

Karl Michael Ortmann

Praktische Lebensversicherungsmathematik

Karl Michael Ortmann

Praktische Lebensversicherungs- mathematik

Mit zahlreichen Beispielen,
Abbildungen und Anwendungen

STUDIUM



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Karl Michael Ortmann
Beuth Hochschule für Technik Berlin
Fachbereich II (Mathematik – Physik – Chemie)
Limburger Str. 38
13353 Berlin

E-Mail: ortmann@beuth-hochschule.de
Web: <http://prof.beuth-hochschule.de/ortmann>

1. Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Krips b.v., Meppel
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in the Netherlands

ISBN 978-3-8348-0678-9

Vorwort

Das vorliegende Buch richtet sich insbesondere an Studierende der Wirtschaftsmathematik an Fachhochschulen, Hochschulen, Universitäten und Berufsakademien sowie an Absolventen ebensolcher Bildungseinrichtungen. Ihnen ist gemeinsam, dass sie sich für die praktische Anwendung der Mathematik in der Lebensversicherung interessieren und gegebenenfalls eine berufliche Tätigkeit in der Versicherung anstreben. Mit diesem Buch möchten wir außerdem einen Beitrag zur Ausbildung zum Aktuar gemäß den Anforderungen der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV) liefern.

Wir geben in diesem Buch einen Einblick in diejenigen Themen, die für die Praxis der Lebensversicherung besonders relevant sind. Der Nutzen für den Leser liegt in dem Erwerb von Kenntnissen und Fähigkeiten, die in der Lebensversicherung von praktischer Bedeutung sind. Da der Praxisbezug im Vordergrund steht, wurden zahlreiche Beispiele und Abbildungen aufgenommen. Durch sie soll das Verständnis der behandelten Materie erleichtert werden. Mit Hilfe der im Anhang befindlichen Sterbetafeln können die Rechnungen lückenlos nachvollzogen werden.

Das Buch ist derart gestaltet, dass es sich einerseits für das systematische Erlernen des Stoffes eignet, andererseits im Nachhinein als Nachschlagewerk dienen kann. Zu diesem Zweck sind Kernbegriffe fettgedruckt und erleichtern so das Aufspüren relevanter Passagen.

Wir beginnen im ersten Kapitel mit einer Einführung in die Versicherung. Die mathematischen Grundlagen der elementaren Finanzmathematik werden im zweiten Kapitel dargestellt. Das folgende dritte Kapitel über die biometrischen Rechnungsgrundlagen behandelt die Herleitung und Anwendung von Sterbetafeln. Im Kern des Buches stehen die Kenntnisse und Methoden zur Bestimmung der Prämien in der Lebensversicherung, die im vierten Kapitel vermittelt werden. Ein weiterer Schwerpunkt sind die Deckungsrückstellungen, die im fünften Kapitel behandelt werden. Die Grundprinzipien der Überschussbeteiligung werden im sechsten Kapitel dargestellt. Den Abschluss bildet das siebte Kapitel über die Lebensrückversicherung.

Da die Lebensversicherungsmathematik ein weites Feld ist, können wir zwangsläufig keine vollständige Darstellung geben. Weiterführende Inhalte werden im Sinne von Ergänzungen in jedem Kapitel kurz und knapp skizziert. Dazu verweisen wir auf die entsprechende Literatur.

Kollegen an der Beuth Hochschule, Studierende verschiedener Jahrgänge, Freunde und Bekannte aus der Versicherungswirtschaft haben zum Gelingen dieses Buches beigetragen. Ihnen gebührt mein herzlicher Dank. Es wäre durchaus angemessen, sie alle an dieser Stelle zu erwähnen. Doch würde ich dadurch von meiner eigenen Verantwortung für die Richtigkeit der Mathematik und der dargestellten Standpunkte ablenken.

Besonderer Dank gilt dem Herausgeber der Studienbücher Wirtschaftsmathematik, Prof. Dr. Bernd Luderer, für seine Hinweise, Anregungen und sehr gute Zusammenarbeit. Schließlich bin ich dem Vieweg+Teubner Verlag für die praktische Umsetzung dieses Buches zu Dank verpflichtet.

Berlin, im Juli 2009

Karl Michael Ortmann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Wesen der Versicherung	1
1.2 Versicherungssparten.....	2
1.3 Formen der Lebensversicherung	4
1.4 Geschäftsverbindung.....	5
1.5 Bedeutung der Lebensversicherung	7
1.6 Historischer Hintergrund.....	7
2 Elementare Finanzmathematik	11
2.1 Zinsrechnung.....	12
2.1.1 Lineare Zinsrechnung.....	12
2.1.2 Exponentielle Zinsrechnung.....	16
2.1.3 Unterjährige Zinsrechnung.....	21
2.1.4 Stetige Zinsrechnung.....	25
2.2 Investitionsrechnung	27
2.2.1 Kapitalwertmethode	28
2.2.2 Methode der internen Rendite	30
2.2.3 Ergänzungen.....	33
2.3 Rentenrechnung	34
2.3.1 Rentenbarwertfaktoren	35
2.3.2 Rentenendwertfaktoren	37
2.3.3 Unterjährige Renten	38
2.3.4 Aufgeschobene Renten.....	40
2.3.5 Dynamische Renten	42
2.3.6 Ewige Renten	44
2.4 Tilgungsrechnung.....	45
2.4.1 Allgemeine Tilgung	47
2.4.2 Ratentilgung	48
2.4.3 Annuitätentilgung.....	49
2.4.4 Gesamtfällige Tilgung mit Zinsansammlung	51
2.4.5 Gesamtfällige Tilgung ohne Zinsansammlung.....	52
2.4.6 Ergänzungen.....	53

2.5 Zusammenfassung	55
3 Biometrische Rechnungsgrundlagen	57
3.1 Modellierung des Gesamtschadens	57
3.1.1 Individuelles Modell	58
3.1.2 Kollektives Modell	61
3.1.3 Approximationen	63
3.1.4 Glaubwürdigkeit	66
3.2 Modellierung der Sterblichkeit	69
3.2.1 Klassischer Modellansatz	69
3.2.2 Sterbetafel	71
3.2.3 Historischer Hintergrund	74
3.3 Methoden der Sterblichkeitsanalyse	74
3.3.1 Geburtsjahrmethode	76
3.3.2 Sterbejahrmethode	78
3.3.3 Sterbeziffermethode	81
3.3.4 Verweildauer methode	82
3.4 Ausgleichsverfahren	83
3.4.1 Analytische Verfahren	84
3.4.2 Mechanische Verfahren	85
3.5 Anpassungen	89
3.5.1 Sicherheitszuschläge	90
3.5.2 Rueffsche Altersverschiebung	94
3.5.3 Versichertensterbetafeln	96
3.5.4 Erhöhte Risiken	97
3.5.4 Bevorzugte Risiken	100
3.6 Ergänzungen	102
3.6.1 Tarifierung	102
3.6.2 Trends	107
4 Beitragsberechnung	111
4.1 Rechnungsgrundlagen	113
4.1.1 Rechnungszins	114
4.1.2 Sterblichkeit	116
4.1.3 Kosten	117
4.2 Kommutationswerte	118
4.3 Barwerte von Verbleibleistungen	119

4.3.1	Einmalige Erlebensfalleistung	119
4.3.2	Sofort beginnende lebenslange vorschüssige Leibrente.....	122
4.3.3	Sofort beginnende lebenslange nachschüssige Leibrente	123
4.3.4	Unterjährige lebenslange Leibrente	124
4.3.5	Sofort beginnende temporäre vorschüssige Leibrente	126
4.3.6	Unterjährige temporäre Leibrente	127
4.3.7	Aufgeschobene lebenslange vorschüssige Leibrente	127
4.3.8	Aufgeschobene temporäre vorschüssige Leibrente	128
4.3.9	Sofort beginnende lebenslange vorschüssige Leibrente mit Garantiezeit	129
4.3.10	Aufgeschobene lebenslange vorschüssige Leibrente mit Garantiezeit.....	130
4.3.11	Arithmetisch steigende lebenslange vorschüssige Leibrente.....	131
4.3.12	Sich geometrisch verändernde lebenslange vorschüssige Leibrente.....	133
4.3.13	Zusammenfassung	134
4.3.14	Nomenklatur.....	135
4.4	Barwerte von Ausscheideleistungen	136
4.4.1	Lebenslange Todesfallversicherung	136
4.4.2	Formale Zusammenhänge	138
4.4.3	Aufgeschobene lebenslange Todesfallversicherung	139
4.4.4	Risikolebensversicherung	140
4.4.5	Aufgeschobene Risikolebensversicherung.....	141
4.4.6	Arithmetisch steigende lebenslange Todesfallversicherung.....	142
4.4.7	Arithmetisch fallende lebenslange Todesfallversicherung	144
4.4.8	Arithmetisch steigende Risikolebensversicherung.....	145
4.4.9	Arithmetisch fallende Risikolebensversicherung	145
4.4.10	Sich geometrisch verändernde Risikolebensversicherung	146
4.4.11	Zusammenfassung	148
4.5	Gemischte Leistungsbarwerte	148
4.5.1	Kapitallebensversicherung	149
4.5.2	Rentenversicherung mit Beitragsrückgewähr	151
4.5.3	Risikolebensversicherung mit Beitragsrückgewähr	151
4.6	Nettoprämien.....	152
4.6.1	Erlebensfallversicherung.....	152
4.6.2	Lebenslange Todesfallversicherung	154
4.6.3	Risikolebensversicherung	156
4.6.4	Kapitallebensversicherung	157

4.6.5 Rentenversicherung	159
4.7 Gezillmerte Nettoprämien	160
4.7.1 Todes- und Erlebensfallversicherung	162
4.7.2 Rentenversicherung	166
4.8 Bruttoprämien.....	168
4.8.1 Erlebensfallversicherung	169
4.8.2 Lebenslange Todesfallversicherung.....	172
4.8.3 Risikolebensversicherung.....	173
4.8.4 Kapitallebensversicherung.....	175
4.8.5 Rentenversicherung	177
4.9 Kostenprämien.....	179
4.9.1 Todes- und Erlebensfallversicherung	180
4.9.2 Rentenversicherung	183
4.10 Tarifprämien	184
4.11 Ausgewählte Produktbeispiele.....	186
4.11.1 Ausbildungsversicherung.....	186
4.11.2 Kapitallebensversicherung für Berufseinsteiger	187
4.11.3 Erlebensfallsversicherung mit Beitragsrückgewähr	189
4.11.4 Sterbegeldversicherung.....	190
4.11.5 Risikolebensversicherung mit Beitragsrückgewähr.....	191
4.11.6 Kreditlebensversicherung	192
4.11.7 Hypothekenlebensversicherung.....	193
4.11.8 Aufgeschobene Altersrentenversicherung mit Beitragsrückgewähr	194
4.11.9 Sofortige Altersrentenversicherung gegen Einmalbeitrag	195
4.11.10 Fachspezifische Arbeitsweise	196
5 Deckungsrückstellungen	197
5.1 Nettodeckungsrückstellung	202
5.1.1 Erlebensfallversicherung	202
5.1.2 Lebenslange Todesfallversicherung.....	204
5.1.3 Risikolebensversicherung.....	205
5.1.4 Kapitallebensversicherung.....	207
5.1.5 Rentenversicherung	208
5.2 Gezillmerte Deckungsrückstellung.....	210
5.2.1 Erlebens- und Todesfallversicherungen.....	210
5.2.5 Rentenversicherung	212

5.3	Bruttodeckungsrückstellung.....	214
5.3.1	Erlebensfallversicherung.....	214
5.3.2	Lebenslange Todesfallversicherung.....	215
5.3.3	Risikolebensversicherung.....	216
5.3.4	Kapitallebensversicherung.....	217
5.3.5	Rentenversicherung.....	217
5.4	Kostendeckungsrückstellung.....	218
5.4.1	Erlebens- und Todesfallversicherungen.....	218
5.4.2	Rentenversicherung.....	221
5.5	Änderungen.....	222
5.5.1	Beitragsdynamik.....	223
5.5.2	Rückkauf.....	224
5.5.3	Kündigung.....	228
5.5.4	Teilrückkauf.....	230
5.5.5	Beitragsfreistellung.....	231
5.5.6	Leistungsänderung.....	233
5.5.7	Daueränderung.....	234
5.5.8	Änderung der Rechnungsgrundlagen.....	235
5.5.9	Auffüllungsbedarf.....	237
5.6	Beitragszerlegung.....	238
5.7	Bilanzdeckungsrückstellung.....	245
5.8	Ergänzungen.....	246
5.8.1	Lineare Gleichungssysteme.....	247
5.8.2	Satz von Cantelli.....	251
6	Ergebnisanalyse.....	253
6.1	Gewinnzerlegung.....	253
6.1.1	Kontributionsgleichung.....	253
6.1.2	Gewinn- und Verlustrechnung.....	256
6.2	Überschussbeteiligung.....	258
6.2.1	Überschussverteilung.....	259
6.2.2	Überschussverwendung.....	261
6.3	Finanzierbarkeit.....	262
6.3.1	Ertragswertmethode.....	263
6.3.2	Sollzinsmethode.....	264
6.4	Rentabilität.....	265

6.4.1 Effektiver Rechnungszins	265
6.4.2 Erlebensfallrendite.....	266
6.4.3 Effektive Rendite	267
6.5 Ergänzungen	270
6.5.1 Profit-Testing.....	270
6.5.2 Asset-Liability-Matching.....	273
6.5.3 Kennzahlen.....	274
7 Rückversicherung.....	277
7.1 Proportionale Rückversicherung	279
7.1.1 Quote	279
7.1.2 Summenexzedent.....	280
7.2 Nicht-proportionale Rückversicherung	283
7.2.1 Einzelschadenexzedent.....	283
7.2.2 Kumulschadenexzedent.....	286
7.2.3 Jahresüberschadenexzedent.....	286
7.3 Gestaltungsarten	286
7.3.1 Normalbasis ohne Reservedepot	287
7.3.2 Normalbasis mit Reservedepot.....	287
7.3.3 Risikobasis.....	289
7.4 Ergänzungen	291
7.4.1 Selbstbehalt.....	291
7.4.2 Tarifierung	291
7.4.3 Sterbetafelvergleich	292
7.4.4 Moderne Rückversicherung.....	296
Anhang	297
A DAV2008TM	297
B DAV2008TF.....	301
C DAV2004RM	305
D DAV2004RF	309
E Haftungsausschluss	313
Literaturverzeichnis	315
Lehrbücher.....	315
Zeitschriften und sonstige Veröffentlichungen	316
Gesetze und Verordnungen.....	316
Stichwortverzeichnis.....	317