

Stefan Reitz

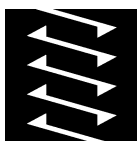
Mathematik in der modernen Finanzwelt

Stefan Reitz

Mathematik in der modernen Finanzwelt

Derivate, Portfoliomodelle und Ratingverfahren

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Stefan Reitz
Hochschule für Technik
Fakultät Mathematik
Schellingstraße 24
70174 Stuttgart
stefan.reitz@hft-stuttgart.de

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0943-8

Meinen Eltern

Vorwort

Modelle zur Beschreibung von Finanzmärkten und der dort gehandelten Produkte bilden seit einer Reihe von Jahren einen wichtigen Schwerpunkt bei der Anwendung mathematischer Resultate im Wirtschaftsleben. Demzufolge werden an Universitäten und Hochschulen in den einschlägigen Studiengängen der (Wirtschafts-)Mathematik und der quantitativ orientierten Wirtschaftswissenschaften in zunehmendem Umfang Lehrveranstaltungen angeboten, die verschiedene Aspekte der Modellierung von Finanzmärkten zum Gegenstand haben.

Bei der Vermittlung der Inhalte besteht die besondere Herausforderung darin, dass einerseits ein weitreichendes Verständnis der Funktionsweise von modernen Kapitalmärkten und Bankprodukten erreicht werden soll und andererseits parallel dazu die nicht unerheblichen mathematischen Instrumentarien zur Modellbildung zu vermitteln sind. In diesem Buch wird der Versuch unternommen, beide Gesichtspunkte gleichermaßen und angemessen zu berücksichtigen.

Die vorliegende Darstellung richtet sich an Studierende in Bachelor- und Masterstudiengängen sowie an Mitarbeiter von Finanzinstitutionen, die die mathematischen Grundlagen der Bewertung von Derivaten, der Berechnung von Risiken mit Portfolio-Modellen und der Beschreibung von Kreditrisiken durch Ratingmodelle kennen lernen wollen. Um den Einstieg zu erleichtern, wird hier bewusst auf eine streng formale Abhandlung der zu Grunde liegenden Theorie der stochastischen Prozesse sowie auch der Stochastischen Analysis verzichtet. Dennoch werden die wichtigsten Sachverhalte dieser Teilgebiete formuliert und deren Anwendung aufgezeigt; deshalb ist ein gewisse Routine im Umgang mit mathematischen Begriffsbildungen, wie sie etwa in den beiden ersten Studienjahren erworben werden, unumgänglich. Auch sollten die Leser bereits eine einführende Vorlesung zur Finanzmathematik absolviert haben, in der die Themen Renten-, Barwert- und Tilgungsrechnung behandelt wurden. Beim Durchblättern des Buches fällt auf, dass die Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik eine fundamentale Bedeutung für die quantitative Beschreibung von Finanzmärkten hat – daher werden in Kapitel 2 dieses Buches die wichtigsten Sachverhalte aus der "Welt des Zufalls" erörtert, bevor dann in den nachfolgenden Kapiteln deren Anwendung aufgezeigt werden kann.

Der Stil dieses Buches ist geprägt durch einen Wechsel zwischen einer eher formal-mathematischen Sprache ("Satz-Definition-Beispiel") und einer weniger formalen, mehr beschreibenden Sprache – auch dadurch wird deutlich, dass der hier behandelte Gegenstand ein interdisziplinärer ist, der die Anwendung mathematischer Sachverhalte auf

reale Probleme beschreibt. Einen besonderen Stellenwert haben die zahlreichen Beispiele und die Übungsaufgaben, die in den Text eingestreut sind – sie sollen die Einübung und das Verständnis der Theorie unterstützen.

Die Auswahl des Stoffes orientiert sich an den Themengebieten, die heutzutage beim Handel mit Finanzprodukten in Finanzinstitutionen eine wichtige Rolle spielen. Dabei werden auch aktuelle Aspekte zur Modellierung der Finanzmärkte, die im Zuge der Finanzmarktkrise seit 2007 an Bedeutung gewonnen haben, behandelt. Des Weiteren findet auch die Umsetzung der angesprochenen Modelle in der Praxis sowie deren jeweilige Stärken und Schwächen Erwähnung.

Größere Teile des Textes sind aus einschlägigen Vorlesungen in den Bachelor- und Masterstudiengängen zur Finanz- und Versicherungsmathematik an der Hochschule für Technik in Stuttgart hervorgegangen. Ich danke den Studierenden in diesen Vorlesungen für die zahlreichen Hinweise zur Darstellung des Stoffes.

Bei Herrn Dr. Tin-Kwai Man (BHF-BANK Aktiengesellschaft, Frankfurt), Herrn Dr. Carsten S. Wehn (DekaBank, Frankfurt) und Herrn Stephan Bellarz (DZ BANK AG, Frankfurt) möchte ich mich für die Kurzbeiträge "Aus der Praxis" bedanken (vgl. Seite 212, 271 und 274).

Dem Herausgeber der Reihe "Studienbücher Wirtschaftsmathematik", Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer, danke ich für die Aufnahme dieses Lehrbuchs in die Reihe; dem Vieweg+Teubner Verlag danke ich für die hervorragende Zusammenarbeit.

Lehnheim, im Mai 2010

Stefan Reitz

Inhalt

1	Grundlagen zu Finanzmärkten und deren Modellierung	1
1.1	Finanzmärkte	1
1.2	Wichtige Begriffe aus der Finanzmathematik	13
2	Grundlagen aus der Stochastik	37
2.1	Wahrscheinlichkeitsräume	37
2.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit	41
2.3	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen	42
2.4	Erwartungswert und Varianz	50
2.5	Zweidimensionale Zufallsvariablen	53
2.6	Empirische Größen und Kursmodellierung	56
2.7	Grundlegende Begriffe der Portfoliotheorie	59
2.8	Die mehrdimensionale Normalverteilung	62
2.9	Stochastische Prozesse und bedingte Erwartungen	65
3	Das diskrete Mehrperiodenmodell	73
3.1	Das Einperiodenmodell	73
3.2	Das Mehrperiodenmodell	81
4	Bewertung in stetiger Zeit	93
4.1	Vom Mehrperiodenmodell zum stetigen Modell	93
4.2	Modellierung von Kursen in stetiger Zeit	94
4.3	Einige Grundlagen aus der Stochastischen Analysis	101
4.4	Die Itô-Formel	104
4.5	Arbitragefreiheit, Martingalmaß und Numéraires	110
4.6	Aktien-, Devisen-, Rohstoff- und Energiederivate im Black-Scholes-Modell	116
4.7	Bewertung unter dem Zeit-T-Forward-Maß	129
4.8	Ausblick auf numerische Methoden	132
4.9	Ergänzungen zum Black-Scholes-Modell	136
4.10	Zinsderivate	139
4.11	Zinsstrukturmodelle	158
4.12	Bewertung von Kreditderivaten	190
4.13	Kontrahentenrisiko und Credit Value Adjustment	209

5	Portfoliorisikomodelle	215
5.1	Marktrisikomodelle	215
5.2	Kreditrisikomodelle	231
5.3	Portfolioabhängige Kreditderivate und Wertpapiere	250
5.4	Aspekte des Risikomanagements	264
6	Rating-Verfahren	277
6.1	Grundlagen	277
6.2	Gütekriterien zur Trennschärfe	279
6.3	Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten	284
6.4	Validierung	290
6.5	Rating-Migrationen: Stresstests und Szenarioanalysen	292
	Literaturverzeichnis	297
	Index	299