

Alfred Göpfert | Thomas Riedrich | Christiane Tammer

Angewandte Funktionalanalysis

Herausgegeben von
Prof. Dr. Bernd Luderer, Chemnitz

Die Studienbücher Wirtschaftsmathematik behandeln anschaulich, systematisch und fachlich fundiert Themen aus der Wirtschafts-, Finanz- und Versicherungsmathematik entsprechend dem aktuellen Stand der Wissenschaft.

Die Bände der Reihe wenden sich sowohl an Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Wirtschaftswissenschaften, der Wirtschaftsinformatik und des Wirtschaftsingenieurwesens an Universitäten, Fachhochschulen und Berufsakademien als auch an Lehrende und Praktiker in den Bereichen Wirtschaft, Finanz- und Versicherungswesen.

Alfred Göpfert | Thomas Riedrich | Christiane Tammer

Angewandte Funktionalanalysis

Motivationen und Methoden für Mathematiker
und Wirtschaftswissenschaftler

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Alfred Göpfert
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
06120 Halle
alfred.goepfert@mathematik.uni-halle.de

Prof. Dr. Thomas Riedrich
TU Dresden
Institut für Analysis
Mommsenstr. 13
01062 Dresden

Prof. Dr. Christiane Tammer
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
06120 Halle
christiane.tammer@mathematik.uni-halle.de

1. Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0133-3

Einleitung

In diesem Buch werden Motivationen, Arbeitsweisen, Resultate und Anwendungen der Funktionalanalysis für Wirtschaftsmathematik und Mathematische Ökonomie dargestellt, die aber auch für Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften allgemein und für Informatik und Physik zutreffen. Die erwähnten Arbeitsweisen und Resultate haben interessante historische Ursprünge, aus denen heraus sich durch umfassendere Modellierungen und Anwendungen funktionalanalytische Versionen gebildet haben, die heute normales Wissen in den jeweiligen Disziplinen sind. Wir möchten einige der historischen Quellen nennen.

Der schottische Ökonom Adam Smith schrieb in seinem Buch 1776, dass ein ökonomisches Marktgeschehen (etwa eine Austauschökonomie) so funktioniere, als ob es „von einer unsichtbaren Hand“ gesteuert würde. Das kann man als einen frühen Hinweis auf einen gesteuerten Prozess ansehen mit dem Ziel, einen Gleichgewichtszustand in dem Marktgeschehen zu erreichen. Später, in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts, entwickelte sich die Spieltheorie, in der modernen Form wesentlich beginnend mit Arbeiten von John von Neumann (1903–1957), und in dem Buch von von Neumann und Morgenstern hatte sie ihren ersten Kulminationspunkt. Spiele wurden verallgemeinert (viele Spieler, Kontinua von Spielern, Koalitionen, allgemeinere Präferenzen, Ökonomien) und aus der Vielzahl der beitragenden Wissenschaftler möchten wir John Nash (geb. 1928), Träger des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften 1994, nennen. Versionen von Nash-Gleichgewichtspunkten gehören zu den wichtigen Gegenständen der modernen Ökonomie. Harry M. Markowitz entwickelte 1952 ein Portfolio-Optimierungsproblem, welches die Entscheidungen eines Investors rational begründet. Für seine Forschungsarbeiten erhielt Markowitz 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Eine weitere interessante Quelle der Mathematischen Ökonomie ist Paretos Effizienzbegriff. Der Sozial-Ökonom Pareto (1848–1923) beschäftigte sich mit der gleichzeitigen Maximierung mehrerer sich widersprechender Zielkriterien. Der mit seinem Namen verbundene Begriff für ein Maximum unter den genannten Bedingungen gehört heute samt seinen vielfältigen funktionalanalytischen Verallgemeinerungen zum Grundbestand der Mathematischen Ökonomie.

Wir möchten schließlich Lagrange (1736–1823) erwähnen. Mit seinem Namen ist u.a. die Methode verknüpft, Extremumaufgaben mit Nebenbedingungen durch das Einführen von Lagrange'sche Multiplikatoren zu lösen. Heute spielen Lagrange-Methoden und Ihre Verallgemeinerungen eine eminente Rolle in allen obengenannten Disziplinen, für die Mathematische Ökonomie sind sie Basiselemente der Dualitätstheorie und ihre ökonomische Interpretation ist nichts anderes als eine Antwort auf Störungen des Ausgangsoptimierungsproblems.

Um in der Wirtschaftsmathematik (und in der Stochastischen Analysis), aber ebenso in den weiteren eingangs genannten Gebieten, moderne Literatur lesen und verfolgen zu können, benötigt man (oft sogar tieferliegende) Kenntnisse aus verschiedenen Zweigen der Funktionalanalysis (in unendlichdimensionalen Räumen) und damit eng verbundener Gebiete:

- Normierte, metrische und topologische Räume,

- Arbeiten mit Funktionalen, Fortsetzung von linearen Funktionalen, Trennungsaussagen und Dualitätstheorie, Distributionen,
- Optimalitätsbedingungen, Existenz von Fixpunkten und Gleichgewichtspunkten, Minimaxsätze, praktische Lösungsverfahren,
- verallgemeinerte bzw. distributionelle Lösungen von Differentialgleichungen,
- Rechnen mit Abbildungen (Operatoren),
- Maß- und Integrationstheorie,
- Maximalpunktsätze,
- Categoriesätze,
- Mengentheorie,
- halbgeordnete Räume, Präferenzen und Kegel.

Wir greifen dazu in den einzelnen Kapiteln unseres Buches solche Sätze, Beispiele und Anwendungen auf, die in enger Beziehung zur Wirtschaftsmathematik und Mathematischen Ökonomie stehen. Dies zeigt sich beim genaueren Hinschauen auf die entsprechende moderne Fachliteratur. Unser Buch ist auch eine wichtige Stufe zum Einstieg in die Stochastische Analysis (vgl. hierzu u.a. Aliprantis und Border [2]) und die Finanzmathematik (vgl. Föllmer und Schied [60]).

Grundlegend sind Existenzsätze für Gleichgewichtspunkte in Ökonomien (verallgemeinerten Spielen). Sie werden (für beliebige Mengen von Agenten und Gütern) in topologischen Räumen formuliert (die in einigen Fällen nicht einmal lokalkonvex, Hausdorffsch oder metrisierbar sein müssen) und nutzen dann entsprechend allgemeine Fixpunktsätze oder äquivalente Aussagen (KKM-Sätze, Maximalpunktsätze, Durchschnittsprinzip). Für eine Übersicht vgl. Tan [165] oder Yuan [173].

Wichtige Eigenschaften von nichtlinearen Funktionalen, die in der Mehrkriteriellen Optimierung und in der Finanzmathematik eine große Rolle spielen, werden in den Abschnitten 3.3 und 3.4 nachgewiesen. In Abschnitt 3.3 wird auf Differenzierbarkeitseigenschaften (Fréchet-Differenzierbarkeit, Gâteaux-Differenzierbarkeit, Subdifferenziale) eingegangen, die insbesondere bei numerischen Verfahren (Ritz'sches Verfahren, Newton-Verfahren (Abschnitte 9.2, 9.3), Proximal-Point-Algorithmus (Abschnitt 5.9)) eine wichtige Rolle spielen.

Ebenso grundlegend sind Anwendungen von Hahn-Banach-Sätzen (vgl. Abschnitt 5.1). Einerseits sind diese Sätze nicht ganz leicht zu durchschauen und auch nicht ganz leicht zu beweisen (man nutzt Mengenlehre). Deshalb haben wir deren endlichdimensionale Version und eine Reihe verständlicher Anwendungen an den Anfang des entsprechenden Kapitels gestellt. Andererseits sind die Anwendungen der Gruppe der Hahn-Banach-Sätze mannigfach. Schon auf Seite 6 in Föllmer und Schied [60] wird das Fundamentaltheorem der Vermögenspreisbildung (fundamental theorem of asset pricing), eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Arbitragefreiheit (unter gegebenen Umständen), bewiesen und dabei das Hahn-Banach-Theorem als Trennungssatz benutzt, ebenso im dynamischen Teil der Theorie (S. 242) und bei der Behandlung

konvexer Risikomaße (S. 162). Das trennende Funktional ist ein Element aus dem Dualraum eines Funktionenraumes. In Inoue [91] ergibt ein trennendes Funktional den gesuchten Gleichgewichtspreisvektor und es werden u.a. Resultate aus der ersten Arbeit (1873) zur Dualitätstheorie der linearen Optimierung von Gordan (1837–1912) verwendet (vgl. Focke und Göpfert [58]).

Zur allgemeinen Herleitung von Existenzaussagen für Subgradienten, Summenregeln bei Subdifferentialen (vgl. 5.4) und der Dualitätstheorie in der konvexen Optimierung (vgl. Abschnitt 5.8) spielen Trennungssätze (Abschnitt 5.3) (als Folgerungen aus dem Hahn-Banach-Satz) eine wesentliche Rolle. Auch für Optimierungsprobleme aus der Finanzmathematik können Dualitätsaussagen gezeigt werden, insbesondere für Optimierungsprobleme, wo in der Zielfunktion Risikomaße auftreten. Die duale Aufgabe wird im Sinne der Finanzmathematik interpretiert (vgl. Abschnitt 5.8.3). Weitere Anwendungen der Dualitätstheorie werden in Abschnitt 5.8 für Standortprobleme diskutiert.

Wir verwenden häufig Halbordnungen und Ordnungskegel. Halbordnungen (oder allgemeiner Ordnungsstrukturen in Mengen, vgl. die Abschnitte 10.4 und 10.1.5) sind grundlegend sowohl für theoretische Fragen (beim Beweis des Hahn-Banach-Satzes werden halbgeordnete Räume benutzt, beim Ekeland'schen Prinzip und bei Maximalpunkttheoremen stecken Halbordnungen im Kern der Aussage, vgl. Lemma 7.2) als auch für die Anwendungen, denn mit Ordnungsstrukturen lassen sich Präferenzen von Entscheidungsträgern modellieren und in der Mehrkriteriellen Optimierung bilden Ordnungsstrukturen die Grundlage des Effizienzbegriffes (vgl. Abschnitt 10.2). Die Beziehungen zwischen Ordnungsstrukturen und Ordnungskegeln finden sich in Satz 10.28. Bei Verwendung von Ordnungskegeln werden Maximalpunkttheoreme (und das Ekeland'sche Variationsprinzip) und natürlich der Effizienzbegriff einprägsam anschaulich (vgl. Abb. 7.1). Aliprantis und Tourky widmeten ihr Buch [5] über halbgeordnete Vektorräume dem Mathematiker und Ökonom L.V.Kantorovich, der für seine Forschungsarbeiten 1975 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt.

Auffällig ist in letzter Zeit die Hinwendung zu approximativen Gleichgewichtspunkten. Nicht nur, dass hier häufig generische Aussagen (das ist ein Grund, das Kapitel 4.1 über Categoriesätze, insbesondere Abschnitt 4.4, genauer zu beachten) auftreten (z.B., unter Bedingungen sind „fast alle“ approximative Gleichgewichte auch wirkliche Gleichgewichte), sondern approximative Lösungen existieren natürlich unter weit schwächeren Bedingungen als exakte Lösungen. Der Brouwer'sche Fixpunktsatz wird (vgl. Bich [23]) auf eine spezielle Klasse approximativer Fixpunkte verallgemeinert. Eine wesentliche Quelle für die Betrachtung approximativer Lösungen von Extremalproblemen ist das Ekeland'sche Variationsprinzip. Dieses liefert Näherungslösungen zu Optimalproblemen bzw. exakte Lösungen zu einem (in kontrollierbarer Weise) gestörten Problem. Wir heben u.a. die „Gâteaux-differenzierbare Version“ des Prinzips hervor, wodurch die Beziehungen zur Regel „erste Ableitung gleich null setzen“ beim Suchen von Optimalstellen einer Gâteaux-differenzierbaren Funktion offenbar werden (vgl. Lemma 7.1). Für das bei Problemen der Optimalen Steuerung wichtige Pontryagin'sche Maximumprinzip wird als eine der Anwendungen des Ekeland'schen Prinzips eine Version für ε -optimale Steuerungen hergeleitet. Im Ekeland'schen Prinzip versteckt sich ein Maximalpunkttheorem (vgl. Beispiel 7.1).

In Hilbert-Räumen spielt die Orthogonalität eine effiziente Rolle. Dies drückt sich sowohl in Projektionssätzen als auch in der Entwicklung von Elementen eines Hilbert-Raumes in eine Orthogonalreihe aus. Beides wird bei numerischen Anwendungen oft ausgenutzt. Aber auch andere Eigenschaften von Hilbert-Räumen finden Anwendungen, so wird (vgl. Podczeck [132]) bei

der Untersuchung von Beziehungen zwischen Kern und Walras-Gleichgewichten in Austausch-Ökonomien von nicht separablen Hilbert-Räumen (als Raum der Güter; commodity space) und einem atomfreien Maßraum (als Raum der Agenten) ausgegangen. Die Beziehungen zur Mengenlehre werden aber noch interessanter, denn in dieser Arbeit werden die Kontinuumhypothese und schließlich (für ein Gegenbeispiel) nicht Lebesgue-messbare Mengen eingesetzt.

Distributionen und Fourier-Transformationen treten in wirtschaftswissenschaftlichen Sachverhalten häufig, aber manchmal versteckt auf. Natürlich spielen sie bei linearen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, wenn die „rechten Seiten“ der Gleichung z.B. einen Stoßvorgang (δ -Distribution) darstellen. Die zugehörigen Lösungen (= Grundlösungen) gestatten oft eine Darstellung der Lösung mit Faltungscharakter (dann kann Fourier-Transformation verwendet werden) oder dienen zur Überleitung des Differentialgleichungsproblems in ein Integralgleichungsproblem. In Ökonomien mit überlappenden Generationen führt (unter Bedingungen) die Bestimmung der Gleichgewichtspreise in Abhängigkeit von der Zeit auf Faltungsgleichungen (vgl. Demichelis und Polemarchakis [40]). Die Dirac-Distribution tritt u.a. als Spezialfall des Atoms bei Maßen auf. Ein großes Gebiet der Anwendung von Fourier-Transformationen sind Signaltheorie und Bildverarbeitung. Da in der modernen Wirtschaftswelt das Senden und das korrekte Empfangen von Signalen samt deren Verarbeitung (Bildverarbeitung) zunehmend breiteren Raum einnimmt, haben wir die Umwandlung digitaler in analoge Signale als Anwendungen zum Kapitel über Distributionen und Fourier-Transformationen mit aufgenommen.

Aus der Integrationstheorie haben wir aus Platzgründen nur einige Sätze dargestellt. Diese werden aber bei vielerlei Beweisen im Rahmen der Mathematischen Ökonomie, bei denen aus der (geeigneten) Konvergenz von Folgen z.B. auf die Existenz und Summierbarkeit des Grenzwertes geschlossen wird, angewandt.

Wir nennen schließlich stetige Transportprobleme (Massentransporte) etwa bei Stadtplanungen. Nicht nur, dass damit eines der historisch ersten Optimierungsprobleme in nicht endlichdimensionalen Räumen mit erfasst wird (Monge, 1746–1813), sondern in der modernen Literatur hierzu werden vielerlei funktionalanalytische Sachverhalte benutzt, es seien (vgl. z.B. Buttazzo, Santambrogio [29]) spezielle Metriken, die schwache* Topologie und die Dualitätstheorie erwähnt. Eine Diskussion von stetigen Transportproblemen (Massentransporte) unter Berücksichtigung stochastischer Aspekte wird in der Arbeit von Rüschemeyer [147] vorgenommen. Auf eine Nutzung der Dualitätstheorie zur Herleitung von Lösungsverfahren für Standortprobleme und deren Anwendung in der Regionalplanung wird in der Arbeit von Hamacher, Klamroth und Chr. Tammer [74] im Buch „Die Kunst des Modellierens“ von Luderer eingegangen, vgl. auch [162]. In Abschnitt 7.4 unseres Buches wird ein Standortproblem gelöst.

Das vorliegende Buch richtet sich sowohl an Studierende in Bachelor- als auch in Master-Studiengängen. Für Studierende in Bachelor-Studiengängen sind die Abschnitte zur Approximationstheorie (Kapitel 2), zu linearen und nichtlinearen Funktionalen (Kapitel 3) und der Anhang (Kapitel 10) als Grundlage für Anwendungsgebiete in der Mathematischen Ökonomie geeignet. Wichtige Sätze der Funktionalanalysis wie zum Beispiel Trennungssätze in Hilbert-Räumen basierend auf Projektionen (Satz 5.7) sind für Studierende der Bachelor-Studiengänge nachvollziehbar. Allgemeinere Trennungssätze in Abschnitt 5.3 sind für Studierende in Master-Studiengängen von Bedeutung, ebenso die Kapitel zum Hahn-Banach-Theorem (Kapitel 5), zu Fixpunktsätzen (Kapitel 6), Variationsprinzipien (Kapitel 7), Distributionen (Kapitel 8) und zu

halbbeschränkten Operatoren (Kapitel 9). Auch Wissenschaftler, die auf den Gebieten Angewandte Funktionalanalysis, Optimierungstheorie und Stochastik tätig sind, finden in unserem Buch eine umfassende Darstellung der funktionalanalytischen Grundlagen.

Auf Anwendungen der dargestellten Aussagen aus der Funktionalanalysis wird in unserem Buch großes Gewicht gelegt. Dazu sind in den Kapiteln Abschnitte mit Anwendungen und anwendungsorientierten Übungsaufgaben enthalten, wo geeignete Beispiele aus der Finanzmathematik, der Mathematischen Ökonomie und der Signaltheorie vorgestellt werden.

Zum ertragreichen Studium des Buches wäre es günstig, wenn der Leser bereits gute Grundlagenkenntnisse in der Analysis erworben und dabei Beweisführungen verstehen, nachvollziehen und selbst durchzuführen gelernt hat. Der Anhang ist bewusst sehr ausführlich ausgestaltet worden und kann auch unabhängig vom Haupttext im Selbststudium durchgearbeitet werden, er stellt den unverzichtbaren Kern dar, mit dessen Hilfe die weiteren Entfaltungsmöglichkeiten wahrgenommen werden können, die sich in den neun Kapiteln des Haupttextes eröffnen. Nach dem Studium des Buches und dem Durcharbeiten der Beispiele sollte der Leser imstande sein, einerseits in tiefergehende Kapitel der Optimierung und Stochastik eindringen zu können und andererseits einen leichteren Zugang für umfangreichere Anwendungsgebiete in der Mathematischen Ökonomie zu gewinnen.

Bei der Herstellung der computergestützten Anfertigung des Manuskripts haben uns Frau Sauter (Halle) und Frau M. Gaede-Samat (Dresden) in hervorragender Weise unterstützt. Wir möchten uns herzlich bedanken, ebenso beim Vieweg+Teubner Verlag für die gute Zusammenarbeit. Besonderen Dank richten wir an Herrn B. Luderer und Herrn W. Breckner für die gründliche Durchsicht des Manuskriptes und sehr konstruktive Anregungen. Weiterhin danken wir Herrn S. Dietze, Herrn A. Hamel und Herrn A. Löhne für nützliche Hinweise.

Im Dezember 2008,

Alfred Göpfert, Leipzig

Thomas Riedrich, Dresden

Christiane Tammer, Halle

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	V
1 Anwendung der Funktionalanalysis	1
1.1 Beispiele zur Optimierungstheorie in allgemeinen Räumen	1
1.2 Modellierung eines Marktgeschehens	5
2 Approximation	9
2.1 Approximationsprobleme, Projektionen und Optimale Steuerung	9
2.2 Orthonormalreihen	15
2.3 Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften	24
2.4 Übungsaufgaben	25
3 Funktionale und Operatoren	29
3.1 Lineare Funktionale	29
3.2 Lineare Operatoren	45
3.3 Nichtlineare Funktionale	61
3.4 Anwendungen in der Finanzmathematik und der Mehrkriteriellen Optimierung .	78
3.5 Übungsaufgaben	92
4 Das Banach-Steinhaus-Theorem	95
4.1 Die Baire'schen Sätze	95
4.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	99
4.3 Anwendungen und Beispiele	102
4.4 F_σ - und G_δ -Mengen. Was ist „generisch“?	107
5 Hahn-Banach-Theorem	111
5.1 Über den Satz von Hahn und Banach	111
5.2 Hahn-Banach-Theoreme und ihre Beweise	114
5.3 Trennungssätze	118
5.4 Subdifferential-Kalkül	123
5.5 Subdifferenziale spezieller Funktionale	126
5.6 Abstrakte Subdifferenziale und Multiplikatorenregeln	130
5.7 Ökonomische Interpretation der Dualität	133
5.8 Allgemeines Dualitätsprinzip für konvexe Optimierungsprobleme	135
5.9 Ein Proximal-Point-Algorithmus für stetige Approximationsprobleme	148

5.10	Anwendungen des Proximal-Point-Algorithmus zur Lösung von Multistandortproblemen	158
5.11	Übungsaufgaben	159
6	Fixpunktsätze und Durchschnittsprinzip	163
6.1	Fixpunktsätze	163
6.2	Durchschnittsprinzip und KKM-Abbildungen	173
6.3	Über Banach-Verbände	178
6.4	Eine wirtschaftsmathematische Anwendung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes	181
6.5	Übungsaufgaben	183
7	Variationsprinzipien vom Ekeland'schen Typ	187
7.1	Das Ekeland'sche Variationsprinzip	187
7.2	Folgerungen aus dem Variationsprinzip	195
7.3	Notwendige Bedingungen für Näherungslösungen von Approximationsproblemen	198
7.4	Nutzung des Variationsprinzips zur Lösung eines Standortproblems	201
7.5	Ein ε -Maximumprinzip und dessen ökonomische Interpretation	203
7.6	Anwendung des ε -Maximumprinzips bei betriebswirtschaftlichen Fragestellungen	207
7.7	Dichtheitsaussagen in der Vektoroptimierung	209
7.8	Übungsaufgaben zur Anwendung des Variationsprinzips von Ekeland	213
8	Distributionen - Theorie und Anwendungen	217
8.1	Approximationsprinzipien im L^2	217
8.2	Der Schwartz-Raum $\mathbf{S}(\mathbb{R}^N)$ ($N = 1, 2, \dots$)	224
8.3	Der Raum $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^N)$ der temperierten Distributionen	228
8.4	Das Rechnen mit temperierten Distributionen	229
8.5	Beispiele für temperierte Distributionen	234
8.6	Über die Hermite'schen Orthogonalfunktionen	238
8.7	Die stetige Einbettung von L^2 in \mathbf{S}'	244
8.8	Die Fourier-Transformation in $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{S}(\mathbb{R}^N)$	247
8.9	Die Fourier-Transformation in $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ und $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^N)$	256
8.10	Beispiele für die Anwendung der Fourier-Transformation	268
8.11	Zur Anwendung der Fourier-Transformation in der Signaltheorie. Beispiele und Aufgaben	272
8.12	Übungsaufgaben	273
9	Halbbeschränkte Operatoren in Hilbert-Räumen	279
9.1	Friedrichs'sche Fortsetzung	279
9.2	Lösung von Operatorgleichungen: Das Ritz'sche Verfahren	285
9.3	Übungsaufgaben (Newton-Verfahren)	288

10 Anhang	291
10.1 Vorbereitungen aus der Mengentheorie	291
10.2 Anwendung der Ordnungsrelationen, Pareto-Effizienz, Nutzensfunktionen	305
10.3 Räume	307
10.4 Über Kegel und Präferenzen in Optimierungsproblemen	338
10.5 Monotonie	343
10.6 Elemente der Maß- und Integrationstheorie, Wahrscheinlichkeitsräume	350
10.7 Verwendung unterschiedlicher Normen bei Approximationsproblemen	361
10.8 Übungsaufgaben	364
Literaturverzeichnis	367
Sachverzeichnis	379