

# Collana di Fisica e Astronomia

A cura di:

Michele Cini  
Stefano Forte  
Massimo Inguscio  
Guida Montagna  
Oreste Nicosini  
Franco Pacini  
Luca Peliti  
Alberto Rotondi

G.G.N. Angilella

# **Esercizi di metodi matematici della fisica**

G.G.N. ANGILELLA  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Università di Catania

UNITEXT - Collana di Fisica e Astronomia  
ISSN print edition: 2038-5730

ISSN electronic edition: 2038-5765

ISBN 978-88-470-1952-2  
DOI 10.1007/978-88-470-1953-9

ISBN 978-88-470-1953-9 (eBook)

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

© Springer-Verlag Italia 2011

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail [segreteria@aidro.org](mailto:segreteria@aidro.org) e sito web [www.aidro.org](http://www.aidro.org).

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Riprodotta da copia camera-ready fornita dall'Autore  
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano  
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (Mi)

*Stampato in Italia*

Springer-Verlag Italia s.r.l., Via Decembrio, 28 - I-20137 Milano  
Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

# Indice

|  |    |
|--|----|
| <b>Prefazione</b> .....  | IX |
| <b>Elenco dei simboli e delle abbreviazioni</b> .....          | XI |
| <b>1 Spazi vettoriali</b> .....                                | 1  |
| 1.1 Definizioni e richiami .....                               | 1  |
| 1.2 Vettori linearmente indipendenti .....                     | 3  |
| 1.2.1 Matrici di Pauli .....                                   | 6  |
| 1.2.2 Equazione di Pauli .....                                 | 11 |
| 1.2.3 Matrici di Dirac .....                                   | 15 |
| 1.3 Sistemi lineari .....                                      | 16 |
| 1.4 Cambiamenti di base .....                                  | 19 |
| 1.5 Applicazioni lineari (omomorfismi) .....                   | 24 |
| 1.5.1 Cambiamento di base per gli omomorfismi .....            | 28 |
| 1.5.2 Spazio duale .....                                       | 30 |
| 1.5.3 Trasformazioni di similarità .....                       | 31 |
| 1.6 Autovalori ed autovettori .....                            | 37 |
| 1.6.1 Rappresentazione spettrale di un endomorfismo .....      | 42 |
| 1.6.2 Diagonalizzabilità .....                                 | 44 |
| 1.7 Funzioni di endomorfismi .....                             | 46 |
| 1.7.1 Potenze e polinomi .....                                 | 46 |
| 1.7.2 Funzioni di endomorfismi .....                           | 49 |
| 1.7.3 Alcune applicazioni .....                                | 57 |
| 1.7.4 Approssimazione numerica di autovalori ed autovettori .. | 66 |
| 1.8 Proprietà metriche .....                                   | 69 |
| 1.8.1 Norma di un endomorfismo .....                           | 72 |
| 1.8.2 Disuguaglianze notevoli .....                            | 74 |
| 1.8.3 Vettori ortogonali e ortonormali .....                   | 76 |
| 1.9 Particolari classi di omomorfismi e loro proprietà .....   | 78 |
| 1.9.1 Matrici hermitiane, unitarie, normali .....              | 79 |
| 1.9.2 Forma polare di una matrice .....                        | 88 |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.9.3    | Matrici ortogonali . . . . .  | 91         |
| 1.9.4    | Integrali gaussiani . . . . .   | 95         |
| 1.9.5    | Matrici antisimmetriche . . . . .                                       | 97         |
| 1.10     | Tavola riassuntiva . . . . .  | 98         |
| 1.11     | Temi d'esame svolti . . . . .   | 99         |
| <b>2</b> | <b>Serie di Fourier</b> . . . . .                                       | <b>121</b> |
| 2.1      | Generalità . . . . .  | 121        |
| 2.2      | Fenomeno di Gibbs . . . . .   | 134        |
| 2.3      | Calcolo di alcune serie numeriche mediante la serie di Fourier .        | 138        |
| 2.4      | Convergenza della serie di Fourier . . . . .                            | 143        |
| 2.5      | Temi d'esame svolti . . . . .   | 146        |
| <b>3</b> | <b>Cenni di teoria delle equazioni alle derivate parziali</b> . . . . . | <b>149</b> |
| 3.1      | Generalità . . . . .  | 149        |
| 3.1.1    | Classificazione delle PDE del II ordine . . . . .                       | 150        |
| 3.2      | Equazione della corda vibrante . . . . .                                | 151        |
| 3.2.1    | Derivazione elementare . . . . .  | 151        |
| 3.2.2    | Problema di Cauchy e soluzione di D'Alembert . . . . .                  | 153        |
| 3.2.3    | Corda vibrante . . . . .  | 158        |
| 3.3      | Equazione del calore . . . . .  | 164        |
| 3.3.1    | Derivazione in una dimensione . . . . .                                 | 164        |
| 3.3.2    | Condizioni al contorno di Dirichlet . . . . .                           | 165        |
| 3.3.3    | Condizioni al contorno di Dirichlet, non omogenee . . . . .             | 169        |
| 3.3.4    | Condizioni al contorno di Neumann . . . . .                             | 170        |
| 3.3.5    | Una particolare condizione mista . . . . .                              | 172        |
| 3.4      | Equazione di Laplace . . . . .  | 175        |
| 3.4.1    | Derivazione . . . . .   | 175        |
| 3.4.2    | Condizioni di Cauchy-Riemann . . . . .                                  | 178        |
| 3.4.3    | Trasformazioni conformi . . . . .                                       | 180        |
| 3.4.4    | Problema di Dirichlet per il disco unitario . . . . .                   | 182        |
| 3.5      | Temi d'esame svolti . . . . .   | 189        |
| <b>4</b> | <b>Funzioni di variabile complessa</b> . . . . .                        | <b>193</b> |
| 4.1      | Funzione $\Gamma(z)$ di Eulero . . . . .                                | 193        |
| 4.2      | Temi d'esame svolti . . . . .   | 195        |
| <b>5</b> | <b>Trasformate integrali</b> . . . . .                                  | <b>207</b> |
| 5.1      | Trasformata di Laplace . . . . .  | 207        |
| 5.2      | Trasformata di Fourier . . . . .  | 221        |
| 5.2.1    | Formula integrale di Fourier . . . . .                                  | 221        |
| 5.2.2    | Trasformata di Fourier in $L^1(-\infty, \infty)$ . . . . .              | 223        |
| 5.2.3    | Trasformata di Fourier in $L^2(-\infty, \infty)$ . . . . .              | 224        |
| 5.2.4    | Esercizi . . . . .  | 225        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.2.5    | Applicazione della trasformata di Fourier alla<br>soluzione di alcune PDE e di alcune equazioni integrali . | 238        |
| 5.3      | Temi d'esame svolti . . . . .   | 245        |
| <b>6</b> | <b>Equazioni integrali e funzioni di Green . . . . .</b>  | <b>249</b> |
| 6.1      | Equazioni di Fredholm . . . . .   | 249        |
| 6.1.1    | Generalità . . . . .  | 249        |
| 6.1.2    | Equazioni a nucleo separabile . . . . .   | 250        |
| 6.1.3    | Equazioni a nucleo simmetrico . . . . .   | 255        |
| 6.1.4    | Teoremi di Fredholm . . . . .   | 264        |
| 6.1.5    | Soluzione numerica di un'equazione di Fredholm . . . . .  | 267        |
| 6.2      | Equazioni di Volterra . . . . .   | 273        |
| 6.2.1    | Equazione di Volterra per il problema di Sturm-Liouville  | 273        |
| 6.2.2    | Equazioni di Volterra di convoluzione . . . . .   | 275        |
| 6.3      | Funzione di Green per l'operatore di Sturm-Liouville . . . . .  | 276        |
| 6.4      | Temi d'esame svolti . . . . .   | 280        |
|          | <b>Bibliografia . . . . .</b>   | <b>287</b> |
|          | <b>Indice analitico . . . . .</b>   | <b>289</b> |

---

## Prefazione

Questo volume raccoglie alcuni argomenti trattati durante le esercitazioni per il corso di Metodi matematici della fisica (per Fisici) presso l'Università di Catania dal 2001 al 2006.

Gli argomenti presentati includono: elementi di algebra lineare (con applicazioni alla Meccanica quantistica); sviluppo in serie di Fourier; equazioni alle derivate parziali; funzioni di variabile complessa; trasformate di Fourier e di Laplace; equazioni integrali di Fredholm e di Volterra, funzioni di Green.

Le esercitazioni integrano il corso di teoria in alcuni dettagli o applicazioni, e lo approfondiscono per quanto riguarda gli esercizi veri e propri. Ove necessario, sono richiamati elementi di teoria utili alla comprensione ed allo svolgimento di un esercizio.

Una parte specifica alla fine di ogni capitolo è dedicata allo svolgimento di quesiti assegnati durante alcuni compiti d'esame. In ogni caso, molte soluzioni indicano almeno il procedimento ed il risultato finale.

Ringrazio tutti gli studenti che, nel corso degli anni, hanno animato le lezioni e stimolato la stesura di questi appunti, e soprattutto quelli di loro che hanno puntualmente segnalato errori nel testo.

Il simbolo di curva pericolosa<sup>1</sup> a margine della pagina indica un'affermazione o un risultato indicato nel testo, che può essere verificato per esercizio.



Catania, gennaio 2011

*G. G. N. Angilella*

---

<sup>1</sup> Tale simbolo è stato disegnato da Knuth (1993), ma per primo utilizzato da N. Bourbaki nel suo celebre *Trattato di matematica*. Vedi Pagli (1996).

---

## Elenco dei simboli e delle abbreviazioni

- $0, 0_K$ , elemento nullo del corpo  $K$ .  
 $\mathbf{0}, \mathbf{0}_n$ , vettore nullo di  $V_n$ .  
 $\mathbb{1}, \mathbb{1}_n$ , matrice identità  $n \times n$ ; endomorfismo identità su  $V_n$ .  
 $A^\top$ , trasposta della matrice  $A$ .  
 $A^{-1}$ , inversa della matrice  $A$ .  
 $A^\dagger$ , hermitiana coniugata della matrice  $A$ .  
 $[A, B]$ , commutatore tra  $A$  e  $B$ ,  
 $[A, B] := AB - BA$ .  
 $\{A, B\}$ , anticommutatore tra  $A$  e  $B$ ,  
 $\{A, B\} := AB + BA$ .  
 $a_{ij}$ , elemento di posto  $ij$  della matrice  $A$ .  
 $A_{ij}$ , minore complementare dell'elemento  $a_{ij}$  della matrice  $A$ ; elemento di posto  $ij$  della matrice  $A$ .  
 $\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{x}$ , vettori.  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , prodotto scalare fra i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (notazione comune, che qui verrà usata solo occasionalmente).  
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , prodotto vettoriale fra i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (notazione comune, che qui verrà usata solo occasionalmente).  
 $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ , prodotto scalare fra i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (notazione di Dirac).  
 $|\mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{a}|$ , operatore di proiezione sul vettore  $\mathbf{a}$  (notazione di Dirac).  
 $\text{ch}_A(\lambda)$ , polinomio caratteristico associato alla matrice  $A$ .  
 $\chi_\Omega(t)$ , funzione caratteristica relativa all'insieme  $\Omega$ :  $\chi_\Omega(t) = 1$ , se  $t \in \Omega$ ,  $\chi_\Omega(t) = 0$ , se  $t \notin \Omega$ .  
 $C^k([-\pi, \pi])$ , spazio delle funzioni  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  con derivata continua fino all'ordine  $k$  incluso.  
c.l., combinazione lineare.  
 $\delta_{ij}$ , simbolo di Kronecker.  
 $\det A$ , determinante della matrice  $A$ .  
 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , matrice diagonale  $n \times n$ , avente lungo la diagonale principale gli scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e tutti gli altri elementi nulli.  
 $\partial\Omega$ , frontiera dell'insieme  $\Omega$ .  
 $\nabla u$ , gradiente di  $u$ .  
 $\Delta u$ , laplaciano di  $u$ .  
 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ , matrice jacobiana o (secondo il contesto) determinante della matrice jacobiana (jacobiano) relativa alla trasformazione di coordinate  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ .  
 $\dim W$ , dimensione di uno spazio vettoriale  $W$ .



- $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_i\}$ , base canonica di uno spazio vettoriale.  
 $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_i\}$ , base canonica in  $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ .  
 $\varepsilon_{ijk}$ , simbolo di Levi-Civita (tensore completamente antisimmetrico).  
 $\exp A$ , esponenziale della matrice  $A$ .  
 $E_T(\lambda)$ ,  $E(\lambda)$ , autospazio associato all'autovalore  $\lambda$  (dell'endomorfismo  $T$ ).  
 $\hat{f}(k)$ , trasformata di Fourier di  $f(x)$ .  
 $\mathcal{F}[f; k]$ , trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  di  $f(x)$ .  
 $F(s)$ , trasformata di Laplace di  $f(t)$ .  
 $f * g$ , convoluzione fra le funzioni  $f$  e  $g$ .  
 $g_{\mu\nu}$ , tensore metrico.  
 $H_n(x)$ , polinomio di Hermite.  
 $\text{Hom}(V_n, W_m)$ , insieme degli omomorfismi di  $V_n$  in  $W_m$ .  
 $\text{Im } z$ , parte immaginaria del numero complesso  $z$ .  
 $K$ , corpo algebrico.  
 $K^n[\lambda]$ , spazio vettoriale (a  $n + 1$  dimensioni) dei polinomi di grado non superiore ad  $n$  nella variabile  $\lambda \in K$ , con  $K$  corpo algebrico.  
 $\ker T$ , nucleo dell'omomorfismo  $T$ .  
 $L^k(a, b)$ , spazio delle funzioni  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  tali che esista finito l'integrale  $\int_a^b |f(x)|^k dx$ . (Può essere  $a = -\infty$  e/o  $b = \infty$ .)  
 $\mathcal{L}[f; s]$ , trasformata di Laplace  $F(s)$  di  $f(t)$ .  
l.d., linearmente dipendenti.  
l.i., linearmente indipendenti.  
 $\gamma_\mu, \gamma$ , matrici di Dirac.  
 $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ , spazio vettoriale delle matrici  $p \times q$  (a  $p$  righe e  $q$  colonne) ad elementi complessi.  
 $\mathfrak{M}_{p,q}(K)$ , spazio vettoriale delle matrici  $p \times q$  (a  $p$  righe e  $q$  colonne) ad elementi nel corpo  $K$ .  
 $\mathfrak{M}_{n,n}^\pm(\mathbb{R})$ , sottospazio vettoriale delle matrici reali  $n \times n$  simmetriche (+) o antisimmetriche (-).  
 $\overset{\circ}{\Omega}$ , interno dell'insieme  $\Omega$ .  
 $\mathbb{R}^n[x]$ , spazio vettoriale (a  $n + 1$  dimensioni) dei polinomi reali di variabile reale  $x$  di grado non superiore ad  $n$ .  
 $\text{rank } A$ ,  $\text{rank } T$ , rango o caratteristica della matrice  $A$ ; rango dell'omomorfismo  $T$ .  
 $\text{Re } z$ , parte reale del numero complesso  $z$ .  
 $\sigma_i, \boldsymbol{\sigma}$ , matrici di Pauli.  
 $S_a^b[g; N]$ , valore approssimato di  $\int_a^b g(x) dx$  secondo la regola di Simpson (del trapezoide) ad  $N$  punti, Eq. (6.16).  
 $\text{Tr } A$ , traccia della matrice  $A$ .  
 $T \circ S$ , composizione di due operatori  $T, S$ .  
 $T(V_n)$ , immagine di  $V_n$  secondo l'omomorfismo  $T$ .  
 $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_i\}$ , base di uno spazio vettoriale.  
 $U + V$ , spazio somma dei (sotto)spazi  $U, V$ .  
 $U \oplus V$ , spazio somma diretta dei (sotto)spazi  $U, V$ .  
 $U \times V$ , spazio prodotto cartesiano dei (sotto)spazi  $U, V$ .  
 $U \otimes V$ , spazio prodotto tensoriale dei (sotto)spazi  $U, V$ .  
 $u_x, u_{xx}, u_{xt}, \dots$ , derivate parziali della funzione di più variabili  $u$ , rispetto alle variabili indicate.  
 $V_n$ , spazio vettoriale di dimensione  $n$ .  
 $\mathbf{x}_U, (\mathbf{x})_U$ , (vettore colonna delle) componenti del vettore  $\mathbf{x}$  rispetto alla base  $\mathcal{U}$ .  
 $z^*$ , coniugato del numero complesso  $z$ .