhomogene Gleichung

Mit dem letzten Abschnitt haben wir für die homogene Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ im Ganzraum $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ eine Lösungsformel für glatte Anfangsdaten u_0 und u_1 angegeben. Die Formeln (12.13) und (12.14) definieren einen Lösungsoperator zur homogenen Gleichung.

Wir wollen nun die *inhomogene* Gleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ betrachten. Wie im eindimensionalen Fall (Kapitel 2) erwarten wir: $f(.,t_0)$ ist ein Beschleunigungsbeitrag und bewirkt eine Änderung der Lösung der homogenen Gleichung. Die Änderung ist gegeben durch die Lösung einer homogenen Gleichung auf (t_0, T) mit Startwerten $u_0(t_0) = 0$ und $u_1(t_0) = f(t_0)$. Integration aller Beiträge liefert die Lösung der inhomogenen Gleichung.

Um diese Idee zu formalisieren, formulieren wir die Gleichung in einem abstrakten Rahmen. Die Variation der Konstanten Formel (9.21) aus der Halbgruppenbeschreibung wird das skizzierte Bild bestätigen.

Um die Wellengleichung als Gleichung erster Ordnung in t zu schreiben, fassen wir den Vektor $(u(t), \partial_t u(t))$ als Lösung zur Zeit t auf. Im Vorgriff auf die spätere Analyse verwenden wir hier die Buchstaben V und H für geeignete Banachräume und suchen $(u(t), \partial_t u(t)) \in X := V \times H$. Eine rigorose Analyse (mit Angabe der

Banachräume) werden wir nur für beschränkte Gebiete durchführen, für das Ganzraumproblem führen wir nur eine formale Rechnung durch. Wir definieren den Operator

$$A : X = V \times H \to H \times V', \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w \\ \Delta u \end{pmatrix}.$$

Mit diesem Operator und den neuen Variablen $x(t) := (u(t), w(t))$ und $F(t) = (0, f(t))$ kann die Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ kodiert werden als

$$\partial_t x = Ax + F.$$

Tatsächlich ist die erste Zeile dieses Systems äquivalent zu $\partial_t u = w$, die zweite Zeile ist $\partial_t w = \Delta u + f$ und beschreibt daher die inhomogene Wellengleichung für u. Für die homogene Wellengleichung $\partial_t x = Ax$ haben wir explizite Formeln gefunden, also Darstellungen der Zeit-t-Abbildung $S(t) = e^{At} : (u_0, u_1) \mapsto (u(t), \partial_t u(t))$. Die Variation der Konstanten Formel (9.21) liefert dann für die Lösung x der inhomogenen Gleichung mit $x(0) = (u_0, u_1)$ die Formel

$$x(t) = S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds. \tag{12.15}$$

Da mit den Lösungsformeln der homogenen Gleichung der Operator $S(.)$ explizit gegeben ist, ist mit (12.15) auch eine explizite Formel für das inhomogene Problem gefunden.

12.2 Existenz mit einem Galerkinverfahren

Wir wollen hier für elliptische Differentialoperatoren L die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u + Lu = f \tag{12.16}$$

betrachten. Dabei können die Operatoren L elliptische Operatoren zweiter Ordnung wie in Abschnitt 6.2 sein, der Spezialfall $L = -\Delta$ ist der Fall der klassischen Wellengleichung. Andere interessante Gleichungen sind gegeben durch elliptische Operatoren vierter Ordnung, also zum Beispiel $L = \Delta^2$. Da wir die Ordnung nicht spezifizieren wollen, wählen wir einen abstrakten Zugang und leiten ein Existenzresultat in Banachräumen her. Eine natürliche Wahl für $L = -\Delta$ auf einem beschränkten Gebiet Ω mit homogenen Dirichlet-Randwerten ist $V := H_0^1(\Omega)$ und $H := L^2(\Omega)$.

Wir betrachten ein Gelfand-Tripel (V, H, V') ohne Kompaktheit (vergleiche (10.20)): Einen Hilbertraum H, einen Banachraum $V \hookrightarrow H$ mit stetiger und dichter Einbettung, der Raum V sei separabel und reflexiv. Die Normen seien $\|.\|_H$ und $\|.\|_V$. Der Dualraum V' aller Linearformen auf V enthält die Formen auf H, also $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ mit der natürlichen Identifikation (vergleiche die Kommentare zu (10.20) und Übung 4.3 zur Dichtheit). Ein Operator $L : V \to V'$ sei gegeben mit einer koerziven stetigen und symmetrischen Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ als $\langle Lu \rangle (v) = a(u,v)$.

Theorem 12.4 (Existenz für die abstrakte Wellengleichung). *Die obigen Voraussetzungen an die Räume $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ und an die Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ seien erfüllt. Gegeben sei $T \in (0,\infty]$, Anfangswerte $u_0 \in V$, $u_1 \in H$, und eine rechte Seite $f \in L^1(0,T;H)$. Dann existiert eine schwache Lösung $u : [0,T] \to V$ der Wellengleichung* (12.16).

Genauer gilt: Es existiert eine Funktion $u \in L^\infty(0,T;V)$ mit $\partial_t u \in L^\infty(0,T;H)$, so dass $u(0) = u_0$ im Spursinn erfüllt ist und für jedes $\varphi \in C^1_c([0,T),V)$ gilt

$$\int_0^T \{-\langle \partial_t u(t), \partial_t \varphi(t)\rangle_H + a(u(t),\varphi(t))\}\, dt = \int_0^T \langle f(t),\varphi(t)\rangle_H\, dt + \langle u_1, \varphi(0)\rangle_H\,. \tag{12.17}$$

Beweis. Wir verwenden ein Galerkin-Verfahren. Da V separabel ist, existieren endlichdimensionale Unterräume $V_K := \operatorname{span}\{w_1,\dots,w_K\} \subset V$, so dass zu jedem Vektor $v \in V$ eine Folge von Vektoren $v_K \in V_K$ existiert mit $v_K \to v$ in V für $K \to \infty$. Mit der Basis schreiben wir $v_K = \sum_{k=1}^K v^k w_k$ mit Koeffizienten $v^k \in \mathbb{R}$.

Schritt 1: Approximative Gleichung. Wir lösen zunächst die Projektion der Gleichung auf den Raum V_K. Die Unbekannte ist

$$u_K : [0,T] \to V_K, \quad u_K(t) = \sum_{k=1}^K v^k(t) w_k \in V_K\,.$$

Für u_K fordern wir die Ausgangsgleichung, allerdings nur für Testfunktionen aus V_K. Wir betrachten sogar nur zeitunabhängige Testfunktionen, nämlich die Basisvektoren w_l. Für beliebiges $l \le K$ gelte also

$$\left\langle \partial_t^2 u_K(t), w_l \right\rangle_H + a(u_K(t), w_l) = \langle f(t), w_l\rangle_H \tag{12.18}$$

für alle $t \in (0,T)$, dazu die Anfangsbedingungen $\langle u_K(0), w_l\rangle_H = \langle u_0, w_l\rangle_H$ und $\langle \partial_t u_K(0), w_l\rangle_H = \langle u_1, w_l\rangle_H$. Die Gleichung (12.18) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Lipschitz-stetiger rechten Seite. Dies wollen wir zunächst einsehen. Wir schreiben $u_K(t) = \sum_{k=1}^K v^k(t) w_k$ und definieren die Massenmatrix $M \in \mathbb{R}^{K\times K}$ durch $M_{kl} := \langle w_k, w_l\rangle_H$. Zusätzlich definieren wir die sogenannte *Steifigkeitsmatrix* durch $A_{kl} := a(w_k, w_l)$. Die Gleichung (12.18) schreibt sich dann

$$\begin{aligned}
&\langle f(t), w_l\rangle_H = \left\langle \partial_t^2 u_K(t), w_l \right\rangle_H + a(u_K(t), w_l)\\
&= \sum_{k=1}^K \partial_t^2 v^k(t)\,\langle w_k, w_l\rangle_H + \sum_{k=1}^K v^k(t) a(w_k, w_l) = \sum_{k=1}^K M_{kl}\partial_t^2 v^k(t) + \sum_{k=1}^K A_{kl} v^k(t)\,.
\end{aligned}$$

Die Matrix M ist wegen der Koerzivität des Skalarproduktes positiv, insbesondere invertierbar (formal kann man den Satz von Lax-Milgram im Endlichdimensionalen verwenden). Demnach ist (12.18) eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung für den Vektor $(v^1(t),...,v^K(t))$. Zusammen mit der Anfangsbedingung finden wir eine eindeutige Lösung u_K auf dem Intervall $[0,T]$, wobei die Linearität der Gleichung die globale Existenz der Lösung impliziert. Ein technisches Detail: Da der Ausdruck $\langle f(t), w_l \rangle_H$ nicht stetig in t ist, kann der klassische Satz von Picard-Lindelöf nicht angewendet werden; wir verwenden stattdessen einen allgemeineren Existenzsatz für inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen, ähnlich zu Übung 10.1. Alternativ kann auch f durch Funktionen f_K approximiert werden.

Schritt 2: A priori Abschätzungen. Wir testen nun die approximative Wellengleichung mit $\partial_t u_K(t)$. Formal ist es genauer, zu sagen: wir multiplizieren (12.18) mit $\partial_t v^l(t)$, summieren über $l \le K$ und integrieren anschließend über $(0,t_1)$ für ein beliebiges $t_1 \in (0,T)$. Wir erhalten

$$\int_0^{t_1} \left\langle \partial_t^2 u_K(t), \partial_t u_K(t) \right\rangle_H + \int_0^{t_1} a(u_K(t), \partial_t u_K(t)) = \int_0^{t_1} \langle f(t), \partial_t u_K(t) \rangle_H \,.$$

Der erste Integrand ist die Zeitableitung der kinetischen Energie. Da wir die Bilinearform a als t-unabhängig angenommen haben, hat auch der zweite Integrand eine Stammfunktion; wir erhalten die Energiegleichung

$$\left\{ \frac{1}{2} \|\partial_t u_K(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} a(u_K(t), u_K(t)) \right\} \Bigg|_{t=0}^{t_1} = \int_0^{t_1} \langle f(t), \partial_t u_K(t) \rangle_H \,.$$

Die Werte im Zeitpunkt $t = 0$ sind durch die Anfangsdaten gegeben und wir können aus der Energiegleichung eine K-unabhängige Abschätzung für u_K erhalten. Für $v \in V$ setzen wir zur Abkürzung $\|v\|_a^2 := a(v,v)$. Wegen der Koerzivität von a gilt $a(v,v) \ge \alpha \|v\|_V^2$ für ein $\alpha > 0$, und daher (wegen Stetigkeit von a) die Normäquivalenz $\alpha \|v\|_V^2 \le \|v\|_a^2 \le C \|v\|_V^2$. Wir erhalten

$$\|\partial_t u_K(t_1)\|_H^2 + \|u_K(t_1)\|_a^2 = 2 \int_0^{t_1} \langle f(t), \partial_t u_K(t) \rangle_H + \|u_1\|_H^2 + \|u_0\|_a^2 . \tag{12.19}$$

Für $f \in L^1(0,T;H)$ können wir das Zeitintegral abschätzen durch

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \langle f(t), \partial_t u_K(t) \rangle_H \, dt &\le \int_0^{t_1} \|f(t)\|_H \|\partial_t u_K(t)\|_H \, dt \\ &\le \|f(t)\|_{L^1(0,T;H)} \|\partial_t u_K(t)\|_{L^\infty(0,T;H)} \,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung lediglich ein Herausziehen des Supremums bedeutet, die Funktion u_K ist stetig in t. Wir wenden nun die ε-Ungleichung an, setzen in (12.19) ein, bilden das Supremum über $t_1 \in [0,T]$, und absorbieren den Term $\varepsilon \|\partial_t u_K(t)\|_{L^\infty(0,T;H)}^2$ in die linke Seite. Wir erhalten eine gleichmäßige Abschätzung für

$$u_K \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;H) . \tag{12.20}$$

In diesen Räumen können wir eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge auswählen, $u_K \overset{*}{\rightharpoonup} u$, zudem $u_K \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;H)$.

Schritt 3: Grenzübergang $K \to \infty$. Anstelle einer beliebigen Testfunktion $\varphi \in C_c^1([0,T),V)$ betrachten wir zunächst Testfunktionen der speziellen Form $\varphi(t) = \psi(t)w_k$ mit $\psi \in C_c^1([0,T),\mathbb{R})$. Die definierende Gleichung für u_K ist (12.18), wir multiplizieren mit $\psi(t)$ und integrieren über t,

$$\int_0^T \left\langle \partial_t^2 u_K(t), \varphi(t) \right\rangle_H dt + \int_0^T a(u_K(t), \varphi(t))\, dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle_H \, dt\,.$$

Den ersten Term integrieren wir partiell und schreiben

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \langle \partial_t u_K(t), \partial_t \varphi(t) \rangle_H \, dt + \int_0^T a(u_K(t), \varphi(t))\, dt \\
= \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle_H \, dt + \langle u_1, \varphi(0) \rangle_H \,.
\end{aligned}$$

Wegen der schwachen Konvergenz $\partial_t u_K \rightharpoonup \partial_t u$ in $L^2(0,T;H)$ und $u_K \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ können wir den Grenzübergang $K \to \infty$ durchführen und erhalten (12.17) für die spezielle Testfunktion $\varphi(t) = \psi(t)w_k$.

Wir wollen nun Gleichung (12.17) für eine beliebige Funktion $\tilde{\varphi} \in C_c^1([0,T),V)$ erhalten; dazu müssen wir die Dichtheit der einfachen Funktionen ausnutzen. Wir setzen $\tilde{\eta} := \partial_t \tilde{\varphi} \in L^2(0,T;V)$ und approximieren $\tilde{\eta}$ in diesem Raum mit stückweise konstanten Funktionen $\tilde{\eta}_\varepsilon$ mit endlich vielen Werten (Fehler höchstens ε). Die Funktion $\tilde{\eta}_\varepsilon$ können wir mit $\tilde{\eta}_\varepsilon^K : [0,T] \to V_K$ approximieren mit $\|\tilde{\eta}_\varepsilon^K - \tilde{\eta}\|_{L^2(0,T;V)} \leq 2\varepsilon$ für $K \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Die Gleichung (12.17) gilt wegen Linearität für die Testfunktion $\tilde{\varphi}_\varepsilon^K(t) := -\int_t^T \tilde{\eta}_\varepsilon^K(s)\, ds$ mit endlich vielen Werten. Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (12.17) für die Testfunktion $\tilde{\varphi}$.

Die Relation $u(0) = u_0$ folgt aus dem Spursatz im Bochnerraum. □

Energiegleichung und Stetigkeit

Die natürlichen Funktionenräume für die Wellengleichung sind (Testen mit $\partial_t u$)

$$u \in L^\infty(0,T;V), \quad \partial_t u \in L^\infty(0,T;H), \quad \partial_t^2 u \in L^\infty(0,T;V').$$

Wir wollen zum Vergleich an Lösungen u_W der Wärmeleitungsgleichung denken. Dort waren die natürlichen Funktionenräume (Testen mit u_W)

$$u_W \in L^2(0,T;V), \quad u_W \in L^\infty(0,T;H), \quad \partial_t u_W \in L^2(0,T;V').$$

Wir hatten dann allerdings mit Hilfe von Theorem 10.9 gefolgert, dass die Abbildung $u_W : [0,T] \to H$ sogar stetig ist. Der Schritt von L^∞ zu C^0 konnte also aufgrund der Information $\partial_t u_W \in L^2(0,T;V')$ gemacht werden. Ein ähnliches Stetigkeitsresultat wollen wir nun für die Situation der Wellengleichung ableiten.

Ein zweites Thema ist die Energiegleichung. Für die Lösung u der Wellengleichung erwarten wir eine Energieerhaltung wie in (12.19), was sich formal durch Testen der Gleichung mit $\partial_t u$ erhalten läßt. Allerdings ist schon die Formulierung der Energiegleichung aufgrund der punktweisen Aussage (in t) mit der Stetigkeitseigenschaft verbunden.

Theorem 12.5 (Stetigkeit bei Gleichung zweiter Ordnung). *Die Räume $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, die Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ und der Operator $L : V \to V'$ seien wie in Theorem 12.4. Für $T > 0$ gelte*

$$u \in L^2(0,T;V), \quad \partial_t u \in L^2(0,T;H), \quad \partial_t^2 u + Lu = f \in L^2(0,T;H).$$

Dann gilt nach Abänderung von u auf einer Nullmenge $N \subset [0,T]$ die Stetigkeit

$$u \in C^0((0,T),V), \quad \partial_t u \in C^0((0,T),H). \tag{12.21}$$

Dieser Repräsentant erfüllt die Energiegleichung: Für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ gilt

$$\frac{1}{2}\left\{\|\partial_t u\|_H^2 + a(u,u)\right\}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(s), \partial_t u(s)\rangle \, ds. \tag{12.22}$$

Beweis. Zur gegebenen Funktion u bilden wir die zusammengesetzte Funktion $x : [0,T] \to X := V \times H$, $x(t) := (u(t), \partial_t u(t)) \in L^2(0,T;X)$. Der Raum $X := V \times H$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle (u,w),(\varphi,\psi)\rangle_X := a(u,\varphi) + \langle w,\psi\rangle_H$. Wir glätten die Funktion x mit einer Dirac-Folge $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$ und $\langle \eta_\varepsilon\rangle \to \delta_0$ im Distributionssinn für $\varepsilon \to 0$:

$$x_\varepsilon(t) := (x * \eta_\varepsilon)(t) := \int_{\mathbb{R}} x(s)\eta_\varepsilon(t-s)\, ds.$$

Wir betrachten hier nur innere Punkte $t \in (0,T)$, so dass für kleines $\varepsilon > 0$ die Integranden überall wohldefiniert sind. Da Ableitung und Faltung vertauschen, gilt die Regel $(\partial_t u) * \eta_\varepsilon = \partial_t (u * \eta_\varepsilon)$, es gilt also für die Komponenten $x_\varepsilon(t) = (u_\varepsilon(t), w_\varepsilon(t))$ wieder die Relation $w_\varepsilon = \partial_t u_\varepsilon$. Zudem gilt wegen der x-Unabhängigkeit von L die Relation $\partial_t^2 u_\varepsilon = (\partial_t^2 u)_\varepsilon = (f - Lu)_\varepsilon = f_\varepsilon - Lu_\varepsilon$, die Funktion u_ε löst also ebenfalls die Wellengleichung.

Schritt 1: Gleichmäßige Konvergenz. Wir gehen wie im Beweis von Theorem 10.9 vor: Wir zeigen die gleichmäßige Konvergenz $x_\varepsilon \to x$, also $\|x_\varepsilon - x\|_{L^\infty(0,T;V\times H)} \to 0$. Da die Funktionen $x_\varepsilon : (\varepsilon, T-\varepsilon) \to V \times H$ stetig sind, impliziert dies die Stetigkeitsaussagen (12.21).

Zunächst wählen wir einen Punkt $t_0 \in (0,T)$ mit der starken Konvergenz $x_\varepsilon(t_0) \to x(t_0)$ für $\varepsilon \to 0$; dies ist wegen der starken Konvergenz $x_\varepsilon \to x$ in $L^2(0,T;X)$ möglich. Nun betrachten wir zwei verschiedene Glättungsindizes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Für einen beliebigen Punkt $t \in (0,T)$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\|x_{\varepsilon_1}(t) - x_{\varepsilon_2}(t)\|_X^2 - \|x_{\varepsilon_1}(t_0) - x_{\varepsilon_2}(t_0)\|_X^2 \\
&\quad = 2\int_{t_0}^t \langle x_{\varepsilon_1}(s) - x_{\varepsilon_2}(s), \partial_t x_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t x_{\varepsilon_2}(s)\rangle_X \, ds \\
&\quad = 2\int_{t_0}^t a(u_{\varepsilon_1}(s) - u_{\varepsilon_2}(s), \partial_t u_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t u_{\varepsilon_2}(s)) \, ds \\
&\qquad + 2\int_{t_0}^t \langle \partial_t u_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t u_{\varepsilon_2}(s), \partial_t^2 u_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t^2 u_{\varepsilon_2}(s)\rangle_H \, ds \\
&\quad = 2\int_{t_0}^t \langle f_{\varepsilon_1}(s) - f_{\varepsilon_2}(s), \partial_t u_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t u_{\varepsilon_2}(s)\rangle_H \, ds \to 0
\end{aligned}
$$

für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Da die Konvergenz gleichmäßig ist (die Kleinheit der rechten Seite hängt nicht von t ab), ist die Grenzfunktion $x : (0,T) \to X$ stetig und (12.21) ist gezeigt.

Schritt 2: Energiegleichung. Dieselbe Rechnung liefert auch die Energiegleichung. Wir ersetzen t_0 durch t_1, t durch t_2, ε_1 durch ε und x_{ε_2} durch 0:

$$
\|x_\varepsilon(t_2)\|_X^2 - \|x_\varepsilon(t_1)\|_X^2 = 2\int_{t_0}^t \langle f_\varepsilon(s), \partial_t u_\varepsilon(s)\rangle_H \, ds\,.
$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ finden wir genau die Energiegleichung (12.22). □

Wir erhalten die folgende Erweiterung von Satz 12.4.

Korollar 12.6 (Eindeutigkeit und Energieerhaltung). *Die Voraussetzungen an $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, $L : V \to V'$, $u_0 \in V$ und $u_1 \in H$ seien wie in Satz 12.4, für $T \in (0,\infty)$ habe die rechte Seite die zusätzliche Regularität $f \in L^2(0,T;H)$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung der inhomogenen Wellengleichung* (12.16) *$u : [0,T] \to V$ mit der Regularität $u \in L^2(0,T;V)$ und $\partial_t u \in L^2(0,T;H)$.*

Die Lösung hat die Stetigkeitseigenschaften $u \in C^0([0,T],V)$ und $\partial_t u \in C^0([0,T],H)$ und es gilt die Energiegleichheit (12.22) *für $0 \le t_1 < t_2 \le T$.*

Beweis. Die Existenz einer schwachen Lösung $u : [0,T] \to V$ wurde in Satz 12.4 gezeigt. Wir stellen fest, dass wir durch Fortsetzung der Funktion f auf ein größeres Intervall $(-\delta, T+\delta)$ sogar eine Lösung $u : (-\delta,\delta] \to V$ finden können. Tatsächlich kann die Wellengleichung auch rückwärts gelöst werden, man muss lediglich mit einer Funktion $\tilde{u}$ zu den Startwerten u_0 und $-u_1$ vorwärts lösen, und $u(-t) := \tilde{u}(t)$ für $t > 0$ setzen. Das Zusammensetzen von Lösungen geschieht wie in Proposition 11.10.

Theorem 12.5 ist anwendbar und liefert die Stetigkeitseigenschaften und die Energiegleichung. Da wir die Zeitpunkte $t = 0$ und $t = T$ zu inneren Punkten des Intervalls gemacht haben, gilt die Stetigkeit und die Energiegleichung auch in diesen Punkten.

Zur Eindeutigkeit: die Differenz $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ zweier schwacher Lösungen ist eine schwache Lösung zu den Anfangswerten 0 und zur rechten Seite $f = 0$. Aufgrund der Regularität aller schwachen Lösungen erfüllt u die Stetigkeitsbedingungen und die Energiegleichung. Die Energie von u in $t = 0$ verschwindet, daher verschwindet die Energie für alle Zeiten und wir schließen $u = 0$, also $u^{(1)} = u^{(2)}$. □

Bemerkungen. 1. Aufgrund der Energieerhaltung sind für die Wellengleichung $L^\infty(0,T;V)$ und $L^\infty(0,T;H)$ die natürlichen Räume (und *nicht* die entsprechenden $L^2((0,T))$-Räume).

2. In Korollar 12.6 haben wir keine *maximale Regularität* erhalten: Wir benötigen mehr Regularität an f, als wir für die Terme $\partial_t^2 u$ und Lu erhalten. Als Einstieg in weiterführende Literatur zu Wellengleichungen empfehlen wir [76].

Übungen

Übung 12.1 (Der Klang einer Trommel) *Die Auslenkung der Membran über $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei beschrieben durch*

$$u : \Omega \times (0,\infty) \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}\,.$$

Bei einem Dämpfungsfaktor $b > 0$ lautet die gedämpfte Wellengleichung für u

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = -2b\,\partial_t u \quad \text{ in } \Omega \times (0,\infty)\,,$$

mit der Dirichlet-Bedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,\infty)$ und den Anfangsbedingungen $u(.,0) = u_0$ und $\partial_t u(.,0) = u_1$ auf Ω. Geben Sie formal die allgemeine Lösung mit Hilfe der Eigenfunktionen von $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ an. Welche Mischung aus Frequenzen hört man nach langer Zeit?

Übung 12.2 (Eine Wellengleichung höherer Ordnung) *Verwenden Sie Theorem 12.4, um für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T > 0$ eine Lösung der instationären Plattengleichung*

$$\partial_t^2 u = -\Delta^2 u \tag{12.23}$$

auf $\Omega \times (0,T)$ zu finden mit $u(t) \in H_0^2(\Omega)$ und allgemeinen Anfangsbedingungen. Der Funktionenraum für $u(t)$ ist wie in Übung 6.7.

Übung 12.3 (Schrödinger-Gleichung) *Die Schrödinger-Gleichung lautet, für normierte physikalische Parameter und ein Potential $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V = V(x)$,*

$$i\partial_t u = \Delta u + V \cdot u\,. \tag{12.24}$$

Stellen Sie für Lösungen der Form $u(x,t) = U(x)e^{i\omega t}$ fest, dass U eine Helmholtz-artige Gleichung löst. Schreiben Sie in (12.24) die Gleichungen für Realteil und Imaginärteil getrennt und stellen Sie eine Beziehung zu einer Plattengleichung her.