

Ralph-Hardo Schulz

Repetitorium Bachelor Mathematik

Ralph-Hardo Schulz

Repetitorium Bachelor Mathematik

Zur Vorbereitung auf Modulprüfungen
in der mathematischen Grundausbildung

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Ralph-Hardo Schulz
Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
Arnimallee 3
14195 Berlin

E-Mail: rhschulz@zedat.fu-berlin.de

1. Auflage 2010

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2010

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Ten Brink, Meppel

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in the Netherlands

ISBN 978-3-8348-0978-0

Vorwort

Dieses Buch soll die Anstrengungen unterstützen, die die meisten Studenten vor ihren Mathematikprüfungen zum Einprägen des Stoffes und zur Vorbereitung auf die Modulprüfungen unternehmen. Es ist entstanden aus meinem Buch “Repetitorium Mathematik” sowie aus meiner Sammlung von Klausuraufgaben.

Nun ist es schwierig, wenn nicht unmöglich, Stoff und Darstellung unabhängig von Prüfungsordnung und persönlichem Stil auszuwählen. Ich habe mich bemüht, für die folgenden Gebiete eine Grundlage zur Vorbereitung auf die Modulprüfungen – seien sie mündlich oder schriftlich – bereitzustellen (die Aufteilung in Teile I und II mag dabei je nach Studienordnung abweichen):

Lineare Algebra I und II (mit Klausuraufgaben)

Analysis I und II (mit Klausuraufgaben)

Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastik (mit Klausuraufgaben)

Computerorientierte Mathematik/Anfänge der Numerik (mit Beispiel-Klausur)

Elementargeometrie (mit Klausuraufgaben)

Algebra/Zahlentheorie (mit Klausuraufgaben)

Die Fragen und zugehörigen Antworten des Textteiles werden durch Beispiele und weiterführende Anmerkungen ergänzt. Letztere sollte man ebenso wie die mit ** markierten Teile beim ersten Durcharbeiten überspringen. Sie ermöglichen später eine Ergänzung und Abrundung des Wissens. An viele Beweise wird durch eine Beweisskizze oder die Beweisidee erinnert. Da ich voraussetze, dass der Leser die wichtigsten Gebiete schon einmal in einer Vorlesung kennengelernt hat und sie sich jetzt einprägen möchte, habe ich großen Wert auf strukturelle Zusammenhänge gelegt, wobei ich gelegentlich im Vorgriff auch auf Begriffe und Sätze aus anderen Teilgebieten eingehe. Evtl. ist es aber auch möglich, sich anhand des Buches in neue Themenbereiche einzuarbeiten. An jedes Kapitel schließt sich ein Aufgabenteil an, der zum Klausur-Training benutzt werden kann. Fast alle Aufgaben wurden bereits in Klausuren gestellt und so getestet. Im letzten Teil des Buches sind Lösungsskizzen zu sämtlichen Aufgaben wiedergegeben.

Meinen herzlichen Dank möchte ich Frau Margrit Barrett und Frau Heike Eckart für das Schreiben einiger Textteile in \LaTeX und die Eingabe vieler Bilder in die Systeme “idraw” und “xfig” aussprechen, ebenso Frau Silvia Hoemke und Frau Elke Greene für weitere Bilder im picture mode. Einige Funktionsgraphen habe ich mit “Mathematica” erzeugt.

Die Aufgaben und Lösungen bzw. Lösungshinweise wurden zusammengestellt von Sabine Giese, Christian Hering, Josef Heringlehner, Birgit Mielke, Hans Mielke und mir. Die Lösungen haben wir sorgfältig erstellt, trotzdem können wir keine Gewähr übernehmen. Kommentare sind willkommen, z.Bsp. per E-mail an “schulz@math.fu-berlin.de”.

Für Beiträge zur Aufabensammlung möchte ich mich bedanken bei Prof. Dr. Heinrich Begehr, Prof. Dr. Rudolf Gorenflo, Dr. Christian Haase, Christoph Kapsch, Dr. Lutz Heindorf, Corinna Preuß, Prof. Dr. Elmar Vogt, Prof. Dr. Dirk Werner und Julia Westendorf sowie bei allen unbekanntenen Autoren von inzwischen teilweise zu 'Folklore' gewordenen Aufgaben; dankbar bin ich auch Jennifer Eisfeldt, Sonja Ernst, Johannes Heck, Prof. Eberhard Letzner, Veronika Liebich, Julian Pfab, Stefan Preyer, Antje Schröder, Gregor Schulz, Jens-Uwe Sedler und Ariane Weigandt für Hinweise auf Fehler bzw. Druckfehler, auf missverständliche Formulierungen oder fehlerhafte Interpretationen von Aufgabenstellungen in früheren Fassungen der Aufgabensammlung.

Berlin, im September 2009

Ralph-Hardo Schulz

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Algebra I	1
1.1	Vektorräume, Basis, Dimension	1
1.2	Lineare Abbildungen, Matrizen	10
1.3	Faktorräume, Dimensionssätze	14
1.4	Lineare Gleichungssysteme	17
1.5	Affine analytische Geometrie	19
1.6	Determinanten	23
1.7	Klausur-Aufgaben zur Linearen Algebra I	28
2	Lineare Algebra II	37
2.1	Eigenwerttheorie	37
2.2	Skalarprodukt, Orthogonalität	43
2.3	Isometrien	48
2.4	Dualraum	51
2.5	Euklidische analytische Geometrie	54
2.6	Klausur-Aufgaben zur Linearen Algebra II	62
3	Analysis I	71
3.1	Konvergenz von reellen Folgen	71
3.2	Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen	76
3.3	Reihen in normierten Räumen	86
3.4	Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^1	94
3.5	Integration (Teil 1)	101
3.6	Anhang: Reelle und komplexe Zahlen	104
3.7	Klausur-Aufgaben zur Analysis I	108
4	Analysis II	117
4.1	Differenzierbarkeit von Abbildungen	117
4.2	Integration (Teil 2)	124
4.3	Differentialgleichungen	132
4.4	Anhang: Taylorreihen	134
4.5	Klausur-Aufgaben zur Analysis II	136
5	Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastik	143
5.1	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	143
5.2	Zufallsvariable	151

5.3	Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten	155
5.4	Approximation der Binomialverteilung	157
5.5	Gesetze der großen Zahlen	159
5.6	Anfänge der Beurteilenden Statistik	160
5.7	Klausur-Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie	163
6	Computerorientierte Mathematik/Numerik	173
6.1	Nullstellenbestimmung und Fixpunkt-Iteration	173
6.2	Polynom-Interpolation	175
6.3	Numerische Integration	177
6.4	Anfänge der Numerik von Differentialgleichungen	178
6.5	Beispielklausur zur Computerorientierten Mathematik	180
7	Elementargeometrie	183
7.1	Affine Geometrie	183
7.2	Geordnete Geometrie	190
7.3	Kongruenzgeometrie	193
7.4	Weitere Sätze der Euklidischen Geometrie	200
7.5	Abbildungsgeometrie	209
7.6	Klausur-Aufgaben zur Elementargeometrie	216
8	Einführung in die Algebra/Zahlentheorie	223
8.1	Algebraische Strukturen	223
8.2	Zum Aufbau des Zahlensystems	226
8.3	Teilbarkeit in \mathbb{N}	230
8.4	Euklidische Ringe, Hauptidealringe, ZPE-Ringe	232
8.5	Endliche Körpererweiterungen	235
8.6	Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal	238
8.7	Endliche Körper	240
8.8	Anfänge der Gruppentheorie	241
8.9	Anfänge der Galoistheorie	242
8.10	Klausur-Aufgaben zur Algebra/Zahlentheorie	245
9	Lösungen der Aufgaben	249
9.1	Lösungen zu Kap. 1 und 2: Lineare Algebra	249
9.2	Lösungen zu Kap. 3 und 4: Analysis	283
9.3	Lösungen zu Kap. 5: Wahrscheinlichkeitstheorie	321
9.4	Lösungen zu Kap. 6: Computerorientierte Mathematik/Numerik	343
9.5	Lösungen zu Kap. 7: Elementargeometrie	346
9.6	Lösungen zu Kap. 8 : Algebra/Zahlentheorie	361
	Literaturverzeichnis	367
	Stichwortverzeichnis (und Themen der Aufgaben)	370