

Christoph Mayer / Carsten Weber / David Francas

Lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler

Christoph Mayer / Carsten Weber
David Francas

Lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler

Mit Aufgaben und Lösungen

4., durchgesehene
und korrigierte Auflage



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.



Dr. Christoph Mayer arbeitet im Konzernrisikomanagement der EnBW Energie Baden-Württemberg AG. Daneben ist er Lehrbeauftragter für Wirtschaftsmathematik an der Fachhochschule Ludwigshafen.



Dr. Carsten Weber arbeitet bei der BASF SE. Er betreute zunächst die betriebliche Altersversorgung und ist nun verantwortlich für Vergütung innerhalb der BASF Gruppe weltweit.



Dr. David Francas arbeitet als Berater bei der Camelot Management Consultants AG und berät Unternehmen in den Bereichen Netzwerkdesign, Lean Supply Chain Management und mehrstufige Bestandsoptimierung.

1. Auflage 2004
 2. Auflage 2005
 3. Auflage 2007
- Nachdruck 2008
4., durchgesehene und korrigierte Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Gabler Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Irene Buttkus | Renate Schilling

Gabler Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.gabler.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Ten Brink, Meppel

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in the Netherlands

ISBN 978-3-8349-2970-9

Geleitwort

Fundierte mathematische Kenntnisse sind ein integrativer Bestandteil des Studiums der Wirtschaftswissenschaften. Insbesondere ein tief greifendes Verständnis der Linearen Algebra ist unumgänglich. Die sich aus der Matrixrechnung ergebenden Vereinfachungen in struktureller Hinsicht zählen zum Standardrepertoire der grundlegenden und weiterführenden wirtschaftswissenschaftlichen Methoden. Ohne eine Kenntnis dieser Grundlagen sind der akademischen Weiterbildung Grenzen gesetzt.

Das vorliegende Lehrbuch ermöglicht es, diese Grenzen zu durchbrechen. Es setzt keinerlei Vorwissen im Bereich der Linearen Algebra voraus und befähigt somit jeden Leser, sich umfassende Kenntnisse zu verschaffen. Das Buch eignet sich besonders für den Einsatz während des wirtschaftswissenschaftlichen Studiums, bzw. dessen Vorbereitung, ist aber auch bei einer praktischen Implementierung matrixgestützter Anwendungen sehr hilfreich.

Den Autoren gelingt es in ihrem Werk, durch das Einbinden zahlreicher Beispiele das Verständnis der theoretischen Erklärungen zu erleichtern. Die gewählte Untergliederung in mathematische Grundlagenkapitel und ökonomische Anwendungen, welche einen Bezug zu betriebs- und volkswirtschaftlichen Problemen herstellen, überzeugt dabei in vollem Maße. So finden die wichtigsten ökonomischen Modellformulierungen aus der Linearen Algebra, wie beispielsweise das Leontief-Modell und ein Modell der linearen Programmierung, besonderen Eingang in das Lehrbuch.

Diesem rundum gelungenen Buch wünsche ich die verdiente breite Anerkennung in der akademischen Lehre.

Mannheim, Januar 2004

Prof. Dr. Peter Albrecht

Vorwort zur vierten Auflage

Das vorliegende Lehrbuch ermöglicht einen Einstieg in die Lineare Algebra ohne jegliche Vorkenntnisse und schafft ein Basiswissen, welches einen Großteil der Anwendungen der Matrixrechnung aus Betriebs- und Volkswirtschaftslehre abdeckt. Zunächst als ein die Lehre begleitendes Skriptum konzipiert, hat sich der Inhalt dieses Lehrbuches an der Universität Mannheim über Jahre hinweg bewährt und wurde ständig verbessert, überarbeitet und erweitert. Die vierte Auflage setzt wenige kleinere Änderungen um und ist im Vergleich zur dritten Auflage weitgehend unverändert.

Der Aufbau des Buches ist zweckmäßig und aus systematischer Sicht naheliegend. Nach einer Definition des Rechenobjektes Matrix und der grundlegenden Matrixoperationen folgt eine Anwendung der Matrixrechnung zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Anschließend wird die Matrixinversion, die Determinante sowie der Rang einer Matrix eingeführt und deren vielseitige Verwendung, insbesondere bei der Lösung linearer Gleichungssysteme, ausführlich dargestellt. Anhand der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung, der innerbetrieblichen Materialverflechtung und des Leontief-Modells werden ökonomische Anwendungen der vermittelten Kenntnisse demonstriert. Nach einer Einordnung der Matrixrechnung innerhalb der Vektorraumtheorie folgt schließlich die Betrachtung der linearen Programmierung.

Um dem Leser die theoretischen Formulierungen zu verdeutlichen, werden Definitionen und Herleitungen nicht lediglich aneinandergereiht. Ausführliche Beispiele veranschaulichen die dargestellten Sachverhalte. Einen besonderen Höhepunkt bildet die umfangreiche Aufgabensammlung zu jedem Kapitel inklusive Lösungsteil. Somit wird eine Anwendung des vermittelten Wissens und die Überprüfung des Lernerfolges ermöglicht, was ein Selbststudium erleichtert.

Wir bedanken uns bei allen, die uns bei der Verwirklichung dieses Buches unterstützt haben. Unser besonderer Dank gilt den Herren Simon Hilpert und Frank Schilbach, die einige Übungsaufgaben entwarfen.

Wir wünschen Ihnen viel Freude bei der Lektüre dieses Buches.

Inhaltsverzeichnis

GELEITWORT	V
VORWORT ZUR VIERTEN AUFLAGE.....	VII
GRIECHISCHES ALPHABET UND MATHEMATISCHE SYMBOLE.....	XIII
1 GRUNDLAGEN DER MATRIXRECHNUNG	1
1.1 MATRIZEN UND VEKTOREN.....	1
1.2 MATRIXOPERATIONEN.....	4
1.3 RECHENREGELN UND MATRIXRELATIONEN	6
1.4 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME IN MATRIXDARSTELLUNG	8
1.5 GAUß/JORDAN-ALGORITHMUS.....	9
1.6 AUFGABEN.....	14
2 INNERBETRIEBLICHE SIMULTANE LEISTUNGSVERRECHNUNG	25
2.1 EINORDNUNG UND METHODISCHE GRUNDLAGEN.....	25
2.2 AUFGABEN.....	28
3 WEITERFÜHRENDE MATRIXRECHNUNG	41
3.1 DETERMINANTE.....	41
3.2 INVERSE	48
3.3 MATRIXGLEICHUNGEN	53
3.4 CRAMER-REGEL.....	54
3.5 AUFGABEN.....	56

4	INNERBETRIEBLICHE MATERIALVERFLECHTUNG	75
4.1	EINORDNUNG UND METHODISCHE GRUNDLAGEN	75
4.2	AUFGABEN.....	79
5	LEONTIEF-MODELL	97
5.1	EINORDNUNG UND MODELLGRUNDLAGEN	97
5.2	AUFGABEN.....	105
6	ALLGEMEINE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	117
6.1	LINEARKOMBINATIONEN, LINEARE (UN-) ABHÄNGIGKEIT	117
6.2	RANG.....	119
6.3	LÖSUNGEN VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN	121
6.4	LÖSUNGEN VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN IN ABHÄNGIGKEIT VON PARAMETERN.....	126
6.5	AUFGABEN.....	129
7	VEKTORRAUMTHEORIE	145
7.1	AXIOME DES VEKTORRAUMS	145
7.2	SPEZIELLE VEKTORRÄUME UND UNTERRÄUME.....	148
7.3	ERZEUGENDENSYSTEM, BASIS UND DIMENSION VON UNTERRÄUMEN.....	149
7.4	LÖSUNGSMENGEN VON LINEAR HOMOGENEN GLEICHUNGSSYSTEMEN ALS UNTERRÄUME.....	152
7.5	AUFGABEN.....	154

8 LINEARE OPTIMIERUNG	169
8.1 AUFSTELLEN EINES VOLLSTÄNDIGEN LINEAREN PROGRAMMS.....	169
8.2 GRAPHISCHE LÖSUNG	172
8.3 DER PRIMALE SIMPLEX-ALGORITHMUS	178
8.4 SONDERFÄLLE DES PRIMALEN SIMPLEX-ALGORITHMUS.....	184
8.5 INTERPRETATION DES ENDTABLEAUS	190
8.6 DER DUALE SIMPLEX-ALGORITHMUS	191
8.7 AUFGABEN.....	197

LÖSUNGEN	225
-----------------	------------

KAPITEL 1.....	225
KAPITEL 2.....	230
KAPITEL 3.....	235
KAPITEL 4.....	248
KAPITEL 5.....	255
KAPITEL 6.....	261
KAPITEL 7.....	272
KAPITEL 8.....	284

STICHWORTVERZEICHNIS.....	299
---------------------------	-----

Griechisches Alphabet und mathematische Symbole

A	α	alpha	\forall	für alle (der Allquantor)
B	β	beta	\exists	es existiert ein (der Existenzquantor)
Γ	γ	gamma	$\sum_{i=1}^n x_i$	die Summe über x_i von $i = 1$ bis n
Δ	δ	delta	\wedge	das logische Und
E	ε	epsilon	\vee	das logische Oder
Z	ζ	zeta	\neg	das logische Nicht
H	η	eta	$[a; b]$	das geschlossene Intervall von a bis b
Θ	θ	theta	$(a; b)$	das offene Intervall von a bis b
I	ι	iota	$\emptyset, \{ \}$	die leere Menge
K	κ	kappa	$a \in B$	a ist ein Element der Menge B
Λ	λ	lambda	$a \notin B$	a ist kein Element der Menge B
M	μ	my	$A \subset B$	die Menge A ist eine echte Teilmenge der Menge B
N	ν	ny	$A \subseteq B$	die Menge A ist eine unechte Teilmenge der Menge B
Ξ	ξ	xi	$A \cup B$	die Vereinigungsmenge der Mengen A und B
O	\omicron	omikron	$A \cap B$	die Schnittmenge der Mengen A und B
Π	π	pi		
P	ρ	rho		
Σ	σ	sigma		
T	τ	tau		
Υ	υ	ypsilon		
Φ	ϕ, φ	phi		
X	χ	chi		
Ψ	ψ	psi		
Ω	ω	omega		