

Collana di Fisica e Astronomia

A cura di:

Michele Cini
Stefano Forte
Massimo Inguscio
Guido Montagna
Oreste Nicosini
Franco Pacini
Luca Peliti
Alberto Rotondi

Leonardo Angelini

Meccanica quantistica: problemi scelti

100 problemi risolti
di meccanica quantistica

LEONARDO ANGELINI

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Bari

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media

springer.com

© Springer-Verlag Italia, Milano 2008

ISBN 978-88-470-0744-4

ISBN 978-88-470-0745-1 (eBook)

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'uso di figure e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla riproduzione su microfilm o in database, alla diversa riproduzione in qualsiasi altra forma (stampa o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. Una riproduzione di quest'opera, oppure di parte di questa, è anche nel caso specifica solo ammessa nei limiti stabiliti dalla legge sul diritto d'autore, ed è soggetta all'autorizzazione dell'Editore. La violazione delle norme comporta sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati ecc., in quest'opera, anche in assenza di particolare indicazione, non consente di considerare tali denominazioni o marchi liberamente utilizzabili da chiunque ai sensi della legge sul marchio.

Riprodotta da copia camera-ready fornita dall'Autore
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate, Milano

Stampato in Italia
Springer-Verlag Italia s.r.l., Via Decembrio, 28 - 20137 Milano

Prefazione

Questo libro è dedicato essenzialmente agli studenti che preparano l'esame scritto di un corso di Meccanica Quantistica. Di riflesso questa raccolta può risultare molto utile anche ai docenti che devono proporre problemi ai loro studenti sia a lezione che per gli esami. Si assume che i contenuti del corso siano sostanzialmente identici a quelli di un tradizionale corso di Istituzioni di Fisica Teorica dei vecchi ordinamenti del corso di laurea in Fisica. Nei nuovi ordinamenti gli stessi argomenti sono stati, in generale, ripartiti su più corsi.

Come molti altri libri di problemi di Meccanica Quantistica non bisogna aspettarsi un particolare sforzo di novità. L'intento è di presentare dei problemi che, oltre a sondare la comprensione della materia e l'abilità ad applicarla concretamente da parte dello studente, siano risolvibili in un tempo limitato. Questo proposito difficilmente si coniuga con una ricerca di originalità. Si troveranno quindi problemi che sono presenti anche in altri libri a partire dai classici russi [1, 2], e quindi nella raccolta che, a partire da essi, fu curata da Ter Haar [3, 4]. Fra gli altri libri di esercizi che sono stati consultati vanno ricordati l'italiano Passatore [5] e quello più recente edito da Yung-Kuo Lim, che raccoglie il lavoro di ben 19 fisici cinesi. Molti problemi interessanti si trovano anche nei manuali di Meccanica Quantistica. Qui l'elenco potrebbe essere lunghissimo. Citerò soltanto quelli che ai problemi hanno dedicato maggiore spazio come il testo di Merzbacher [6], il volume dedicato alla Meccanica Quantistica del corso di Fisica Teorica L. Landau e E. Lifchitz [7], i due volumi di Messiah [8] e il più recente Shankar [9]. Una citazione particolare merita il recente testo [10] in italiano di Nardulli, sia per l'abbondanza di problemi con o senza soluzione che contiene, sia per il fatto che i problemi qui presentati sono stati proposti negli anni passati agli studenti del suo corso. A metà tra il manuale e il libro di problemi si posizionano i due volumi di Flügge [11] che forniscono utili suggerimenti, anche se spesso i problemi proposti risultano troppo complessi rispetto alle finalità di questa raccolta.

La categoria *problemi che si possono risolvere in tempi ragionevoli* non è l'unico criterio di scelta adottato. Rispetto agli altri libri non si troveranno ad esempio *i problemi che fanno normalmente parte del programma di orale*

tipo i potenziali quadrati unidimensionali o l'effetto Stark e la struttura fine. Non sono stati inseriti neanche i problemi che richiedono la conoscenza di metodi matematici non sempre presenti nei corsi standard, come, ad esempio, le equazioni differenziali fuchsiane.

Si è preferito scrivere le soluzioni con un certo dettaglio, eliminando soltanto i passaggi più semplici. Questo costa una certa fatica a chi scrive, ma sicuramente risulterà utile agli studenti.

Come in ogni altro libro, i problemi sono stati raggruppati in capitoli. In molti casi la scelta dell'attribuzione ad un capitolo può essere considerata arbitraria: molti problemi di esame presentano problematiche trasversali all'intero programma. La scelta ovvia è stata di tenere conto delle domande più caratterizzanti.

Per un certo periodo questa raccolta è stata affidata alla rete e utilizzata da docenti e studenti. È merito di alcuni di questi ultimi se molti degli errori presenti inizialmente sono stati eliminati. Ringrazio il prof. Stefano Forte che mi ha incoraggiato a pubblicarlo a stampa dopo aver completato alcune parti e riesaminato la struttura. Un ultimo doveroso ringraziamento va a mia moglie; anche l'impegno per la stesura di questo testo ha contribuito a far ricadere su di lei tanta parte degli oneri familiari. Mi scuso infine, in anticipo, con i lettori per gli errori che sicuramente mi saranno sfuggiti; ogni loro suggerimento è sicuramente gradito.

Bari, luglio 2007

Leonardo Angelini

Indice

1	Operatori e funzioni d'onda	1
1.1	Commutatori e spettro	1
1.2	Costanti del moto	1
1.3	Operatore numero	2
1.4	Proprietà dell'impulso	3
1.5	Funzione d'onda e Hamiltoniano	3
1.6	Spettro di un Hamiltoniano	4
1.7	Particella libera e Parità	5
1.8	Operatore velocità per una particella carica	5
1.9	Oscillatore anarmonico e teorema del viriale	6
1.10	Potenziale coulombiano e teorema del viriale	7
2	Sistemi unidimensionali	9
2.1	Particella in una buca	9
2.2	Particella in un pozzo	11
2.3	Particella legata in un potenziale δ	12
2.4	Diffusione da potenziale δ	13
2.5	Particella legata in un potenziale a doppia δ	14
2.6	Diffusione su potenziale a doppia δ	16
2.7	Diffusione da parete in presenza di potenziale δ	18
2.8	Stati legati di un potenziale $V(x) \propto -\cosh x^{-2}$	20
2.9	Oscillatore Armonico: operatori posizione e impulso	22
2.10	Oscillatore Armonico: energia cinetica ed energia potenziale ...	23
2.11	Oscillatore Armonico: aspettazione di x^4	24
2.12	Oscillatore Armonico: proprietà dello stato fondamentale	24
2.13	Oscillatore Armonico: determinarne lo stato	25
3	Sistemi in 2D e 3D e Momento angolare	27
3.1	Oscillatore Armonico piano	27
3.2	Riflessione e rifrazione in 3 dimensioni	29
3.3	J^2 ed J_z : proprietà degli autostati	31

3.4	Momento angolare di un'onda piana	31
3.5	Misure di momento angolare in uno stato particolare	32
3.6	Momento di quadrupolo	33
3.7	Buca sferica	35
3.8	Funzione d'onda per un potenziale centrale	35
3.9	Particella in potenziale centrale	36
3.10	Atomo d'Idrogeno: una somiglianza ingannevole	38
3.11	Atomo d'Idrogeno: determinarne lo stato	38
3.12	Atomo d'Idrogeno: proprietà dello stato fondamentale	40
3.13	Atomo d'Idrogeno in campo magnetico esterno	40
3.14	Un potenziale molecolare	42
4	Spin	45
4.1	Autostati di una componente dello Spin	45
4.2	Determinazione dello stato di spin	46
4.3	Misure in apparato Stern-Gerlach	47
4.4	Autostati di un sistema di fermioni interagenti	48
4.5	Misure di spin su un fermione	50
5	Evoluzione temporale	51
5.1	Sistema a due livelli (I)	51
5.2	Sistema a due livelli (II)	54
5.3	Sistema a due livelli (III)	55
5.4	Particella su un segmento (I)	57
5.5	Particella su un segmento (II)	59
5.6	Oscillatore Armonico (I)	60
5.7	Oscillatore Armonico (II)	62
5.8	Oscillatore Armonico (III)	64
5.9	Fermione in campo magnetico (I)	65
5.10	Fermione in campo magnetico (II)	67
5.11	Fermione in campo magnetico (III)	69
5.12	Fermione in campo magnetico (IV)	70
5.13	Rotatore piano	72
5.14	Rotatore in campo magnetico (I)	73
5.15	Rotatore in campo magnetico (II)	74
6	Teoria Perturbativa indipendente dal tempo	75
6.1	Particella su un segmento: perturbazione quadrata	75
6.2	Particella su un segmento: perturbazione lineare	76
6.3	Particella su un segmento: correzione sinusoidale	77
6.4	Particella su un segmento in presenza di potenziale δ	78
6.5	Particella in un quadrato: accoppiamento tra i gradi di libertà	80
6.6	Particella su una circonferenza in presenza di perturbazione	82
6.7	Due particelle debolmente interagenti su una circonferenza	84
6.8	Rotatore carico in campo elettrico	86

6.9	Rotatore piano: correzioni dovute alla forza peso	87
6.10	Oscillatore armonico: perturbazione istantanea	88
6.11	Oscillatore armonico: correzioni anarmoniche	90
6.12	Oscillatore armonico: correzione cubica	90
6.13	Oscillatore armonico anisotropo	91
6.14	Oscillatore armonico carico in campo elettrico	93
6.15	Oscillatore armonico: secondo potenziale armonico	94
6.16	Oscillatore armonico piano: correzione lineare e quadratica	95
6.17	Oscillatori armonici accoppiati	96
6.18	Oscillatore armonico piano: accoppiamento tra i due gradi di libertà	99
6.19	Rottura della degenerazione in sistema a due stati	100
6.20	Fermione massivo in campo magnetico	102
6.21	Decadimento β in atomo idrogenoide	104
7	Teoria Perturbativa dipendente dal tempo	105
7.1	Particella su un segmento: perturbazione quadrata	105
7.2	Oscillatore armonico con perturbazione gaussiana	106
7.3	Oscillatore armonico con perturbazione smorzata	107
7.4	Atomo d'idrogeno in campo elettrico impulsato	107
8	Particelle identiche	111
8.1	Due fermioni su un segmento	111
8.2	Due fermioni su un segmento in presenza di potenziale δ	112
8.3	Due fermioni interagenti	113
8.4	Due oscillatori fermionici identici	114
8.5	Particelle identiche in un quadrato	115
8.6	Tre fermioni su un segmento con accoppiamento tra gli spin	118
8.7	Due fermioni interagenti in una sfera	119
8.8	Due fermioni sulla superficie di una sfera	120
8.9	Tre elettroni in potenziale centrale	122
9	Diffusione (Approssimazione di Born)	123
9.1	Potenziale di Yukawa e potenziale coulombiano	123
9.2	Potenziale gaussiano	124
9.3	Scattering da sfera opaca	125
A	Formule utili	127
A.1	Integrali di uso frequente	127
A.1.1	Integrali Gaussiani	127
A.1.2	Integrali con funzioni esponenziali	128
A.2	Oscillatore armonico	128
A.2.1	Trattazione operatoriale	128
A.2.2	Trattazione nella rappresentazione X	128
A.3	Cambiamento di coordinate	129

A.4	Momento Angolare	129
A.4.1	Trattazione operatoriale	129
A.4.2	Relazione di ricorrenza per le Armoniche Sferiche	129
A.4.3	Le prime Armoniche Sferiche	130
A.5	Equazione di Schrödinger in coordinate sferiche	130
A.5.1	L'equazione radiale	130
A.5.2	Le prime funzioni di Bessel Sferiche	130
A.5.3	Le prime autofunzioni dell'atomo d'idrogeno	131
A.6	Spin	131
A.6.1	Matrici di Pauli	131
A.6.2	Relazioni utili	131
A.7	Teoria Perturbativa indipendente dal tempo	131
A.8	Teoria Perturbativa dipendente dal tempo	132
A.9	Approssimazione di Born	133
Bibliografia		135