Klemens Burg, Herbert Haf,
Friedrich Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure

Klemens Burg, Herbert Haf,
Friedrich Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure

Band II: Lineare Algebra

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Bearbeitet von Prof. Dr. rer. nat. Herbert Haf, Universität Kassel
und Prof. Dr. rer. nat. Andreas Meister, Universität Kassel

Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. rer. nat. Klemens Burg †, geb. 1934 in Bochum. 1954-1956 Tätigkeit in der Industrie. 1956 -1961 Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen. 1961 Diplomprüfung in Mathematik. 1964 Promotion, 1961-1973 Wiss. Ass. und Akad. Rat/Oberrat, 1970 Habilitation. 1973-1975 Wiss. Rat und Prof. an der Universität Karlsruhe. 1975-2002 Prof. für Ingenieurmathematik an der Universität Kassel. Arbeitsgebiete: Mathematische Physik, Ingenieurmathematik

Prof. Dr. rer. nat. Herbert Haf, geb. 1938 in Pfronten/Allgäu. 1956-1960 Studium der Feinwerktechnik-Optik am Oskar-von-Miller-Polytechnikum München. 1960-1966 Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen. 1966 Diplomprüfung in Mathematik. 1966-1970 Wiss. Ass., 1968 Promotion. 1970-1974 Akad. Rat/Oberrat an der Universität Stuttgart. 1968-1974 Lehraufträge an der Universität Stuttgart. 1974-2003 Prof. für Mathematik (Analysis) an der Universität Kassel. Arbeitsgebiete: Funktionalanalysis, Verzweigungstheorie, Approximationstheorie

Prof. Dr. rer. nat. Friedrich Wille †, geb. 1935 in Bremen. 1955-1961 Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten Marburg, Berlin und Göttingen. 1961 Diplom, anschließend Industriepraxis. 1963-1968 Wiss. Mitarb. der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA) Göttingen. 1965 Promotion, Leiter des Rechenzentrums Göttingen. 1968-1971 Wiss. Ass. der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFVLR). 1970 Battelle-Institut Genf. 1971 Habilitation, 1972 Wiss. Rat und Prof. in Düsseldorf. 1973-1995 Prof. für Angewandte Mathematik an der Universität Kassel. Arbeitsgebiete: Aeroelastik, Nichtlineare Analysis, math. Modellierung

Prof. Dr. rer. nat. Andreas Meister, geb. 1966 in Einbeck. 1987-1993 Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Georg-August-Universität Göttingen. 1993 Diplomprüfung in Mathematik. 1993-1996 Promotionsstipendium an der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt in Göttingen, 1996 Promotion an der TH Darmstadt. 1996 Wiss. Mitarb. am Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik Kaiserslautern. 1996-1997 Wiss. Mitarb., 1997-2002 Wiss. Ass. an der Universität Hamburg. 2001 Habilitation und Privatdozent am FB Mathematik der Universität Hamburg. 2002-2003 Hochschuldozent an der Universität zu Lübeck. Seit 2003 Prof. für Angewandte Mathematik an der Universität Kassel. Arbeitsgebiete: Numerik partieller Differentialgleichungen und Numerik linearer Gleichungssysteme.

1. Auflage 1987
5., überarbeitete und erweiterte Auflage März 2007

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B. G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.teubner.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0111-1

Vorwort

Der vorliegende Band II der Höheren Mathematik für Ingenieure enthält eine in sich geschlossene Darstellung der »Linearen Algebra« mit vielfältigen Bezügen zur Technik und Naturwissenschaft.

Adressaten sind in erster Linie Ingenieurstudenten, aber auch Studenten der Angewandten Mathematik und Physik, etwa der Richtungen Technomathematik, mathematische Informatik, theoretische Physik. Sicherlich wird auch der »reine« Mathematiker für ihn Interessantes in dem Buch finden.

Der Band ist — bis auf wenige Querverbindungen — unabhängig vom Band I »Analysis« gestaltet, so daß man einen Kursus über Ingenieurmathematik auch mit dem vorliegenden Buch beginnen kann. (Beim Studium der Elektrotechnik wird z.B. gerne mit Linearer Algebra begonnen.) Vorausgesetzt werden lediglich Kenntnisse aus der Schulmathematik.

Auch die einzelnen Abschnitte des Buches sind mit einer gewissen Unabhängigkeit voneinander konzipiert, so daß Quereinstiege möglich sind. Dem Leser, der schon einen ersten Kursus über Lineare Algebra absolviert hat, steht mit diesem Band ein Nachschlagewerk zur Verfügung, welches ihm in der Praxis oder beim Examen eine Hilfe ist.

Die Bedeutung der Linearen Algebra für Technik und Naturwissenschaft ist in diesem Jahrhundert stark gestiegen. Insbesondere ist die Matrizen-Rechnung, die sich erst in den dreißiger Jahren in Physik und Technik durchzusetzen begann, heute ein starkes Hilfsmittel in der Hand des Ingenieurs. Darüber hinaus führt die Synthese von Linearer Algebra und Analysis zur Funktionalanalysis, die gerade in den letzten Jahrzehnten zu einem leistungsfähigen theoretischen Instrumentarium für Naturwissenschaft und Technik geworden ist.

Im ganzen erweist sich die Lineare Algebra — abgesehen von der elementaren Vektorrechnung — als ein Stoff mit höherem Abstraktionsgrad als er bei der Analysis auftritt. Obwohl dies dem Ingenieurstudenten zu Anfang gewisse Schwierigkeiten bereiten kann, so entspricht es doch der Entwicklung unserer heutigen Technik, die nach immer effektiveren mathematischen Methoden verlangt.

Zum **Inhalt**: Im Abschnitt 1 wird die Vektorrechnung in der Ebene und im dreidimensionalen Raum ausführlich entwickelt. Ihre Verwendbarkeit wird an vielen Anwendungsbeispielen aus dem Ingenieurbereich gezeigt.

Im Abschnitt 2 werden endlichdimensionale Vektorräume behandelt, wobei mit dem Spezialfall des $\mathbb{R}^n$ begonnen wird, sowie dem Gaußschen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssyteme. Der Gaußsche Algorithmus zieht sich dann als Schlüsselmethode sowohl bei praktischen wie bei theoretischen Folgerungen durch das ganze Buch.

Im zweiten Teil des Abschnittes 2 werden algebraische Grundstrukturen (Gruppen, Körper sowie Vektorräume in moderner abstrakter Form eingeführt. Diesen Teil mag der Ingenieurstudent beim ersten Durchgang überspringen, wenngleich die algebraischen Strukturen für ein späteres tieferes Verständnis notwendig sind.

Der Abschnitt 3 enthält dann in ausführlicher Form die Theorie der Matrizen, verbunden mit linearen Gleichungssystemen, Eigenwertproblemen und geometrischen Anwendungen im dreidimensionalen Raum. Zu diesem mächtigen Instrument für Theorie und Anwendung werden überdies numerische Verfahren für den Computereinsatz angegeben, und zwar bei linearen Gleichungssytemen mit kleinen und großen (schwach besetzten) Matrizen, sowie bei Eigenwertproblemen.

Der vierte Abschnitt behandelt in exemplarischer Weise aktuelle Anwendungen der Linearen Algebra auf die Theorie der Stabwerke, der elektrischen Netzwerke, sowie der Robotik. Hier wird insbesondere ein Einblick in die Kinematik technischer Roboter gegeben.

Da der Band weit mehr Stoff enthält, als man in einer Vorlesung unterbringen kann, ließe sich ein Kursus für Anfänger an Hand des folgenden »Fahrplans« zusammenstellen:

- Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (Auswahl aus Abschnitt 1)
- Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$, lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus (Abschnitte 2.1 und 2.2 bis 2.2.4)
- Matrizenrechnung (Auswahl aus 3.1-3.3, dazu 3.5.1)
- Determinanten (Auswahl aus 3.4, Schwerpunkt 3.4.9)
- Lineare Gleichungssysteme (Abschnitte 3.6.1 und 3.6.3)[1]
- Eigenwerte und Eigenvektoren (3.7.1, 3.7.2, 3.7.5; Auswahl aus 3.7.3 und 3.7.4)[1]
- Matrix-Polynome (Auswahl aus 3.9.1-3.9.3)
- Drehungen, Koordinatentransformationen (Abschnitte 3.10.1, 3.10.3, 3.10.6 und
- 3.10.8: Satz über Hauptachsentransformation ohne Beweis)
- Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung (Abschnitte 3.10.9, 3.10.10, zur Erholung, falls noch Zeit bleibt)

Durch eingestreute Anwendungen, insbesondere aus dem Abschnitt 4, läßt sich der Stoff anreichern.

Das Buch ist in Zusammenarbeit aller drei Verfasser entstanden. Die Kapitel 1 und 2, die Abschnitte 3.1 bis 3.8 sowie Abschnitt 3.10 wurden von Friedrich Wille verfaßt. Das Anwendungskapitel 4, Abschnitt 3.9 und einige weitere Teile stammen von Herbert Haf. Dabei wurden beide Autoren durch ein Skriptum von Klemens Burg unterstützt.

Die Autoren danken Herrn Doz.Dr. W. Strampp, Herrn Dr. B. Billhardt und Herrn F. Renner für geleistete Korrekturarbeiten und Aufgabenlösungen. Herrn K. Strube gilt unser Dank für das sorgfältige Anfertigen der Bilder und Frau E. Münstedt für begleitende Schreibarbeiten. Unser besonderer Dank gilt Frau F. Ritter, die mit äußerster Sorgfalt den allergrößten Teil der Reinschrift erstellt hat. Schließlich danken wir dem Teubner-Verlag für geduldige und hilfreiche Zusammenarbeit in allen Phasen.

Die günstige Aufnahme dieses Bandes erfordert schon nach kurzer Zeit eine Neuauflage. Der Text ist gegenüber der Erstauflage unverändert geblieben. Es wurden lediglich einige Figuren

---

1 Man beachte, daß in der Neuauflage aus Abschnitt 3.6 Abschnitt 3.8 wurde (also aus 3.6.1 3.8.1 usw.) und aus Abschnitt 3.7 der Abschnitt 3.6 (also aus 3.7.1 3.6.1 usw.).

verbessert und Druckfehler ausgemerzt. Die Verfasser erhoffen ein weiterhin positives Echo auch dieser Auflage durch den Leser.

Kassel, September 1989 *Die Verfasser*

Vorwort zur fünften Auflage

Die vorliegende fünfte Auflage des Bandes »Lineare Algebra« stellt eine Überarbeitung und Erweiterung der früheren Auflage dar. Dabei wurden die Numerik-Anteile mit Rücksicht auf die Anwender deutlich erweitert und durch die Angabe von MATLAB-Programmen ergänzt. Ferner haben wir den Abschnitt über lineare Ausgleichsprobleme ausgebaut und, wie wir meinen, im Gesamtkontext günstiger plaziert (s. Abschn. 3.11).

Die Verfasser hoffen nun, daß dieser zweite Band unseres sechsteiligen Gesamtwerkes »Mathematik für Ingenieure« auch weiterhin eine freundliche Aufnahme durch die Leser findet. Für Anregungen sind wir dankbar.

Unser Dank gilt insbesondere Herrn Dr.-Ing. Jörg Barner für die Erstellung der hervorragenden LaTeX-Vorlage und seine sorgfältige und mitdenkende Unterstützung bei den Korrekturen, ferner Frau Jennylee Müller für ihr gewissenhaftes Korrekturlesen. Erneut besteht dem Verlag B.G. Teubner gegenüber Anlaß zum Dank für eine bewährte und angenehme Zusammenarbeit.

Kassel, Februar 2007 *Herbert Haf, Andreas Meister*

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen **1**

1.1 Vektoren in der Ebene . . . 1

1.1.1 Kartesische Koordinaten und Zahlenmengen . . . 1

1.1.2 Winkelfunktionen und Polarkoordinaten . . . 3

1.1.3 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ . . . 8

1.1.4 Physikalische und technische Anwendungen . . . 13

1.1.5 Inneres Produkt (Skalarprodukt) . . . 22

1.1.6 Parameterform und Hessesche Normalform einer Geraden . . . 26

1.1.7 Geometrische Anwendungen . . . 32

1.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum . . . 41

1.2.1 Der Raum $\mathbb{R}^3$ . . . 41

1.2.2 Inneres Produkt (Skalarprodukt) . . . 46

1.2.3 Dreireihige Determinanten . . . 49

1.2.4 Äußeres Produkt (Vektorprodukt) . . . 50

1.2.5 Physikalische, technische und geometrische Anwendungen . . . 55

1.2.6 Spatprodukt, mehrfache Produkte . . . 63

1.2.7 Lineare Unabhängigkeit . . . 67

1.2.8 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . 70

2 Vektorräume beliebiger Dimensionen **75**

2.1 Die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ . . . 75

2.1.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$ und seine Arithmetik . . . 75

2.1.2 Inneres Produkt, Beträge von Vektoren . . . 76

2.1.3 Unterräume, lineare Mannigfaltigkeiten . . . 78

2.1.4 Geometrie im $\mathbb{R}^n$, Winkel, Orthogonalität . . . 82

2.1.5 Der Raum $\mathbb{C}^n$ . . . 85

2.2 Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus . . . 86

2.2.1 Lösung quadratischer Gleichungssysteme . . . 87

2.2.2 Matlab-Programme zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme . . . 90

2.2.3 Singuläre lineare Gleichungssysteme . . . 96

2.2.4 Allgemeiner Satz über die Lösbarkeit linearer quadratischer Gleichungssysteme 101

2.2.5 Rechteckige Systeme, Rangkriterium . . . 104

2.3 Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper . . . 106

2.3.1 Einführung: Beispiel einer Gruppe . . . 106

2.3.2 Gruppen . . . 109

2.3.3 Endliche Permutationsgruppen . . . 114

2.3.4 Homomorphismen, Nebenklassen . . . 116

2.3.5 Körper . . . 119

2.4 Vektorräume über beliebigen Körpern . . . 121
2.4.1 Definition und Grundeigenschaften . . . 121
2.4.2 Beispiele für Vektorräume . . . 123
2.4.3 Unterräume, Basis, Dimension . . . 125
2.4.4 Direkte Summen, freie Summen . . . 130
2.4.5 Lineare Abbildungen: Definition und Beispiele . . . 133
2.4.6 Isomorphismen, Konstruktion linearer Abbildungen . . . 136
2.4.7 Kern, Bild, Rang . . . 139
2.4.8 Euklidische Vektorräume, Orthogonalität . . . 141
2.4.9 Ausblick auf die Funktionalanalysis . . . 143

3 Matrizen 147
3.1 Definition, Addition, s-Multiplikation . . . 147
3.1.1 Motivation . . . 147
3.1.2 Grundlegende Begriffsbildung . . . 147
3.1.3 Addition, Subtraktion und s-Multiplikation . . . 149
3.1.4 Transposition, Spalten-und Zeilenmatrizen . . . 152
3.2 Matrizenmultiplikation . . . 154
3.2.1 Matrix-Produkt . . . 154
3.2.2 Produkte mit Vektoren . . . 157
3.2.3 Matrizen und lineare Abbildungen . . . 158
3.2.4 Blockzerlegung . . . 162
3.3 Reguläre und inverse Matrizen . . . 164
3.3.1 Reguläre Matrizen . . . 164
3.3.2 Inverse Matrizen . . . 166
3.4 Determinanten . . . 168
3.4.1 Definition, Transpositionsregel . . . 169
3.4.2 Regeln für Determinanten . . . 171
3.4.3 Berechnung von Determinanten mit dem Gaußschen Algorithmus . . . 174
3.4.4 Matrix-Rang und Determinanten . . . 178
3.4.5 Der Determinanten-Multiplikationssatz . . . 180
3.4.6 Lineare Gleichungssysteme: die Cramersche Regel . . . 181
3.4.7 Inversenformel . . . 183
3.4.8 Entwicklungssatz . . . 186
3.4.9 Zusammenstellung der wichtigsten Regeln über Determinanten . . . 189
3.5 Spezielle Matrizen . . . 191
3.5.1 Definition der wichtigsten speziellen Matrizen . . . 191
3.5.2 Algebraische Strukturen von Mengen spezieller Matrizen . . . 195
3.5.3 Orthogonale und unitäre Matrizen . . . 197
3.5.4 Symmetrische Matrizen und quadratische Formen . . . 200
3.5.5 Zerlegungen und Transformationen symmetrischer Matrizen . . . 201
3.5.6 Positiv definite Matrizen und Bilinearformen . . . 204
3.5.7 Kriterien für positiv definite Matrizen . . . 206
3.5.8 Direkte Summe und direktes Produkt von Matrizen . . . 209
3.6 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 211

3.6.1 Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . 211
3.6.2 Anwendung: Schwingungen . . . 214
3.6.3 Eigenschaften des charakteristischen Polynoms . . . 217
3.6.4 Eigenvektoren und Eigenräume . . . 223
3.6.5 Symmetrische Matrizen und ihre Eigenwerte . . . 228
3.7 Die Jordansche Normalform . . . 235
3.7.1 Praktische Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform . . . 240
3.7.2 Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte einer Matrix mit dem Krylov-Verfahren . . . 249
3.7.3 Das Jacobi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen . . . 251
3.7.4 Von-Mises-Iteration, Deflation und inverse Iteration zur numerischen Eigenwert- und Eigenvektorberechnung . . . 254
3.8 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen . . . 260
3.8.1 Rangkriterium . . . 260
3.8.2 Quadratische Systeme, Fredholmsche Alternative . . . 262
3.8.3 Dreieckszerlegung von Matrizen durch den Gaußschen Algorithmus, Cholesky-Verfahren . . . 264
3.8.4 Lösung großer Gleichungssysteme . . . 269
3.8.5 Einzelschrittverfahren . . . 277
3.9 Matrix-Funktionen . . . 282
3.9.1 Matrix-Potenzen . . . 282
3.9.2 Matrixpolynome . . . 284
3.9.3 Annullierende Polynome, Satz von Cayley-Hamilton . . . 286
3.9.4 Das Minimalpolynom einer Matrix . . . 291
3.9.5 Folgen und Reihen von Matrizen . . . 293
3.9.6 Potenzreihen von Matrizen . . . 296
3.9.7 Matrix-Exponentialfunktion, Matrix-Sinus- und Matrix-Cosinus-Funktion . . . 300
3.10 Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen . . . 304
3.10.1 Drehungen und Spiegelungen in der Ebene . . . 305
3.10.2 Spiegelung im $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung . . . 307
3.10.3 Drehungen im dreidimensionalen Raum . . . 310
3.10.4 Spiegelungen und Drehspiegelungen im dreidimensionalen Raum . . . 317
3.10.5 Basiswechsel und Koordinatentransformation . . . 318
3.10.6 Transformation bei kartesischen Koordinaten . . . 321
3.10.7 Affine Abbildungen und affine Koordinatentransformationen . . . 323
3.10.8 Hauptachsentransformation von Quadriken . . . 325
3.10.9 Kegelschnitte . . . 330
3.10.10 Flächen zweiten Grades: Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloide . . . 333
3.11 Lineare Ausgleichsprobleme . . . 337
3.11.1 Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate . . . 337
3.11.2 Lösung der Normalgleichung . . . 346
3.11.3 Lösung des Minimierungsproblems . . . 347

4 Anwendungen **359**
4.1 Technische Strukturen 359
4.1.1 Ebene Stabwerke 359
4.1.2 Elektrische Netzwerke 366
4.2 Roboter-Bewegung 376
4.2.1 Einführende Betrachtungen 376
4.2.2 Kinematik eines $(n + 1)$-gliedrigen Roboters 377

Anhang **387**

A Lösungen zu den Übungen **389**

Symbole **397**

Literaturverzeichnis **399**

Stichwortverzeichnis **405**

Band I: Analysis (F. Wille†, bearbeitet von H. Haf, A. Meister)

1 Grundlagen

1.1 Reelle Zahlen
1.2 Elementare Kombinatorik
1.3 Funktionen
1.4 Unendliche Folgen reeller Zahlen
1.5 Unendliche Reihen reeller Zahlen
1.6 Stetige Funktionen

2 Elementare Funktionen

2.1 Polynome
2.2 Rationale und algebraische Funktionen
2.3 Trigonometrische Funktionen
2.4 Exponentialfunktionen, Logarithmus, Hyperbelfunktionen
2.5 Komplexe Zahlen

3 Differentialrechnung einer reellen Variablen

3.1 Grundlagen der Differentialrechnung
3.2 Ausbau der Differentialrechnung
3.3 Anwendungen

4 Integralrechnung einer reellen Variablen

4.1 Grundlagen der Integralrechnung
4.2 Berechnung von Integralen
4.3 Uneigentliche Integrale
4.4 Anwendung: Wechselstromrechnung

5 Folgen und Reihen von Funktionen

5.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen
5.2 Potenzreihen
5.3 Der Weierstraß'sche Approximationssatz
5.4 Interpolation
5.5 Fourierreihen

6 Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler

6.1 Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$
6.2 Abbildungen im $\mathbb{R}^n$
6.3 Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen
6.4 Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen

7 Integralrechnung mehrerer reeller Variabler

7.1 Integration bei zwei Variablen
7.2 Allgemeinfall: Integration bei mehreren Variablen
7.3 Parameterabhängige Integrale

Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen (H. Haf)

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen

1.1 Was ist eine Differentialgleichung?
1.2 Differentialgleichungen 1-ter Ordnung
1.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung
1.4 Ebene autonome Systeme

2 Lineare Differentialgleichungen

2.1 Lösungsverhalten
2.2 Homogene lineare Systeme 1-ter Ordnung
2.3 Inhomogene lineare Systeme 1-ter Ordnung
2.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung
2.5 Beispiele mit Mathematica

3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

3.1 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung
3.2 Lineare Systeme 1-ter Ordnung
3.3 Beispiele mit Mathematica

4 Potenzreihenansätze und Anwendungen

4.1 Potenzreihenansätze
4.2 Verallgemeinerte Potenzreihenansätze

5 Rand- und Eigenwertprobleme. Anwendungen

5.1 Rand- und Eigenwertprobleme
5.2 Anwendung auf eine partielle Differentialgleichung
5.3 Anwendung auf ein nichtlineares Problem

Distributionen

6 Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs

6.1 Motivierung und Definition
6.2 Distributionen als Erweiterung der klassischen Funktionen

7 Rechnen mit Distributionen. Anwendungen

7.1 Rechnen mit Distributionen
7.2 Anwendungen

Integraltransformationen

8 Fouriertransformation

8.1 Motivierung und Definition
8.2 Umkehrung der Fouriertransformation
8.3 Eigenschaften der Fouriertransformation
8.4 Anwendung auf partielle Differentialgleichungsprobleme
8.5 Diskrete Fouriertransformation

9 Laplacetransformation

9.1 Motivierung und Definition
9.2 Umkehrung der Laplacetransformation
9.3 Eigenschaften der Laplacetransformation
9.4 Anwendungen auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

10 $\mathfrak{Z}$-Transformation

10.1 Motivierung und Definition
10.2 Eigenschaften der $\mathfrak{Z}$-Transformation
10.3 Anwendungen auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

Band Vektoranalysis: (F. Wille†, bearbeitet von H. Haf)

1 Kurven

1.1 Wege, Kurven, Bogenlänge
1.2 Theorie ebener Kurven
1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte
1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen
1.5 Theorie räumlicher Kurven
1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale

2 Flächen und Flächenintegrale

2.1 Flächenstücke und Flächen
2.2 Flächenintegrale

3 Integralsätze

3.1 Der Gaußsche Integralsatz
3.2 Der Stokessche Integralsatz

3.3 Weitere Differential- und Integralformeln im $\mathbb{R}^3$
3.4 Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale

4 Alternierende Differentialformen

4.1 Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^3$
4.2 Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

5 Kartesische Tensoren

5.1 Tensoralgebra
5.2 Tensoranalysis

Band Funktionentheorie: (H. Haf)

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen
1.2 Funktionen einer komplexen Variablen

2 Holomorphe Funktionen

2.1 Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie
2.2 Komplexe Integration
2.3 Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse
2.4 Asymptotische Abschätzungen

3 Isolierte Singularitäten, Laurent-Entwicklung

3.1 Laurentreihen
3.2 Residuensatz und Anwendungen

4 Konforme Abbildungen

4.1 Einführung in die Theorie konformer Abbildungen
4.2 Anwendungen auf die Potentialtheorie

5 Anwendung der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung

5.1 Die Besselsche Differentialgleichung
5.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen
5.3 Anwendungen

Band Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen: (H. Haf)

Funktionalanalysis

1 Grundlegende Räume

1.1 Metrische Räume
1.2 Normierte Räume. Banachräume

1.3 Skalarprodukträume. Hilberträume

2 Lineare Operatoren in normierten Räumen

2.1 Beschränkte lineare Operatoren
2.2 Fredholmsche Theorie in Skalarprodukträumen
2.3 Symmetrische vollstetige Operatoren

3 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$ und zugehörige Sobolevräume

3.1 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$
3.2 Sobolevräume

Partielle Differentialgleichungen

4 Einführung

4.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung?
4.2 Lineare partielle Differentialgleichungen 1-ter Ordnung
4.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

5 Helmholtzsche Schwingungsgleichung und Potentialgleichung

5.1 Grundlagen
5.2 Ganzraumprobleme
5.3 Randwertprobleme
5.4 Ein Eigenwertproblem der Potentialtheorie
5.5 Einführung in die Finite-Elemente-Methode (F. Wille†)

6 Die Wärmeleitungsgleichung

6.1 Rand- und Anfangswertprobleme
6.2 Ein Anfangswertproblem

7 Die Wellengleichung

7.1 Die homogene Wellengleichung
7.2 Die inhomogene Wellengleichung

8 Die Maxwellschen Gleichungen

8.1 Die stationären Maxwellschen Gleichungen
8.2 Randwertprobleme

9 Hilbertraummethoden

9.1 Einführung
9.2 Das schwache Dirichletproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
9.3 Das schwache Neumannproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
9.4 Zur Regularitätstheorie beim Dirichletproblem