Albrecht Beutelspacher | Marc-A. Zschiegner

Diskrete Mathematik für Einsteiger

Albrecht Beutelspacher | Marc.-A. Zschiegner

Diskrete Mathematik für Einsteiger

Mit Anwendungen in Technik und Informatik

4., aktualisierte Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Justus-Liebig-Universität Gießen
Mathematisches Institut
Arndtstraße 2
35392 Gießen

Albrecht.Beutelspacher@math.uni-giessen.de

Dr. Marc-Alexander Zschiegner
Christian-Wirth-Schule
Schloßplatz 1
61250 Usingen

marc@zschiegner.net

1. Auflage 2002
2., durchgesehene Auflage 2004
3., ergänzte Auflage 2007
4., aktualisierte Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1248-3

Vorwort

Was ist diskrete Mathematik?

Diskrete Mathematik ist ein junges Gebiet der Mathematik, das in einzigartiger Weise sogenannte „reine Mathematik“ mit „Anwendungen“ verbindet.

Um diese Antwort zu verstehen, müssen wir etwas weiter ausholen. Bis vor wenigen Jahrzehnten hatte nach allgemeiner Meinung die angewandte Mathematik ausschließlich die Aufgabe, die physikalische Welt möglichst gut und aussagekräftig zu beschreiben. Typische Fragen waren dabei:

Wie modelliert man den Raum?

Wie misst man den Raum?

Wie beschreibt man Bewegungen?

Die mathematischen Disziplinen, die sich mit solchen Fragestellungen beschäftigen, sind die Geometrie und die Analysis, sowie alle sich daraus ableitenden Teildisziplinen. Dies sind vor allem Teilgebiete der Mathematik, die sich mit kontinuierlichen, „stetigen“ Phänomenen beschäftigen.

Im 20. Jahrhundert, insbesondere seit der Einführung des Computers in der Mitte des Jahrhunderts, drängte sich ein anderer Typ von Fragen in den Vordergrund. Die Herausforderung besteht darin, Modelle zum Verständnis und zur Beherrschung von *endlichen*, eventuell allerdings sehr großen Phänomenen und Strukturen zu entwickeln. Solche Strukturen können sein:

Eine Gesellschaft als Menge ihrer endlich vielen Mitglieder,

ein ökonomischer Prozess mit nur endlich vielen möglichen Zuständen,

ein Computer, der nur Zahlen bis zu einer gewissen Größe verarbeiten kann,

usw.

Die mathematischen Disziplinen, die sich mit solchen diskreten Phänomenen beschäftigen, sind Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, Zahlentheorie, Codierungstheorie, Kryptographie, Algorithmentheorie usw. Man fasst diese Disziplinen oft unter dem Begriff *diskrete Mathematik* zusammen. Diskrete Mathematik schafft eine Verbindung von der reinen Mathematik zu den Anwendungen und insbesondere zur Informatik. Das Wort „diskret“ hat also in diesem Zusammenhang nichts zu tun mit „heimlich“, „verborgen“ o.ä., sondern bezieht sich darauf, dass endliche, das heißt diskrete Phänomene untersucht werden.

Das Ziel dieses Buches besteht darin, Sie in möglichst elementarer Weise mit den Grundzügen einiger der oben genannten Gebiete vertraut zu machen. Das beginnt in Kapitel 1 mit dem Schubfachprinzip, einer fast trivialen Aussage mit unglaublichen Folgerungen. In Kapitel 2 werden Färbungsmethoden eingesetzt, und zwar konstruktiv und für Nichtexistenzbeweise. Die vollständige Induktion, ein unentbehrliches mathematisches Werkzeug wird in Kapitel 3 eingeführt und an Beispielen klar gemacht. Kapitel 4 ist einem zentralen Aspekt der diskreten Mathematik gewidmet, nämlich dem Zählen; wir werden eine ganze Reihe von Formeln erarbeiten, die es uns ermöglichen, Mengen mit komplexen Elementen abzuzählen. Daran schließt sich das Kapitel an, in dem die Zahlen der Untersuchungsgegenstand sind; es geht hauptsächlich um die Teilbarkeit ganzer Zahlen.

Der zweite Teil des Buches ist ausgesprochen angewandten Themen gewidmet. Im sechsten Kapitel werden Codes behandelt; dazu gehören zum Beispiel die Strichcodes der Lebensmittel und die ISBN-Codes der Bücher. In Kapitel 7 geht es um Datensicherheit, das heißt Kryptographie; insbesondere werden die Themen „Verschlüsselung" und „Authentifizierung" behandelt, und zwar sowohl in der klassischen Kryptographie als auch in der modernen Public-Key-Kryptographie. Im achten Kapitel werden Graphen behandelt, ein außerordentlich wichtiges Gebiet der diskreten Mathematik. Dies wird in Kapitel 9 durch die Behandlung von gerichteten Graphen fortgeführt. Das letzte Kapitel widmet sich schließlich der Booleschen Algebra und der Entwicklung elektronischer Schaltkreise.

An mathematischen Vorkenntnissen wird nicht viel vorausgesetzt. Sie kommen mit Schulkenntnissen gut aus. Insbesondere wird keine Analysis und keine lineare Algebra gebraucht. Allerdings müssen wir, wie in der Mathematik unumgänglich, Ihre Bereitschaft voraussetzen, sich ein Stück weit auf vergleichsweise abstrakte Argumentation einzulassen, bei der man nicht immer sofort sieht, worauf sie hinaus soll.

Das Buch eignet sich zur Begleitung der entsprechenden Vorlesungen an Fachhochschulen und Universitäten. Es eignet sich besonders gut zum Selbststudium und kann in Arbeitsgemeinschaften an Gymnasien eingesetzt werden. Beim Schreiben haben wir besonders an die „Einsteiger" gedacht. In den ersten Kapiteln gehen wir sehr behutsam vor und legen keinen Wert auf übertriebenen Formalismus. In den späteren Kapiteln wird die Argumentationsdichte dann größer.

Das Buch enthält eine Fülle von Übungsaufgaben, insgesamt über 200. Wir sind der Überzeugung, dass alle lösbar sind, manche sogar sehr einfach. Sie dienen nicht nur dazu, den Stoff zu festigen, sondern erschließen oft auch neue Aspekte. Im letzten Kapitel finden Sie ausführliche Lösungen zu allen Übungsaufgaben. Sie dürfen gerne nachschauen – aber erst, wenn Sie selbst probiert haben!

Wenn Sie, liebe Leserin, lieber Leser, Anregungen haben oder gar Druck- oder andere Fehler gefunden haben, bitten wir Sie, uns diese mitzuteilen.

Wir danken den Hörern unserer Vorlesungen und unseren Kolleginnen und Kollegen für zahlreiche Anregungen und dem Verlag Vieweg+Teubner für die unendliche Geduld mit diesem Projekt.

Gießen, im Februar 2011

Albrecht Beutelspacher
Marc-A. Zschiegner

Inhaltsverzeichnis