

Heinrich Holland/Doris Holland

Mathematik im Betrieb

Heinrich Holland/Doris Holland

# **Mathematik im Betrieb**

Praxisbezogene Einführung mit Beispielen

8., aktualisierte Auflage



Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

**Professor Dr. Heinrich Holland** lehrt Quantitative Methoden der Betriebswirtschaftslehre und Marketing an der University of Applied Sciences in Mainz.

**Doris Holland** ist Dozentin für Wirtschaftsmathematik und Operations Research an den Fachhochschulen Mainz und Worms sowie Unternehmensberaterin.

1. Auflage 1989

.

.

7., überarbeitete Auflage Oktober 2004

8., aktualisierte Auflage September 2006

Alle Rechte vorbehalten

© Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Jutta Hauser-Fahr / Renate Schilling

Der Gabler Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.

[www.gabler.de](http://www.gabler.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss GmbH, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN-10 3-8349-0318-3

ISBN-13 978-3-8349-0318-1

# Vorwort

Das vorliegende Buch deckt den Stoff der Vorlesung Wirtschaftsmathematik ab. Es legt damit die Grundlagen, die im weiteren Verlauf des Studiums benötigt werden.

Nach dem Motto „Warum kompliziert, wenn es auch einfach geht?“, werden komplexe Bereiche der Wirtschaftsmathematik übersichtlich Schritt für Schritt auch für mathematisch „unerfahrene“ Studierende erläutert.

Die mathematischen Verfahren werden mit ihren Anwendungsmöglichkeiten in der betrieblichen Praxis dargestellt. Dabei wird bewusst weitestgehend auf eine mathematisch-wissenschaftliche Fachsprache verzichtet. Nicht die mathematische Eleganz steht im Vordergrund, sondern die praktische Umsetzung der Verfahren. Mathematische Beweise und Herleitungen sind an den Stellen enthalten, an denen sie zum Verständnis des Stoffes beitragen.

Das Buch hat das Ziel, dem Leser durch diese pragmatische Darstellungsweise die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik nahe zu bringen. Übersichtlich strukturierte Schemata geben dabei eine Hilfestellung.

Aus diesem Grund wird ein besonderer Wert darauf gelegt, in jedem Kapitel den Stoff anhand von Beispielaufgaben, die aus dem Bereich der Wirtschaft stammen, zu erläutern und zu vertiefen.

Weitere Aufgaben mit Musterlösungen machen es möglich, den Stoff selbst zu erarbeiten. Sie können zur Selbstkontrolle und zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden.

Ergänzend haben wir eine Fallstudie in das Buch aufgenommen, die den behandelten Stoff anhand einer betriebswirtschaftlichen Unternehmenssituation wiederholt. Die Fallstudie zeigt die Verbindung zwischen der Wirtschaftsmathematik und der Betriebswirtschaftslehre auf und wird durch eine ausführliche Lösung im Anhang vervollständigt.

Für die jetzt vorliegende achte Auflage wurde der komplette Inhalt durchgesehen und aktualisiert.

Doris und Heinrich Holland

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V	
1	Mathematische Grundlagen	1
1.1	Zahlbegriffe	1
1.2	Potenzen	2
1.3	Wurzeln	5
1.4	Logarithmen	9
1.5	Exponentialgleichungen	10
1.6	Summenzeichen	11
2	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	17
2.1	Funktionsbegriff	17
2.2	Darstellungsformen	19
2.3	Umkehrfunktionen	22
2.4	Lineare Funktionen	25
2.5	Ökonomische lineare Funktionen	29
2.6	Nichtlineare Funktionen und ihre ökonomische Anwendung	40
2.6.1	Problemstellung	40
2.6.2	Parabeln	40
2.6.3	Hyperbeln	45
2.6.4	Wurzelfunktionen	46
2.6.5	Exponentialfunktionen	48
2.6.6	Logarithmusfunktionen	49
3	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	51
3.1	Begriff	51
3.2	Analytische Darstellung	52
3.3	Tabellarische Darstellung	52
3.4	Grafische Darstellung	53
3.4.1	Grundlagen	53
3.4.2	Lineare Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen	55
3.4.3	Nichtlineare Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen	57
3.5	Ökonomische Anwendung	61

4	Eigenschaften von Funktionen	67
4.1	Nullstellen, Extrema, Steigung, Krümmung, Symmetrie	67
4.2	Grenzwerte	73
4.3	Stetigkeit	77
5	Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	83
5.1	Problemstellung	83
5.2	Die Steigung von Funktionen und der Differentialquotient	83
5.3	Differenzierungsregeln	87
5.3.1	Ableitung elementarer Funktionen	87
5.3.2	Differentiation verknüpfter Funktionen	88
5.3.3	Höhere Ableitungen	94
5.4	Anwendungen der Differentialrechnung	96
5.4.1	Extrema	96
5.4.2	Steigung einer Funktion	101
5.4.3	Krümmung einer Funktion	104
5.4.4	Wendepunkte	105
5.5	Kurvendiskussion	106
5.6	Newtonsches Näherungsverfahren	110
5.7	Wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung	114
5.7.1	Bedeutung der Differentialrechnung für die Wirtschaftswissenschaften	114
5.7.2	Differentiation wichtiger wirtschaftlicher Funktionen	115
5.7.2.1	Kostenfunktion	115
5.7.2.2	Umsatzfunktion	117
5.7.2.3	Gewinnfunktion	119
5.7.2.4	Gewinnmaximierung	120
5.7.2.5	Cournotscher Punkt	122
5.7.2.6	Optimale Bestellmenge	126
5.7.2.7	Elastizitäten	130
6	Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	137
6.1	Partielle erste Ableitung	137
6.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	140
6.3	Extremwertbestimmung	142
6.4	Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen	145
6.4.1	Problemstellung	145
6.4.2	Variablensubstitution	147
6.4.3	Multiplikatorregel nach Lagrange	148

7	Grundlagen der Integralrechnung	155
7.1	Unbestimmtes Integral	155
7.2	Bestimmtes Integral	158
7.3	Wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen	163
8	Matrizenrechnung	169
8.1	Bedeutung der Matrizenrechnung	169
8.2	Begriff der Matrix	169
8.3	Spezielle Matrizen	171
8.4	Matrizenoperationen	174
8.4.1	Gleichheit von Matrizen	174
8.4.2	Transponierte von Matrizen	174
8.4.3	Addition von Matrizen	175
8.4.4	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	176
8.4.5	Skalarprodukt von Vektoren	176
8.4.6	Multiplikation von Matrizen	178
8.4.7	Inverse einer Matrix	185
8.4.8	Input-Output-Analyse	187
8.5	Lineare Gleichungssysteme	196
8.5.1	Problemstellung und ökonomische Bedeutung	196
8.5.2	Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise	197
8.5.3	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	200
8.5.4	Rang einer Matrix	202
8.5.5	Lösung linearer Gleichungssysteme	202
8.5.6	Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems	209
8.5.7	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung	212
9	Lineare Optimierung	217
9.1	Ungleichungen	217
9.2	Grafische Methode der linearen Optimierung	222
9.3	Analytische Methode der linearen Optimierung	232
9.3.1	Problemstellung	232
9.3.2	Simplex-Methode	235
9.3.3	Verkürztes Simplex-Tableau	241
10	Finanzmathematik	253
10.1	Grundlagen der Finanzmathematik	253
10.1.1	Folgen	253
10.1.2	Reihen	259
10.1.3	Grenzwerte von Folgen	265
10.1.4	Grenzwerte von Reihen	268

10.2	Finanzmathematische Verfahren	270
10.2.1	Abschreibungen	270
10.2.2	Zinsrechnung	276
10.2.2.1	Begriffe der Zinsrechnung	276
10.2.2.2	Einfache Verzinsung	277
10.2.2.3	Zinseszinsrechnung	278
10.2.2.4	Unterjährige Verzinsung	281
10.2.2.5	Stetige Verzinsung	284
10.2.3	Rentenrechnung	287
10.2.4	Tilgungsrechnung	291
10.2.5	Investitionsrechnung	294
10.2.5.1	Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung	294
10.2.5.2	Kapitalwertmethode	294
10.2.5.3	Annuitätenmethode	298
10.2.5.4	Interne Zinsfußmethode	298
10.2.5.5	Kritische Werte-Rechnung (Break-Even-Analyse)	303
11	Kombinatorik	307
11.1	Grundlagen	307
11.2	Permutationen	309
11.3	Kombinationen	311
11.4	Die Formeln zur Kombinatorik	320
12	Fallstudie	325
13	Lösungen der Übungsaufgaben	333
14	Lösungen zur Fallstudie	365
	Stichwortverzeichnis	377