

Hans Rudolf Schwarz | Norbert Köckler

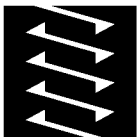
Numerische Mathematik

Hans Rudolf Schwarz | Norbert Köckler

# Numerische Mathematik

7., überarbeitete Auflage

STUDIUM



**VIEWEG+**  
**TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Hans Rudolf Schwarz  
Universität Zürich  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät (MNF)  
Winterthurerstrasse 190  
8057 Zürich

Prof. Dr. Norbert Köckler  
Universität Paderborn  
Fakultät EIM – Institut für Mathematik  
33098 Paderborn  
[norbert@uni-paderborn.de](mailto:norbert@uni-paderborn.de)

1. Auflage 1986  
6., überarbeitete Auflage 2006  
7., überarbeitete Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten  
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg  
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.  
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0683-3

## Vorwort zur 7. Auflage

Neben einigen kleinen Korrekturen wurde für diese Auflage das Kapitel 11 über die iterative Lösung von linearen Gleichungssystemen überarbeitet. Der Abschnitt über die ohnehin langsam konvergierenden Relaxationsverfahren wurde gekürzt und ein Abschnitt über Mehrgittermethoden hinzugefügt. Ich freue mich, dass ich damit einen Wunsch vieler Leser erfüllen kann, und bedanke mich bei meiner Tochter Ricarda für die sorgfältige Durchsicht.

Es gibt zwei elektronische Versionen dieses Lehrbuchs. Zum einen können einzelne Kapitel ergänzt um Links zu Programm-Masken und um multimediale Teile im pdf-Format beim Verlag bezogen werden. Zum anderen gibt es von den meisten Kapiteln für Vorlesungen vorbereitete Fassungen im PowerPoint-Stil. Sie sind über das DozentenPLUS-Portal des Verlags kostenlos erhältlich. Eine spezielle Internet-Seite ermöglicht den Zugriff auf die Programm-Masken und enthält alle aktuellen Informationen zum Stand dieses Projektes:

[www.uni-paderborn.de/SchwarzKoeckler/](http://www.uni-paderborn.de/SchwarzKoeckler/).

Paderborn, im Sommer 2008

Norbert Köckler

## Aus dem Vorwort zur 5. und 6. Auflage

Mit großer Freude habe ich die Bearbeitung und Fortführung dieses klassischen Lehrbuchs über die numerische Mathematik übernommen. Ich habe versucht, den Inhalt des Buches an die Entwicklung anzupassen, ohne den Anspruch meiner Vorgänger, der Herren Kollegen Prof. Dr. R. Stiefel und Prof. Dr. H. R. Schwarz, auf Vollständigkeit, Rigorosität bei den mathematischen Grundlagen und algorithmische Orientierung aufzugeben.

Inhaltlich habe ich eine Reihe von Änderungen durchgeführt. Das Kapitel über *lineare Optimierung* ist weggefallen, weil dies heute kaum noch in den Kanon der numerischen Ausbildung gehört und es gute Lehrbücher gibt, die sich ausschließlich diesem Thema widmen. Ein Kapitel über Fehlertheorie ist hinzugekommen. Die Kapitel über Interpolation und Funktionsapproximation habe ich zusammengelegt, weil ich glaube, dass in den Anwendungen von der Aufgabe ausgegangen wird Daten oder Funktionen zu approximieren, und erst dann die Entscheidung für die Interpolation oder für die Approximation gefällt wird. Die anderen Kapitel haben sich mal mehr, mal weniger verändert, der Leser der früheren Auflagen sollte insgesamt keine großen Umstellungsprobleme haben. Am Ende der Kapitel gibt es manchmal einen Abschnitt über Anwendungen und immer einen Abschnitt über Software, deren Gebrauch für uns Numeriker unerlässlich ist und die in verwirrender Vielfalt über das Internet oder andere Quellen erreichbar ist.

Herrn Schwarz danke ich für seine kollegiale Unterstützung, den Herren Sandten und Spuhler vom Teubner-Verlag für ihre professionelle und verständnisvolle Betreuung, Frau Karin Senske hat die typographische Umsetzung und manche Durchsicht mit Sorgfalt, Fleiß und Verständnis für mich erledigt; dafür bin ich ihr außerordentlich dankbar. Meinem lieben Kollegen Prof. Dr. Gisbert Stoyan von der ELTE in Budapest bin ich für seine akribische Durchsicht besonders dankbar; sie hat zur Korrektur zahlreicher kleiner Fehler, aber auch zu besserer Verständlichkeit einiger Formulierungen beigetragen.

Paderborn, im Sommer 2006

Norbert Köckler

## Aus dem Vorwort zur 4. Auflage

Das Buch entstand auf den seinerzeitigen ausdrücklichen Wunsch meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. E. Stiefel, der mich im Sinne eines Vermächtnisses beauftragte, sein während vielen Jahren wegweisendes Standardwerk [Sti 76] von Grund auf neu zu schreiben und den modernen Erkenntnissen und Bedürfnissen anzupassen. Klarheit und Ausführlichkeit waren stets die Hauptanliegen von Herrn Professor Stiefel. Ich habe versucht, in diesem Lehrbuch dieser von ihm geprägten Philosophie zu folgen, und so werden die grundlegenden Methoden der numerischen Mathematik in einer ausführlichen Darstellung behandelt.

Das Buch ist entstanden aus Vorlesungen an der Universität Zürich. Der behandelte Stoff umfasst im Wesentlichen das Wissen, das der Verfasser seinen Studenten in einem viersemestrigen Vorlesungszyklus zu je vier Wochenstunden vermittelte. Sie sollen damit in die Lage versetzt werden, Aufgaben der angewandten Mathematik mit numerischen Methoden erfolgreich zu lösen oder zumindest die Grundlagen für das Studium von weiterführender spezialisierter Literatur zu haben. Das Buch richtet sich an Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker und Absolventen naturwissenschaftlicher Richtungen. Vorausgesetzt wird diejenige mathematische Vorbildung, die in den unteren Semestern eines Hochschulstudiums oder an Ingenieurschulen vermittelt wird.

Die Darstellung des Stoffes ist algorithmisch ausgerichtet. Zur Begründung einer numerischen Methode werden zuerst die theoretischen Grundlagen vermittelt, soweit sie erforderlich sind, um anschließend das Verfahren so zu formulieren, dass seine Realisierung in einem Programm einfach ist.

Um die speziellen Kenntnisse auf dem Gebiet der numerischen Integralberechnung, die Herr Dr. J. Waldvogel an der ETH Zürich erarbeitet hat, in das Buch einfließen zu lassen, hat er die Abschnitte 7.1 und 7.3 sowie die zugehörigen Aufgaben verfasst. Für diese wertvolle Mitarbeit danke ich ihm hiermit bestens. Meinen beiden Assistenten, den Herren Dipl.-Math. W. Businger und H. P. Märchy verdanke ich viele Anregungen und die kritische Durchsicht des Manuskripts. Schließlich danke ich dem Verlag B. G. Teubner für die Herausgabe des Buches und für die stets freundliche und entgegenkommende Zusammenarbeit.

Mit der vierten Auflage des Buches wurde versucht, eine Aktualisierung des Stoffumfangs zu erreichen, indem in verschiedener Hinsicht Ergänzungen eingefügt wurden. Um eine oft bemängelte Lücke zu schließen, wurden grundlegende Methoden zur Behandlung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen aufgenommen. Weiter wurde im gleichen Zug die für die Computergraphik zentrale Bézier-Technik zur Darstellung von Kurven und Flächen berücksichtigt. Schließlich fanden die modernen Aspekte der Vektorisierung und Parallelisierung von Algorithmen Aufnahme im Buch. Das notwendige Vorgehen zur Vektorisierung wird am Beispiel der effizienten Lösung von linearen Gleichungssystemen mit vollbesetzter und tridiagonaler Matrix dargelegt. Desgleichen werden die wesentliche Idee und Techniken der Parallelisierung am Beispiel der Lösung von linearen Gleichungssystemen entwickelt und die einschlägigen Algorithmen dargestellt.

Zürich, im Herbst 1996

H. R. Schwarz

# Inhalt

<b>Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>1 Fehlertheorie</b>	<b>15</b>
1.1 Fehlerarten . . . . .	15
1.2 Zahldarstellung . . . . .	16
1.3 Rundungsfehler . . . . .	18
1.4 Differenzielle Fehleranalyse . . . . .	21
1.5 Ergänzungen und Beispiele . . . . .	24
1.6 Software . . . . .	27
1.7 Aufgaben . . . . .	28
<b>2 Lineare Gleichungssysteme, direkte Methoden</b>	<b>30</b>
2.1 Der Gauß-Algorithmus . . . . .	30
2.1.1 Elimination, Dreieckszerlegung und Determinantenberechnung . . . . .	30
2.1.2 Pivotstrategien . . . . .	38
2.1.3 Ergänzungen . . . . .	43
2.2 Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen . . . . .	47
2.2.1 Normen . . . . .	47
2.2.2 Fehlerabschätzungen, Kondition . . . . .	52
2.3 Systeme mit speziellen Eigenschaften . . . . .	56
2.3.1 Symmetrische, positiv definite Systeme . . . . .	56
2.3.2 Bandgleichungen . . . . .	62
2.3.3 Tridiagonale Gleichungssysteme . . . . .	64
2.4 Verfahren für Vektorrechner und Parallelrechner . . . . .	67
2.4.1 Voll besetzte Systeme . . . . .	68
2.4.2 Tridiagonale Gleichungssysteme . . . . .	73
2.5 Anwendungen . . . . .	82
2.6 Software . . . . .	87
2.7 Aufgaben . . . . .	88

<b>3</b>	<b>Interpolation und Approximation</b>	<b>91</b>
3.1	Polynominterpolation . . . . .	92
3.1.1	Problemstellung . . . . .	92
3.1.2	Lagrange-Interpolation . . . . .	95
3.1.3	Newton-Interpolation . . . . .	95
3.1.4	Hermite-Interpolation . . . . .	98
3.1.5	Inverse Interpolation . . . . .	100
3.1.6	Anwendung: Numerische Differenziation . . . . .	101
3.2	Splines . . . . .	106
3.2.1	Kubische Splines . . . . .	107
3.2.2	B-Splines 1. Grades . . . . .	112
3.2.3	Kubische B-Splines . . . . .	114
3.3	Zweidimensionale Splineverfahren . . . . .	119
3.3.1	Bilineare Tensorsplines . . . . .	120
3.3.2	Bikubische Tensorsplines . . . . .	123
3.4	Kurveninterpolation . . . . .	125
3.5	Kurven und Flächen mit Bézier-Polynomen . . . . .	127
3.5.1	Bernstein-Polynome . . . . .	127
3.5.2	Bézier-Darstellung eines Polynoms . . . . .	129
3.5.3	Der Casteljau-Algorithmus . . . . .	130
3.5.4	Bézier-Kurven . . . . .	131
3.5.5	Bézier-Flächen . . . . .	137
3.6	Gauß-Approximation . . . . .	140
3.6.1	Diskrete Gauß-Approximation . . . . .	142
3.6.2	Kontinuierliche Gauß-Approximation . . . . .	144
3.7	Trigonometrische Approximation . . . . .	145
3.7.1	Fourier-Reihen . . . . .	145
3.7.2	Effiziente Berechnung der Fourier-Koeffizienten . . . . .	154
3.8	Orthogonale Polynome . . . . .	161
3.8.1	Approximation mit Tschebyscheff-Polynomen . . . . .	162
3.8.2	Interpolation mit Tschebyscheff-Polynomen . . . . .	170
3.8.3	Die Legendre-Polynome . . . . .	174
3.9	Software . . . . .	179
3.10	Aufgaben . . . . .	180
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Gleichungen</b>	<b>183</b>
4.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	183
4.1.1	Problemstellung . . . . .	183
4.1.2	Konvergenztheorie und Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	185
4.1.3	Stabilität und Kondition . . . . .	189

4.2	Gleichungen in einer Unbekannten . . . . .	190
4.2.1	Das Verfahren der Bisektion . . . . .	190
4.2.2	Das Verfahren von Newton . . . . .	192
4.2.3	Die Sekantenmethode . . . . .	195
4.2.4	Brents Black-box-Methode . . . . .	196
4.3	Gleichungen in mehreren Unbekannten . . . . .	199
4.3.1	Fixpunktiteration und Konvergenz . . . . .	199
4.3.2	Das Verfahren von Newton . . . . .	200
4.4	Nullstellen von Polynomen . . . . .	207
4.4.1	Reelle Nullstellen: Das Verfahren von Newton-Maehly . . . . .	207
4.4.2	Komplexe Nullstellen: Das Verfahren von Bairstow . . . . .	211
4.5	Software . . . . .	215
4.6	Aufgaben . . . . .	215
<b>5</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>218</b>
5.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	219
5.1.1	Das charakteristische Polynom . . . . .	219
5.1.2	Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	219
5.1.3	Symmetrische Eigenwertprobleme . . . . .	220
5.1.4	Elementare Rotationsmatrizen . . . . .	220
5.2	Das klassische Jacobi-Verfahren . . . . .	222
5.3	Die Vektoriteration . . . . .	229
5.3.1	Die einfache Vektoriteration nach von Mises . . . . .	229
5.3.2	Die inverse Vektoriteration . . . . .	231
5.4	Transformationsmethoden . . . . .	232
5.4.1	Transformation auf Hessenberg-Form . . . . .	233
5.4.2	Transformation auf tridiagonale Form . . . . .	237
5.4.3	Schnelle Givens-Transformation . . . . .	239
5.5	<i>QR</i> -Algorithmus . . . . .	243
5.5.1	Grundlagen zur <i>QR</i> -Transformation . . . . .	243
5.5.2	Praktische Durchführung, reelle Eigenwerte . . . . .	248
5.5.3	<i>QR</i> -Doppelschritt, komplexe Eigenwerte . . . . .	253
5.5.4	<i>QR</i> -Algorithmus für tridiagonale Matrizen . . . . .	256
5.5.5	Zur Berechnung der Eigenvektoren . . . . .	260
5.6	Das allgemeine Eigenwertproblem . . . . .	261
5.6.1	Der symmetrisch positiv definite Fall . . . . .	261
5.7	Eigenwertschranken, Kondition, Stabilität . . . . .	264
5.8	Anwendung: Membranschwingungen . . . . .	268
5.9	Software . . . . .	270
5.10	Aufgaben . . . . .	271



<b>6</b>	<b>Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate</b>	<b>274</b>
6.1	Lineare Ausgleichsprobleme, Normalgleichungen . . . . .	274
6.2	Methoden der Orthogonaltransformation . . . . .	278
6.2.1	Givens-Transformation . . . . .	279
6.2.2	Spezielle Rechentechniken . . . . .	284
6.2.3	Householder-Transformation . . . . .	286
6.3	Singulärwertzerlegung . . . . .	292
6.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme . . . . .	296
6.4.1	Gauß-Newton-Methode . . . . .	297
6.4.2	Minimierungsverfahren . . . . .	300
6.5	Software . . . . .	304
6.6	Aufgaben . . . . .	305
<b>7</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>307</b>
7.1	Newton-Cotes-Formeln . . . . .	308
7.1.1	Konstruktion von Newton-Cotes-Formeln . . . . .	308
7.1.2	Verfeinerung der Trapezregel . . . . .	310
7.2	Romberg-Integration . . . . .	313
7.3	Transformationsmethoden . . . . .	315
7.3.1	Periodische Integranden . . . . .	316
7.3.2	Integrale über $\mathbb{R}$ . . . . .	318
7.3.3	Variablensubstitution . . . . .	320
7.4	Gauß-Integration . . . . .	323
7.4.1	Eingebettete Gauß-Regeln . . . . .	331
7.5	Adaptive Integration . . . . .	332
7.6	Mehrdimensionale Integration . . . . .	336
7.6.1	Produktintegration . . . . .	336
7.6.2	Integration über Standardgebiete . . . . .	337
7.7	Software . . . . .	338
7.8	Aufgaben . . . . .	339
<b>8</b>	<b>Anfangswertprobleme</b>	<b>342</b>
8.1	Einführung . . . . .	343
8.1.1	Problemklasse und theoretische Grundlagen . . . . .	343
8.1.2	Möglichkeiten numerischer Lösung . . . . .	345
8.2	Einschrittverfahren . . . . .	350
8.2.1	Konsistenz . . . . .	350
8.2.2	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	353
8.2.3	Explizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	354

Inhalt		11
8.2.4	Halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	358
8.2.5	Schrittweitensteuerung . . . . .	359
8.3	Mehrschrittverfahren . . . . .	363
8.3.1	Verfahren vom Adams-Typ . . . . .	363
8.3.2	Konvergenztheorie und Verfahrenskonstruktion . . . . .	368
8.4	Stabilität . . . . .	376
8.4.1	Inhärente Instabilität . . . . .	376
8.4.2	Absolute Stabilität bei Einschrittverfahren . . . . .	378
8.4.3	Absolute Stabilität bei Mehrschrittverfahren . . . . .	380
8.4.4	Steife Differenzialgleichungen . . . . .	384
8.5	Anwendung: Lotka-Volterras Wettbewerbsmodell . . . . .	388
8.6	Software . . . . .	391
8.7	Aufgaben . . . . .	392
<b>9</b>	<b>Rand- und Eigenwertprobleme</b>	<b>395</b>
9.1	Problemstellung und Beispiele . . . . .	395
9.2	Lineare Randwertaufgaben . . . . .	399
9.2.1	Allgemeine Lösung . . . . .	399
9.2.2	Analytische Methoden . . . . .	401
9.2.3	Analytische Methoden mit Funktionenansätzen . . . . .	404
9.3	Schießverfahren . . . . .	408
9.3.1	Das Einfach-Schießverfahren . . . . .	408
9.3.2	Das Mehrfach-Schießverfahren . . . . .	413
9.4	Differenzenverfahren . . . . .	418
9.4.1	Dividierte Differenzen . . . . .	418
9.4.2	Diskretisierung der Randwertaufgabe . . . . .	419
9.5	Software . . . . .	424
9.6	Aufgaben . . . . .	425
<b>10</b>	<b>Partielle Differenzialgleichungen</b>	<b>427</b>
10.1	Differenzenverfahren . . . . .	427
10.1.1	Problemstellung . . . . .	427
10.1.2	Diskretisierung der Aufgabe . . . . .	429
10.1.3	Randnahe Gitterpunkte, allgemeine Randbedingungen . . . . .	434
10.1.4	Diskretisierungsfehler . . . . .	444
10.1.5	Ergänzungen . . . . .	446
10.2	Parabolische Anfangsrandwertaufgaben . . . . .	448
10.2.1	Eindimensionale Probleme, explizite Methode . . . . .	448
10.2.2	Eindimensionale Probleme, implizite Methode . . . . .	454
10.2.3	Diffusionsgleichung mit variablen Koeffizienten . . . . .	459

10.2.4	Zweidimensionale Probleme . . . . .	461
10.3	Methode der finiten Elemente . . . . .	466
10.3.1	Grundlagen . . . . .	466
10.3.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente . . . . .	469
10.3.3	Elementweise Bearbeitung . . . . .	471
10.3.4	Aufbau und Behandlung der linearen Gleichungen . . . . .	477
10.3.5	Beispiele . . . . .	477
10.4	Software . . . . .	482
10.5	Aufgaben . . . . .	483
<b>11</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren</b>	<b>487</b>
11.1	Diskretisierung partieller Differenzialgleichungen . . . . .	487
11.2	Relaxationsverfahren . . . . .	489
11.2.1	Konstruktion der Iterationsverfahren . . . . .	489
11.2.2	Einige Konvergenzsätze . . . . .	494
11.2.3	Optimaler Relaxationsparameter und Konvergenzgeschwindigkeit . . . . .	505
11.3	Mehrgittermethoden . . . . .	508
11.3.1	Ein eindimensionales Modellproblem . . . . .	508
11.3.2	Eigenschaften der gedämpften Jacobi-Iteration . . . . .	509
11.3.3	Ideen für ein Zweigitterverfahren . . . . .	511
11.3.4	Eine eindimensionale Zweigittermethode . . . . .	513
11.3.5	Die Mehrgitter-Operatoren für das zweidimensionale Modellproblem . . . . .	517
11.3.6	Vollständige Mehrgitterzyklen . . . . .	519
11.3.7	Komplexität . . . . .	521
11.3.8	Ein Hauch Theorie . . . . .	521
11.4	Methode der konjugierten Gradienten . . . . .	527
11.4.1	Herleitung des Algorithmus . . . . .	527
11.4.2	Eigenschaften der Methode der konjugierten Gradienten . . . . .	532
11.4.3	Konvergenzabschätzung . . . . .	535
11.4.4	Vorkonditionierung . . . . .	539
11.5	Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen . . . . .	545
11.5.1	Grundlagen des Verfahrens . . . . .	545
11.5.2	Algorithmische Beschreibung und Eigenschaften . . . . .	548
11.6	Speicherung schwach besetzter Matrizen . . . . .	553
11.7	Software . . . . .	556
11.8	Aufgaben . . . . .	556
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>561</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>574</b>