

Collana di Fisica e Astronomia

A cura di:

Michele Cini
Stefano Forte
Massimo Inguscio
Guida Montagna
Oreste Nicosini
Franco Pacini
Luca Peliti
Alberto Rotondi

G.G.N. Angilella

Esercizi di metodi matematici della fisica

G.G.N. ANGILELLA
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università di Catania

UNITEXT - Collana di Fisica e Astronomia
ISSN print edition: 2038-5730

ISSN electronic edition: 2038-5765

ISBN 978-88-470-1952-2
DOI 10.1007/978-88-470-1953-9

ISBN 978-88-470-1953-9 (eBook)

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

© Springer-Verlag Italia 2011

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org.

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Riprodotta da copia camera-ready fornita dall'Autore
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (Mi)

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia s.r.l., Via Decembrio, 28 - I-20137 Milano
Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Indice

Prefazione	IX
Elenco dei simboli e delle abbreviazioni	XI
1 Spazi vettoriali	1
1.1 Definizioni e richiami	1
1.2 Vettori linearmente indipendenti	3
1.2.1 Matrici di Pauli	6
1.2.2 Equazione di Pauli	11
1.2.3 Matrici di Dirac	15
1.3 Sistemi lineari	16
1.4 Cambiamenti di base	19
1.5 Applicazioni lineari (omomorfismi)	24
1.5.1 Cambiamento di base per gli omomorfismi	28
1.5.2 Spazio duale	30
1.5.3 Trasformazioni di similarità	31
1.6 Autovalori ed autovettori	37
1.6.1 Rappresentazione spettrale di un endomorfismo	42
1.6.2 Diagonalizzabilità	44
1.7 Funzioni di endomorfismi	46
1.7.1 Potenze e polinomi	46
1.7.2 Funzioni di endomorfismi	49
1.7.3 Alcune applicazioni	57
1.7.4 Approssimazione numerica di autovalori ed autovettori ..	66
1.8 Proprietà metriche	69
1.8.1 Norma di un endomorfismo	72
1.8.2 Disuguaglianze notevoli	74
1.8.3 Vettori ortogonali e ortonormali	76
1.9 Particolari classi di omomorfismi e loro proprietà	78
1.9.1 Matrici hermitiane, unitarie, normali	79
1.9.2 Forma polare di una matrice	88

1.9.3	Matrici ortogonali	91
1.9.4	Integrali gaussiani	95
1.9.5	Matrici antisimmetriche	97
1.10	Tavola riassuntiva	98
1.11	Temi d'esame svolti	99
2	Serie di Fourier	121
2.1	Generalità	121
2.2	Fenomeno di Gibbs	134
2.3	Calcolo di alcune serie numeriche mediante la serie di Fourier .	138
2.4	Convergenza della serie di Fourier	143
2.5	Temi d'esame svolti	146
3	Cenni di teoria delle equazioni alle derivate parziali	149
3.1	Generalità	149
3.1.1	Classificazione delle PDE del II ordine	150
3.2	Equazione della corda vibrante	151
3.2.1	Derivazione elementare	151
3.2.2	Problema di Cauchy e soluzione di D'Alembert	153
3.2.3	Corda vibrante	158
3.3	Equazione del calore	164
3.3.1	Derivazione in una dimensione	164
3.3.2	Condizioni al contorno di Dirichlet	165
3.3.3	Condizioni al contorno di Dirichlet, non omogenee	169
3.3.4	Condizioni al contorno di Neumann	170
3.3.5	Una particolare condizione mista	172
3.4	Equazione di Laplace	175
3.4.1	Derivazione	175
3.4.2	Condizioni di Cauchy-Riemann	178
3.4.3	Trasformazioni conformi	180
3.4.4	Problema di Dirichlet per il disco unitario	182
3.5	Temi d'esame svolti	189
4	Funzioni di variabile complessa	193
4.1	Funzione $\Gamma(z)$ di Eulero	193
4.2	Temi d'esame svolti	195
5	Trasformate integrali	207
5.1	Trasformata di Laplace	207
5.2	Trasformata di Fourier	221
5.2.1	Formula integrale di Fourier	221
5.2.2	Trasformata di Fourier in $L^1(-\infty, \infty)$	223
5.2.3	Trasformata di Fourier in $L^2(-\infty, \infty)$	224
5.2.4	Esercizi	225

5.2.5	Applicazione della trasformata di Fourier alla soluzione di alcune PDE e di alcune equazioni integrali .	238
5.3	Temi d'esame svolti	245
6	Equazioni integrali e funzioni di Green	249
6.1	Equazioni di Fredholm	249
6.1.1	Generalità	249
6.1.2	Equazioni a nucleo separabile	250
6.1.3	Equazioni a nucleo simmetrico	255
6.1.4	Teoremi di Fredholm	264
6.1.5	Soluzione numerica di un'equazione di Fredholm	267
6.2	Equazioni di Volterra	273
6.2.1	Equazione di Volterra per il problema di Sturm-Liouville	273
6.2.2	Equazioni di Volterra di convoluzione	275
6.3	Funzione di Green per l'operatore di Sturm-Liouville	276
6.4	Temi d'esame svolti	280
	Bibliografia	287
	Indice analitico	289

Prefazione

Questo volume raccoglie alcuni argomenti trattati durante le esercitazioni per il corso di Metodi matematici della fisica (per Fisici) presso l'Università di Catania dal 2001 al 2006.

Gli argomenti presentati includono: elementi di algebra lineare (con applicazioni alla Meccanica quantistica); sviluppo in serie di Fourier; equazioni alle derivate parziali; funzioni di variabile complessa; trasformate di Fourier e di Laplace; equazioni integrali di Fredholm e di Volterra, funzioni di Green.

Le esercitazioni integrano il corso di teoria in alcuni dettagli o applicazioni, e lo approfondiscono per quanto riguarda gli esercizi veri e propri. Ove necessario, sono richiamati elementi di teoria utili alla comprensione ed allo svolgimento di un esercizio.

Una parte specifica alla fine di ogni capitolo è dedicata allo svolgimento di quesiti assegnati durante alcuni compiti d'esame. In ogni caso, molte soluzioni indicano almeno il procedimento ed il risultato finale.

Ringrazio tutti gli studenti che, nel corso degli anni, hanno animato le lezioni e stimolato la stesura di questi appunti, e soprattutto quelli di loro che hanno puntualmente segnalato errori nel testo.

Il simbolo di curva pericolosa¹ a margine della pagina indica un'affermazione o un risultato indicato nel testo, che può essere verificato per esercizio.



Catania, gennaio 2011

G. G. N. Angilella

¹ Tale simbolo è stato disegnato da Knuth (1993), ma per primo utilizzato da N. Bourbaki nel suo celebre *Trattato di matematica*. Vedi Pagli (1996).

Elenco dei simboli e delle abbreviazioni

- $0, 0_K$, elemento nullo del corpo K .
 $\mathbf{0}, \mathbf{0}_n$, vettore nullo di V_n .
 $\mathbb{1}, \mathbb{1}_n$, matrice identità $n \times n$; endomorfismo identità su V_n .
 A^\top , trasposta della matrice A .
 A^{-1} , inversa della matrice A .
 A^\dagger , hermitiana coniugata della matrice A .
 $[A, B]$, commutatore tra A e B ,
 $[A, B] := AB - BA$.
 $\{A, B\}$, anticommutatore tra A e B ,
 $\{A, B\} := AB + BA$.
 a_{ij} , elemento di posto ij della matrice A .
 A_{ij} , minore complementare dell'elemento a_{ij} della matrice A ; elemento di posto ij della matrice A .
 $\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{x}$, vettori.
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, prodotto scalare fra i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (notazione comune, che qui verrà usata solo occasionalmente).
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, prodotto vettoriale fra i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (notazione comune, che qui verrà usata solo occasionalmente).
 $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$, prodotto scalare fra i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (notazione di Dirac).
 $|\mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{a}|$, operatore di proiezione sul vettore \mathbf{a} (notazione di Dirac).
 $\text{ch}_A(\lambda)$, polinomio caratteristico associato alla matrice A .
 $\chi_\Omega(t)$, funzione caratteristica relativa all'insieme Ω : $\chi_\Omega(t) = 1$, se $t \in \Omega$, $\chi_\Omega(t) = 0$, se $t \notin \Omega$.
 $C^k([-\pi, \pi])$, spazio delle funzioni $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ con derivata continua fino all'ordine k incluso.
c.l., combinazione lineare.
 δ_{ij} , simbolo di Kronecker.
 $\det A$, determinante della matrice A .
 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, matrice diagonale $n \times n$, avente lungo la diagonale principale gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e tutti gli altri elementi nulli.
 $\partial\Omega$, frontiera dell'insieme Ω .
 ∇u , gradiente di u .
 Δu , laplaciano di u .
 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, matrice jacobiana o (secondo il contesto) determinante della matrice jacobiana (jacobiano) relativa alla trasformazione di coordinate $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.
 $\dim W$, dimensione di uno spazio vettoriale W .

- $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_i\}$, base canonica di uno spazio vettoriale.
 $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_i\}$, base canonica in $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.
 ε_{ijk} , simbolo di Levi-Civita (tensore completamente antisimmetrico).
 $\exp A$, esponenziale della matrice A .
 $E_T(\lambda)$, $E(\lambda)$, autospazio associato all'autovalore λ (dell'endomorfismo T).
 $\hat{f}(k)$, trasformata di Fourier di $f(x)$.
 $\mathcal{F}[f; k]$, trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$.
 $F(s)$, trasformata di Laplace di $f(t)$.
 $f * g$, convoluzione fra le funzioni f e g .
 $g_{\mu\nu}$, tensore metrico.
 $H_n(x)$, polinomio di Hermite.
 $\text{Hom}(V_n, W_m)$, insieme degli omomorfismi di V_n in W_m .
 $\text{Im } z$, parte immaginaria del numero complesso z .
 K , corpo algebrico.
 $K^n[\lambda]$, spazio vettoriale (a $n + 1$ dimensioni) dei polinomi di grado non superiore ad n nella variabile $\lambda \in K$, con K corpo algebrico.
 $\ker T$, nucleo dell'omomorfismo T .
 $L^k(a, b)$, spazio delle funzioni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ tali che esista finito l'integrale $\int_a^b |f(x)|^k dx$. (Può essere $a = -\infty$ e/o $b = \infty$.)
 $\mathcal{L}[f; s]$, trasformata di Laplace $F(s)$ di $f(t)$.
l.d., linearmente dipendenti.
l.i., linearmente indipendenti.
 γ_μ, γ , matrici di Dirac.
 $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, spazio vettoriale delle matrici $p \times q$ (a p righe e q colonne) ad elementi complessi.
 $\mathfrak{M}_{p,q}(K)$, spazio vettoriale delle matrici $p \times q$ (a p righe e q colonne) ad elementi nel corpo K .
 $\mathfrak{M}_{n,n}^\pm(\mathbb{R})$, sottospazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ simmetriche (+) o antisimmetriche (-).
 $\overset{\circ}{\Omega}$, interno dell'insieme Ω .
 $\mathbb{R}^n[x]$, spazio vettoriale (a $n + 1$ dimensioni) dei polinomi reali di variabile reale x di grado non superiore ad n .
 $\text{rank } A$, $\text{rank } T$, rango o caratteristica della matrice A ; rango dell'omomorfismo T .
 $\text{Re } z$, parte reale del numero complesso z .
 $\sigma_i, \boldsymbol{\sigma}$, matrici di Pauli.
 $S_a^b[g; N]$, valore approssimato di $\int_a^b g(x) dx$ secondo la regola di Simpson (del trapezoide) ad N punti, Eq. (6.16).
 $\text{Tr } A$, traccia della matrice A .
 $T \circ S$, composizione di due operatori T, S .
 $T(V_n)$, immagine di V_n secondo l'omomorfismo T .
 $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_i\}$, base di uno spazio vettoriale.
 $U + V$, spazio somma dei (sotto)spazi U, V .
 $U \oplus V$, spazio somma diretta dei (sotto)spazi U, V .
 $U \times V$, spazio prodotto cartesiano dei (sotto)spazi U, V .
 $U \otimes V$, spazio prodotto tensoriale dei (sotto)spazi U, V .
 $u_x, u_{xx}, u_{xt}, \dots$, derivate parziali della funzione di più variabili u , rispetto alle variabili indicate.
 V_n , spazio vettoriale di dimensione n .
 $\mathbf{x}_U, (\mathbf{x})_U$, (vettore colonna delle) componenti del vettore \mathbf{x} rispetto alla base \mathcal{U} .
 z^* , coniugato del numero complesso z .