

Kristian Bredies | Dirk Lorenz

Mathematische Bildverarbeitung

Kristian Bredies | Dirk Lorenz

# Mathematische Bildverarbeitung

Einführung in Grundlagen und moderne Theorie

STUDIUM



**VIEWEG+**  
**TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dr. Kristian Bredies  
Karl-Franzens-Universität Graz  
Institut für Mathematik und  
Wissenschaftliches Rechnen  
Heinrichstraße 36  
8010 Graz  
Österreich  
kristian.bredies@uni-graz.at

Prof. Dr. Dirk Lorenz  
TU Braunschweig  
Institut für Analysis und Algebra  
Carl-Friedrich Gauß-Fakultät  
Pockelsstraße 14  
38106 Braunschweig  
d.lorenz@tu-braunschweig.de

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1037-3

# Inhalt

<b>Vorwort</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Was sind Bilder? . . . . .	1
1.2 Grundaufgaben der Bildverarbeitung . . . . .	6
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1 Grundbegriffe der Funktionalanalysis . . . . .	15
2.1.1 Analysis auf normierten Räumen . . . . .	15
2.1.2 Banach-Räume und Dualität . . . . .	23
2.1.3 Aspekte der Hilbert-Raum-Theorie . . . . .	28
2.2 Elemente der Maß- und Integrationstheorie . . . . .	31
2.2.1 Maß und Integral . . . . .	32
2.2.2 Lebesgue-Räume und Vektorräume von Maßen . . . . .	37
2.2.3 Operationen auf Maßen . . . . .	43
2.3 Schwache Differenzierbarkeit und Distributionen . . . . .	47
<b>3 Grundlegende Werkzeuge</b>	<b>53</b>
3.1 Kontinuierliche und diskrete Bilder . . . . .	53
3.1.1 Interpolation . . . . .	53
3.1.2 Abtasten . . . . .	56
3.1.3 Fehlermaße . . . . .	57
3.2 Das Histogramm . . . . .	60
3.3 Lineare Filter . . . . .	65
3.3.1 Definition und Eigenschaften . . . . .	66
3.3.2 Anwendungsbeispiele . . . . .	71
3.3.3 Diskretisierung von Faltungen . . . . .	77
3.4 Morphologische Filter . . . . .	82
3.4.1 Grundlegende Operationen: Dilatation und Erosion . . . . .	83
3.4.2 Zusammengesetzte Operationen . . . . .	87
3.4.3 Anwendungsbeispiele . . . . .	90
3.4.4 Diskretisierung von morphologischen Operationen . . . . .	93
3.5 Weitere Entwicklungen . . . . .	97
3.6 Aufgaben . . . . .	99
<b>4 Frequenz- und Skalenraummethoden</b>	<b>103</b>
4.1 Die Fouriertransformation . . . . .	103

4.1.1	Die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbf{R}^d)$ . . . . .	103
4.1.2	Die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbf{R}^d)$ . . . . .	106
4.1.3	Die Fouriertransformation für Maße und temperierte Distributionen	113
4.2	Fourierreihen und das Abtasttheorem . . . . .	118
4.2.1	Fourierreihen . . . . .	118
4.2.2	Das Abtasttheorem . . . . .	120
4.2.3	Der Alias-Effekt . . . . .	122
4.3	Diskrete Fouriertransformation . . . . .	127
4.4	Die Wavelettransformation . . . . .	134
4.4.1	Die gefensterterte Fouriertransformation . . . . .	135
4.4.2	Die kontinuierliche Wavelettransformation . . . . .	137
4.4.3	Die diskrete Wavelettransformation . . . . .	141
4.4.4	Schnelle Wavelettransformation . . . . .	148
4.4.5	Zweidimensionale diskrete Wavelettransformation . . . . .	152
4.5	Weitere Entwicklungen . . . . .	156
4.6	Aufgaben . . . . .	157
<b>5</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen in der Bildverarbeitung</b>	<b>161</b>
5.1	Axiomatische Herleitung von partiellen Differentialgleichungen . . . . .	162
5.1.1	Skalenraum-Axiome . . . . .	162
5.1.2	Beispiele für Skalenraumanalysen . . . . .	165
5.1.3	Existenz des infinitesimalen Generators . . . . .	175
5.1.4	Viskositätslösungen . . . . .	180
5.2	Standard-Modelle basierend auf partiellen Differentialgleichungen . . . . .	185
5.2.1	Lineare Skalenraumanalysen: Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	185
5.2.2	Morphologische Skalenraumanalysen . . . . .	187
5.3	Nichtlineare Diffusion . . . . .	194
5.3.1	Die Perona-Malik-Gleichung . . . . .	195
5.3.2	Anisotrope Diffusion . . . . .	210
5.4	Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen . . . . .	217
5.4.1	Diffusionsgleichungen . . . . .	220
5.4.2	Transportgleichungen . . . . .	225
5.5	Weitere Entwicklungen . . . . .	231
5.6	Aufgaben . . . . .	232
<b>6</b>	<b>Variationsmethoden</b>	<b>237</b>
6.1	Einleitung und Motivation . . . . .	237
6.2	Grundlagen der Variationsrechnung und Konvexe Analysis . . . . .	249
6.2.1	Die direkte Methode . . . . .	249
6.2.2	Konvexe Analysis . . . . .	256
6.2.3	Der Subdifferential-Kalkül . . . . .	270
6.2.4	Fenchel-Dualität . . . . .	285
6.3	Minimierung in Sobolew-Räumen und $BV$ . . . . .	299
6.3.1	Funktionale mit Sobolew-Strafterm . . . . .	300
6.3.2	Anwendungsbeispiele . . . . .	317

---

6.3.3	Die Totalvariation als Strafterm . . . . .	333
6.3.4	Verallgemeinerung auf Farbbilder . . . . .	365
6.4	Numerische Umsetzung . . . . .	372
6.4.1	Lösen einer partiellen Differentialgleichung . . . . .	373
6.4.2	Primale-duale Algorithmen . . . . .	376
6.4.3	Anwendung der primalen-dualen Algorithmen . . . . .	393
6.5	Weitere Entwicklungen . . . . .	403
6.6	Aufgaben . . . . .	410
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>421</b>
	<b>Bildnachweis</b>	<b>429</b>
	<b>Notationsverzeichnis</b>	<b>431</b>
	<b>Index</b>	<b>437</b>

---

# Vorwort

Mathematische Bildverarbeitung ist die Behandlung von mathematischen Objekten die Bildern entsprechen; dabei ist unter „Bild“ das zu verstehen, was oft umgangssprachlich gemeint ist: Ein Abbild einer realen Szene, ein Foto oder auch ein Scan. In diesem Buch betrachten wir Bilder als kontinuierliche Objekte, als Abbild einer kontinuierlichen Szene beziehungsweise als Funktionen auf kontinuierlichen Gebieten. Die eng verwandte *digitale Bildverarbeitung* hingegen beschäftigt sich mit diskreten Bildern, also mit Bildern, die durch eine endliche Anzahl von Bildelementen oder Pixeln gegeben sind. Man kann die mathematische Bildverarbeitung als Teilgebiet des *maschinellen Sehens* oder des *Bildverstehens* sehen. Hierbei geht es darum, zu verstehen, auf welche Art Informationen in Bildern kodiert sind und wie man diese automatisch bestimmen kann. Methoden des maschinellen Sehens liegt meist ein mathematisches Modell für Bilder und die darin enthaltenen Informationen zu Grunde. Um die Methoden praktisch mit dem Computer anwenden können, müssen sie für digitale Bilder *diskretisiert* werden. Insofern hängen mathematische und digitale Bildverarbeitung eng zusammen und arbeiten oft Hand in Hand: Eine mathematisch motivierte Methode ist nur brauchbar, wenn sie sich effizient umsetzen lässt und eine mathematische Betrachtung eines digitalen Algorithmus' bringt die zu Grunde liegenden Annahmen zu Tage und kann auftretende Effekte erklären.

Dieses Buch betont den mathematischen Charakter der Bildverarbeitung und richtet sich primär an Studierende in mathematischen Studiengängen. Es ist allerdings auch für mathematisch interessierte Studierende der Computer-, Ingenieur- und Naturwissenschaften geeignet. Dabei setzen wir Wissen aus einführenden Veranstaltungen zu Analysis, Linearer Algebra und zur Numerik voraus; grundlegendes Wissen über Funktionalanalysis ist von Vorteil. Das Buch richtet sich also durchaus an Studierende ab dem dritten Studienjahr, die hinteren Kapitel bauen jedoch teilweise auf fortgeschrittener mathematischer Theorie auf. Wir legen in diesem Buch den mathematischen Rahmen der Bildverarbeitung dar; beschreiben Methoden und Lösungen für Bildverarbeitungsaufgaben. Dabei werden auch die grundlegenden Werkzeuge wie Histogramme, lineare und morphologische Filter behandelt, da sie oft schon für die Lösung eines praktischen Problems ausreichen. Klarer Schwerpunkt sind aber die modernen Verfahren wie Multiskalenmethoden, partielle Differentialgleichungen und Variationsmethoden. In den meisten Fällen illustrieren wir die praktische Umsetzung, so dass „anwendbare“ Algorithmen entstehen. Dieses Buch soll als Grundlage für eine Vorlesung zur mathematischen Bildverarbeitung dienen, es ist jedoch auch möglich, einzelne Abschnitte in Veranstaltungen zur angewandten Mathematik wie zum Beispiel in „Praktischer Mathematik“ oder in weiterführenden Seminaren einzusetzen.

In der Einleitung des Buches stecken wir sehr grob den mathematischen Rahmen ab und erläutern einige der grundlegenden Probleme der Bildverarbeitung. Da wir Mathematik aus verschiedenen Teilgebieten benötigen, folgt ein Kapitel über mathematische Grundlagen. Fortgeschrittene Leserinnen und Leser können dieses Kapitel vorerst überschlagen und bei Bedarf etwas darin nachschlagen. Das Kapitel zu mathematischen Grundlagen enthält bei weitem nicht die gesamte Mathematik, die den Methoden in diesem Buch zu Grunde liegt. Ein großer Teil davon wird, wenn er speziell für eine Methode gebraucht wird oder in sich einen für die Bildverarbeitung relevanten Inhalt hat, an den jeweiligen Stellen der folgenden Kapitel gebracht. Die mathematische Bildverarbeitung selbst wird in den Kapiteln 3 bis 6 behandelt. Der Aufbau ist dabei an den Methoden und nicht an den Problemen orientiert; in gewisser Weise stellen diese Kapitel einen Werkzeugkasten zur Verfügung mit dem man mit weiterer Kreativität gestellte Probleme bearbeiten kann. Diese Kapitel werden von Aufgaben abgeschlossen, deren Bearbeitung dem tieferen Verständnis und dem Erlernen der Techniken dienen. In wenigen Fällen werden Programmieraufgaben gestellt, doch es sei allen Leserinnen und Lesern ans Herz gelegt, die vorgestellten Algorithmen in einer Programmiersprache ihrer Wahl umzusetzen und die beschriebenen Effekte selbst zu beobachten. Wir haben dafür Material zusammengestellt, welches unter **OnlinePLUS** auf der Homepage des Verlages zu finden ist. Wie in jedem Buch gibt es auch in diesem Themenkomplexe, die ihren Weg nicht ins Buch gefunden haben, aber dennoch erwähnenswert sind. Daher haben wir die Kapitel 3 bis 6 mit einem Abschnitt „Weitere Entwicklungen“ ergänzt, in denen wir kurz auf diese Themen eingehen.

Abschließend möchten wir uns bei allen bedanken, die auf die eine oder andere Art zu diesem Buch beigetragen haben: Matthias Bremer, Jan Hendrik Kobarg, Christian Kruschel, Rainer Löwen, Peter Maaß, Tobias Preusser und Nadja Worliczek.

Graz und Braunschweig  
August 2010

Kristian Bredies  
Dirk Lorenz