Collana di Fisica e Astronomia

A cura di:

Michele Cini
Stefano Forte
Massimo Inguscio
Guida Montagna
Oreste Nicrosini
Franco Pacini
Luca Peliti
Alberto Rotondi

G.G.N. Angilella

Esercizi di metodi matematici della fisica

Springer

G.G.N. Angilella
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università di Catania

UNITEXT - Collana di Fisica e Astronomia
ISSN print edition: 2038-5730 ISSN electronic edition: 2038-5765

ISBN 978-88-470-1952-2 ISBN 978-88-470-1953-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-1953-9

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

Riprodotto da copia camera-ready fornita dall'Autore
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (Mi)

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia s.r.l., Via Decembrio, 28 - I-20137 Milano
Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Indice

Prefazione

Questo volume raccoglie alcuni argomenti trattati durante le esercitazioni per il corso di Metodi matematici della fisica (per Fisici) presso l'Università di Catania dal 2001 al 2006.

Gli argomenti presentati includono: elementi di algebra lineare (con applicazioni alla Meccanica quantistica); sviluppo in serie di Fourier; equazioni alle derivate parziali; funzioni di variabile complessa; trasformate di Fourier e di Laplace; equazioni integrali di Fredholm e di Volterra, funzioni di Green.

Le esercitazioni integrano il corso di teoria in alcuni dettagli o applicazioni, e lo approfondiscono per quanto riguarda gli esercizi veri e propri. Ove necessario, sono richiamati elementi di teoria utili alla comprensione ed allo svolgimento di un esercizio.

Una parte specifica alla fine di ogni capitolo è dedicata allo svolgimento di quesiti assegnati durante alcuni compiti d'esame. In ogni caso, molte soluzioni indicano almeno il procedimento ed il risultato finale.

Ringrazio tutti gli studenti che, nel corso degli anni, hanno animato le lezioni e stimolato la stesura di questi appunti, e soprattutto quelli di loro che hanno puntualmente segnalato errori nel testo.

Il simbolo di curva pericolosa[1] a margine della pagina indica un'affermazione o un risultato indicato nel testo, che può essere verificato per esercizio.

Catania, gennaio 2011 *G. G. N. Angilella*

[1] Tale simbolo è stato disegnato da Knuth (1993), ma per primo utilizzato da N. Bourbaki nel suo celebre *Trattato di matematica*. Vedi Pagli (1996).

Elenco dei simboli e delle abbreviazioni

$0, 0_K$, elemento nullo del corpo K.

$\mathbf{0}, \mathbf{0}_n$, vettore nullo di V_n.

$\mathbb{1}, \mathbb{1}_n$, matrice identità $n \times n$; endomorfismo identità su V_n.

$A^\top$, trasposta della matrice A.

A^{-1}, inversa della matrice A.

$A^\dagger$, hermitiana coniugata della matrice A.

$[A, B]$, commutatore tra A e B, $[A, B] := AB - BA$.

$\{A, B\}$, anticommutatore tra A e B, $\{A, B\} := AB + BA$.

a_{ij}, elemento di posto ij della matrice A.

A_{ij}, minore complementare dell'elemento a_{ij} della matrice A; elemento di posto ij della matrice A.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}$, vettori.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, prodotto scalare fra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ (notazione comune, che qui verrà usata solo occasionalmente).

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, prodotto vettoriale fra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ (notazione comune, che qui verrà usata solo occasionalmente).

$\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle$, prodotto scalare fra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ (notazione di Dirac).

$|\boldsymbol{a}\rangle\langle\boldsymbol{a}|$, operatore di proiezione sul vettore $\boldsymbol{a}$ (notazione di Dirac).

$\mathrm{ch}_A(\lambda)$, polinomio caratteristico associato alla matrice A.

$\chi_\Omega(t)$, funzione caratteristica relativa all'insieme Ω: $\chi_\Omega(t) = 1$, se $t \in \Omega$, $\chi_\Omega(t) = 0$, se $t \notin \Omega$.

$C^k([-\pi, \pi])$, spazio delle funzioni $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ con derivata continua fino all'ordine k incluso.

c.l., combinazione lineare.

δ_{ij}, simbolo di Kronecker.

$\det A$, determinante della matrice A.

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$, matrice diagonale $n \times n$, avente lungo la diagonale principale gli scalari $\lambda_1, \dots \lambda_n$ e tutti gli altri elementi nulli.

$\partial\Omega$, frontiera dell'insieme Ω.

$\boldsymbol{\nabla} u$, gradiente di u.

Δu, laplaciano di u.

$\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, matrice jacobiana o (secondo il contesto) determinante della matrice jacobiana (jacobiano) relativa alla trasformazione di coordinate $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

$\dim W$, dimensione di uno spazio vettoriale W.

$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_i\}$, base canonica di uno spazio vettoriale.

$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{E}_i\}$, base canonica in $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

ε_{ijk}, simbolo di Levi-Civita (tensore completamente antisimmetrico).

$\exp A$, esponenziale della matrice A.

$E_T(\lambda)$, $E(\lambda)$, autospazio associato all'autovalore λ (dell'endomorfismo T).

$\hat{f}(k)$, trasformata di Fourier di $f(x)$.

$\mathcal{F}[f;k]$, trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$.

$F(s)$, trasformata di Laplace di $f(t)$.

$f * g$, convoluzione fra le funzioni f e g.

$g_{\mu\nu}$, tensore metrico.

$H_n(x)$, polinomio di Hermite.

$\mathrm{Hom}(V_n, W_m)$, insieme degli omomorfismi di V_n in W_m.

$\mathrm{Im}\, z$, parte immaginaria del numero complesso z.

K, corpo algebrico.

$K^n[\lambda]$, spazio vettoriale (a $n+1$ dimensioni) dei polinomi di grado non superiore ad n nella variabile $\lambda \in K$, con K corpo algebrico.

$\ker T$, nucleo dell'omomorfismo T.

$L^k(a,b)$, spazio delle funzioni $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ tali che esista finito l'integrale $\int_a^b |f(x)|^k \,\mathrm{d}x$. (Può essere $a = -\infty$ e/o $b = \infty$.)

$\mathcal{L}[f;s]$, trasformata di Laplace $F(s)$ di $f(t)$.

l.d., linearmente dipendenti.

l.i., linearmente indipendenti.

γ_μ, $\boldsymbol{\gamma}$, matrici di Dirac.

$\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, spazio vettoriale delle matrici $p \times q$ (a p righe e q colonne) ad elementi complessi.

$\mathfrak{M}_{p,q}(K)$, spazio vettoriale delle matrici $p \times q$ (a p righe e q colonne) ad elementi nel corpo K.

$\mathfrak{M}^{\pm}_{n,n}(\mathbb{R})$, sottospazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ simmetriche $(+)$ o antisimmetriche $(-)$.

$\mathring{\Omega}$, interno dell'insieme Ω.

$\mathbb{R}^n[x]$, spazio vettoriale (a $n+1$ dimensioni) dei polinomi reali di variabile reale x di grado non superiore ad n.

$\mathrm{rank}\, A$, $\mathrm{rank}\, T$, rango o caratteristica della matrice A; rango dell'omomorfismo T.

$\mathrm{Re}\, z$, parte reale del numero complesso z.

σ_i, $\boldsymbol{\sigma}$, matrici di Pauli.

$\mathcal{S}_a^b[g;N]$, valore approssimato di $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ secondo la regola di Simpson (del trapezoide) ad N punti, Eq. (6.16).

$\mathrm{Tr}\, A$, traccia della matrice A.

$T \circ S$, composizione di due operatori T, S.

$T(V_n)$, immagine di V_n secondo l'omomorfismo T.

$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_i\}$, base di uno spazio vettoriale.

$U + V$, spazio somma dei (sotto)spazi U, V.

$U \oplus V$, spazio somma diretta dei (sotto)spazi U, V.

$U \times V$, spazio prodotto cartesiano dei (sotto)spazi U, V.

$U \otimes V$, spazio prodotto tensoriale dei (sotto)spazi U, V.

$u_x, u_{xx}, u_{xt}, \ldots$, derivate parziali della funzione di più variabili u, rispetto alle variabili indicate.

V_n, spazio vettoriale di dimensione n.

$\boldsymbol{x}_{\mathcal{U}}, (\boldsymbol{x})_{\mathcal{U}}$, (vettore colonna delle) componenti del vettore $\boldsymbol{x}$ rispetto alla base $\mathcal{U}$.

z^*, coniugato del numero complesso z.