

UNITEXT – La Matematica per il 3+2

Volume 114

Editor-in-Chief

A. Quarteroni

Series Editors

L. Ambrosio

P. Biscari

C. Ciliberto

C. De Lellis

V. Panaretos

W.J. Runggaldier

www.springer.com/series/5418

Sandra Forte • Luigi Preziosi • Maurizio Vianello

Meccanica dei Continui

 Springer

Sandra Forte
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano
Milano, Italia

Maurizio Vianello
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano
Milano, Italia

Luigi Preziosi
Dipartimento di Scienze Matematiche
Politecnico di Torino
Torino, Italia

ISSN versione cartacea: 2038-5722
UNITEXT – La Matematica per il 3+2
ISBN 978-88-470-3984-1
<https://doi.org/10.1007/978-88-470-3985-8>

ISSN versione elettronica: 2038-5757
ISBN 978-88-470-3985-8 (eBook)

© Springer-Verlag Italia S.r.l., part of Springer Nature 2019

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org.

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Questa edizione è pubblicata da Springer-Verlag Italia S.r.l., part of Springer Nature, con sede legale in Via Decembrio 28, 20137 Milano, Italia

Prefazione

La finalità di questo testo è quella di presentare i concetti base della Meccanica dei Continui a studenti che frequentano sia corsi di laurea che corsi di dottorato in Matematica, Fisica e Ingegneria. Abbiamo cercato di raggiungere questo obiettivo da una parte limitando per quanto possibile i prerequisiti culturali necessari per la comprensione della materia e dall'altra mantenendo un linguaggio sì rigoroso, ma anche semplice e colloquiale. Riteniamo infatti che in questo modo il testo sia adatto anche agli studenti che per la prima volta si interessano all'argomento e che non hanno conoscenze pregresse particolari.

Pur mantenendo la tradizionale e, a nostro parere, irrinunciabile struttura ipotetico-deduttiva nello svolgimento delle argomentazioni, abbiamo sempre tenuto presente le applicazioni che gli studenti potrebbero incontrare in altri insegnamenti, anche nell'ottica di stimolare parallelismi e sinergie didattiche favorite dalla presenza di corsi integrati.

Il testo può essere considerato diviso in tre parti. Nella prima parte costituita dai primi due capitoli si tratta la cinematica dei continui distinguendo gli aspetti legati alla deformazione dei corpi continui da quelli legati alla loro evoluzione temporale. Nei successivi due capitoli si affrontano la determinazione delle equazioni di bilancio e si forniscono i concetti basilari sulle classi costitutive dei materiali che vengono poi sviluppati nella terza parte, dove si affronta il problema di come descrivere il comportamento dei solidi elastici, incluse le semplificazioni che si possono ottenere in regime di piccole deformazioni, e dei fluidi. Un'appendice corposa fornisce tutti gli strumenti analitici e di algebra vettoriale e tensoriale necessari per lo sviluppo degli argomenti, in modo che il testo risulti quasi autosufficiente.

Tutti i capitoli, soprattutto della prima e della terza parte, presentano un robusto numero di esercizi, tutti svolti, sia di carattere teorico che applicativo. Infatti, pensiamo che la meccanica dei continui sia un arco che abbia un piedritto nella teoria e un altro nelle applicazioni pratiche, per cui facendo costantemente riferimento agli esercizi durante la trattazione degli aspetti teorici lo studente può acquisire la manualità necessaria sia per la dimostrazione di passaggi teorici che per la risoluzione dei problemi applicativi.

Non pensiamo, nel nostro sforzo, di essere stati particolarmente innovativi rispetto ai “testi sacri” della Meccanica dei Continui, ma di aver semplicemente seguito il germe seminato dai molti studiosi dai quali abbiamo imparato, e che per noi sono stati sia maestri che collaboratori.

Milano e Torino, Italia
luglio 2018

Sandra Forte
Luigi Preziosi
Maurizio Vianello

Indice

1	Corpi e deformazioni	1
1.1	Gradiente di deformazione e gradiente di spostamento	3
1.1.1	Il gradiente di spostamento	6
1.2	Deformazioni omogenee	7
1.2.1	Traslazioni	7
1.2.2	Deformazioni omogenee con un punto fisso	8
1.2.3	Rototraslazioni e rotazioni	9
1.2.4	Deformazioni pure	9
1.3	Tensori di Cauchy-Green	12
1.3.1	Stiramenti e deformazioni longitudinali	14
1.3.2	Angoli di scorrimento	16
1.3.3	Stiramenti e direzioni principali	17
1.3.4	Il tensore di Green-Saint Venant	19
1.4	Il tensore di Finger	19
1.4.1	Il tensore di Almansi	22
1.5	Variazione di volume e deformazioni isocore	23
1.5.1	Integrali di volume su \mathcal{B} e \mathcal{B}_*	24
1.6	Variazione d'area e formula di Nanson	25
1.6.1	La trasformazione di Piola	28
1.6.2	La trasformazione di Piola per campi tensoriali	31
1.7	Deformazioni infinitesime	32
1.7.1	Il tensore di deformazione	33
1.7.2	Deformazioni finite e infinitesime	34
1.7.3	Stiramenti	34
1.7.4	Angoli di scorrimento	36
1.7.5	Variazione di volume	36
1.7.6	Considerazioni conclusive e riassuntive	37
1.8	Esercizi e complementi	38

2	Moti	63
2.1	Velocità e accelerazione	64
2.2	Campi spaziali e campi materiali	65
2.3	Cambiamento di descrizione	66
2.3.1	Gradiente spaziale e gradiente materiale	66
2.3.2	Gradienti spaziali e materiali di velocità e accelerazione	67
2.3.3	Derivate temporali parziali e totali	68
2.4	Linee di corrente, linee di flusso e linee di fumo	70
2.4.1	Linee di corrente	70
2.4.2	Linee di flusso	71
2.4.3	Linee di fumo	72
2.4.4	Campi e moti stazionari	73
2.5	Curve e superfici materiali	74
2.6	Velocità di propagazione e di avanzamento di una superficie	75
2.7	Moto rigido e velocità angolare	79
2.8	Velocità di deformazione e tensore di vorticità	81
2.9	Tensore di vorticità, rotore della velocità e vorticità	82
2.10	Proprietà del tensore velocità di deformazione	83
2.10.1	Velocità di stiramento	84
2.10.2	Velocità di scorrimento	86
2.11	Il campo spaziale dell'accelerazione	88
2.12	Velocità di variazione del volume e moti isocori	88
2.13	Integrale di volume di un campo spaziale	89
2.14	Campi vettoriali con linee integrali materiali	93
2.14.1	Linee di corrente materiali	96
2.15	Derivate di integrali di linea e di flussi	96
2.15.1	Integrali di linea	97
2.15.2	Circuitazione della velocità	98
2.15.3	Derivata temporale di un flusso	99
2.15.4	Equazione di evoluzione della vorticità e linee vorticide	100
2.15.5	Una deduzione dell'equazione di evoluzione della vorticità	101
2.16	Superfici e tubi vorticosi	102
2.17	La condizione di D'Alembert-Eulero e i moti potenziali	103
2.18	Esercizi e complementi	104
3	Leggi di bilancio, sforzi e disuguaglianza entropica	133
3.1	Massa e densità	133
3.1.1	La derivata temporale di un integrale rispetto alla massa	135
3.2	Forze esterne di volume e di superficie	136
3.2.1	Forze di volume	136
3.2.2	Forze di contatto	137
3.3	Interazioni fra le parti e ipotesi di Cauchy	138
3.4	Teoremi di Cauchy per campi scalari e vettoriali	142
3.5	Equazioni di bilancio meccanico	148
3.5.1	Bilancio della quantità di moto e tensore di Cauchy	149

3.5.2	Bilancio del momento delle quantità di moto	150
3.5.3	Le equazioni indefinite di moto	152
3.5.4	Condizioni al contorno	153
3.6	Il tensore degli sforzi e le sue proprietà	153
3.6.1	Sforzo normale e sforzo di taglio	155
3.6.2	Direzioni e sforzi principali	156
3.7	I cerchi di Mohr	157
3.7.1	Il Teorema di Mohr	158
3.8	Equazioni indefinite in forma materiale e tensori di Piola	162
3.8.1	I tensori di Piola	163
3.8.2	Equazioni indefinite in forma materiale	164
3.9	Il teorema dell'energia cinetica e la potenza degli sforzi	165
3.10	Processi dinamici	167
3.10.1	Cicli meccanici	168
3.11	Equazione di bilancio dell'energia	169
3.11.1	Energia interna	170
3.11.2	Riscaldamento istantaneo	170
3.11.3	Bilancio dell'energia	171
3.12	La disuguaglianza entropica	173
3.12.1	Energia libera di Helmholtz	175
3.13	Processi termodinamici	176
3.14	Esercizi e complementi	176
4	Classi costitutive	185
4.1	Indifferenza materiale	186
4.1.1	Trasformazione delle quantità meccaniche	188
4.1.2	Indifferenza delle equazioni costitutive	189
4.2	Determinismo, azione locale, materiali semplici e simmetria materiale	190
4.2.1	Gruppo di simmetria materiale	191
4.3	Vincoli interni	193
4.3.1	Esempi di vincoli interni	195
4.3.2	La parte reattiva dello sforzo	196
4.3.3	Sforzi reattivi per alcuni vincoli interni	197
4.4	Solidi elastici	198
4.4.1	Solidi elastici incomprimibili	201
4.4.2	Solidi elastici isotropi	201
4.5	Fluidi perfetti	202
4.6	Solidi viscoelastici isotropi	203
4.7	Fluidi viscosi semplici	206
4.8	Fluidi Newtoniani	207
4.8.1	Fluidi Newtoniani incomprimibili	208
4.9	Esercizi e complementi	209

5	Solidi elastici	211
5.1	Elasticità isotropa	211
5.2	Solidi iperelastici ed energia potenziale elastica	213
5.2.1	Energia elastica	214
5.3	Energia elastica e indifferenza materiale	220
5.3.1	Energia di deformazione e simmetria materiale	221
5.3.2	Energia elastica isotropa e tensore di Piola	222
5.3.3	Un schema riassuntivo	226
5.4	Esempi di equazioni costitutive per solidi iperelastici isotropi	227
5.5	Esempi di equazioni costitutive per solidi iperelastici incompressibili	229
5.6	Estensione di solidi elastici	230
5.6.1	Estensione uniassiale di un solido incompressibile	232
5.6.2	Estensione biassiale di un solido incompressibile	234
5.6.3	Tensione uniforme di un solido neo-Hookeano	236
5.7	Scorrimento semplice ed effetto Poynting	240
5.8	Termoelasticità	243
5.8.1	Il metodo di Coleman e Noll	244
5.8.2	Il tensore di conducibilità termica e la legge di Fourier	246
5.8.3	Il bilancio dell'energia in termoelasticità	248
5.9	Esercizi e complementi	249
6	Elasticità e termoelasticità lineare	275
6.1	Elasticità lineare	275
6.2	Linearizzazione della relazione costitutiva	276
6.2.1	Energia di deformazione e simmetrie maggiori	280
6.2.2	Energia di deformazione	281
6.2.3	Gruppo di simmetria del tensore di elasticità	282
6.3	Elasticità lineare isotropa	283
6.3.1	Tensori di elasticità isotropi	285
6.4	Equazioni di moto per l'elasticità lineare isotropa	287
6.5	Onde sinusoidali piane	288
6.5.1	Condizioni di propagazione	289
6.6	Deformazioni e stati di sforzo elementari	291
6.7	Termoelasticità lineare	293
6.7.1	Linearizzazione delle relazioni costitutive	294
6.7.2	Linearizzazione dell'entropia e diffusione del calore	296
7	Fluidi	299
7.1	Fluidi perfetti	300
7.1.1	Gas e liquidi compressibili	300
7.2	Equazioni di Eulero	304
7.2.1	Equazioni di Eulero con forze di volume conservative	306
7.2.2	Condizioni al contorno e problemi a frontiera libera	307
7.3	Statica dei fluidi	309
7.3.1	Equilibrio di un fluido pesante incompressibile	310

7.3.2	Equilibrio di un fluido perfetto	311
7.3.3	Il principio di Archimede	312
7.4	Leggi di Bernoulli	315
7.5	Moti piani e funzione di Stokes	317
7.6	Flussi piani, funzioni olomorfe e velocità complessa	319
7.6.1	Potenziale complesso, potenziale reale e funzione di corrente	319
7.6.2	Circuitazione della velocità	321
7.6.3	Teorema di Blasius-Kutta	324
7.7	Alcuni flussi piani elementari	327
7.7.1	Flusso uniforme	327
7.7.2	Flusso di sorgente	328
7.7.3	Flusso di dipolo	329
7.7.4	Flusso di vortice	331
7.7.5	Altri flussi	332
7.7.6	Flussi piani intorno a un ostacolo con sezione circolare	332
7.7.7	Punti di stagnazione	334
7.8	Propagazione ondosu in un fluido perfetto compressibile	337
7.9	Fluidi viscosi	339
7.10	Fluidi Newtoniani e equazioni di Navier-Stokes	340
7.10.1	Condizioni al contorno per le equazioni di Navier-Stokes	342
7.10.2	Il numero di Reynolds	343
7.10.3	Il problema di esistenza e regolarità	345
7.10.4	Stabilità della quiete	346
7.11	Fluidi non-Newtoniani	349
7.12	Esercizi e complementi	353
8	Appendice A: Vettori e tensori	383
8.1	Prodotto scalare	383
8.2	Prodotto vettoriale	385
8.3	Prodotto misto	386
8.4	Tensori	387
8.5	Diadi	388
8.5.1	Proiezioni ortogonali	391
8.6	Composizione di tensori	392
8.7	Il tensore trasposto	393
8.8	Il tensore aggiunto	395
8.9	Tensori simmetrici e antisimmetrici	397
8.10	Tensori antisimmetrici e vettori	398
8.11	Traccia	399
8.12	Il prodotto scalare fra tensori	400
8.12.1	Ortogonalità fra tensori	402
8.13	Parte isotropa e parte deviatorica	403
8.14	Determinante	404
8.15	Il tensore inverso	405
8.16	Autovalori e autovettori	407

8.17	Tensori ortogonali e rotazioni	410
8.17.1	Asse e piano di rotazione	411
8.18	Invarianti principali	413
8.19	Radice quadrata di un tensore simmetrico definito positivo	414
8.20	Decomposizione polare	415
8.21	Tensori di ordine superiore al secondo	417
8.22	Prodotto tensoriale	420
8.23	Simmetrie per tensori di ordine superiore al secondo	423
8.24	Antisimmetrie per tensori di ordine superiore al secondo	424
8.25	Contrazioni	426
8.26	Prodotto scalare e norma	428
8.27	Tensori come trasformazioni lineari	429
8.28	Tensori isotropi e funzioni invarianti	431
8.29	Funzioni Isotrope	433
8.30	Funzioni vettoriali e tensoriali	439
8.31	Campi scalari, vettoriali e tensoriali	442
8.32	Teoremi integrali	445
8.33	Funzioni di tensori	450
8.33.1	Funzioni scalari	450
8.33.2	Funzioni a valori tensoriali	451
8.34	Esercizi e complementi	452
9	Appendice B: Coordinate generali	461
9.1	Base duale	461
9.2	Coordinate curvilinee e basi naturali	464
9.2.1	Sistemi di coordinate ortogonali	465
9.3	Operatori differenziali in coordinate generali	467
9.3.1	I simboli di Christoffel	470
9.4	Il gradiente di deformazione	473
9.5	Esercizi e complementi	474
	Riferimenti bibliografici	481
	Indice analitico	483