

Susanne Müller-Philipp | Hans-Joachim Gorski

Leitfaden Geometrie

Susanne Müller-Philipp | Hans-Joachim Gorski

# Leitfaden Geometrie

Für Studierende der Lehrämter

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

STUDIUM



**VIEWEG+**  
**TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dr. Susanne Müller-Philipp  
Dr. Hans-Joachim Gorski  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik  
Fliederstraße 21  
48149 Münster

hgorski@uni-muenster.de  
muephi@uni-muenster.de

1. Auflage 2001
- 2., überarbeitete Auflage 2004
- 3., überarbeitete Auflage 2005
- 4., überarbeitete und erweiterte Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten  
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg  
Umschlagmotiv: Ehrhard Behrends, Berlin  
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.  
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0097-8

---

## Vorwort zur vierten Auflage

Mit dem *Leitfaden Geometrie* wenden wir uns nach wie vor primär an Lehramtsstudierende mit den Studienzielen Primarstufe und Sekundarstufe I, auch wenn wir aus Rückmeldungen von Universitäten des deutschsprachigen Raums erfahren, dass das Buch in zunehmendem Umfang auch in den Studiengängen Diplom bzw. Lehramt Sekundarstufe II verwendet wird.

Der *Leitfaden Geometrie* soll Sie mit verschiedenen Bereichen der Geometrie bekannt machen, die einen tragfähigen Hintergrund für Ihren späteren Geometrieunterricht bilden können.

Die vierte Auflage erscheint recht genau drei Jahre nach der vorangegangenen im Buchhandel. Sie unterscheidet sich von der dritten Auflage durch zahlreiche Detailoptimierungen und Ergänzungen. Beispielhaft sei hier die Aufnahme eines Kapitels zum „goldenen Schnitt“ genannt.

In unseren Vorlesungen zur Geometrie ist das Werkzeug „Computer mit dynamischer Geometriesoftware (DGS)“ heute nicht mehr wegzudenken. Ähnliches gilt auch für einen zeitgemäßen Geometrieunterricht im Sekundarbereich I. Das Aufkommen von Taschenrechnern hat seinerzeit die Bedeutung des überschlägigen Rechnens, des Kopfrechnens und des halbschriftlichen Rechnens erhöht und bei der Behandlung der schriftlichen Verfahren (in der Grundschule) den Fokus auf das Verständnis der zugrundeliegenden Algorithmen gelegt. Ganz analog dazu gewinnen beim Einsatz von DGS geschickte Freihandzeichnungen, Überlegungsskizzen und vor allem das Verständnis um die grundlegenden Konstruktionsalgorithmen an Bedeutung. Aus diesem Grund haben wir die aktuelle Auflage des *Leitfadens Geometrie* um ein eigenes Kapitel zu „Geometrischen Konstruktionen“ ergänzt.

„Dieses Buch ist in einem mehrfach durchlaufenen Zirkel aus Entwicklung, Anwendung in Lehrveranstaltungen und Übungen, Rückmeldungen der Studierenden und Hilfskräfte und Optimierung der Entwicklung gewachsen. Damit ist es kein Labor- oder Dienstzimmerprodukt, sondern das Ergebnis ständiger Interaktionsprozesse mit Studierenden und Hilfskräften, die insofern Mitkonstrukteure dieses Buchs sind.“ So stand es in der ersten Auflage des *Leitfadens* und so soll es bleiben – solange wir jung sind.

In den zurückliegenden Jahren haben wir darüber hinaus eine Vielzahl von mündlichen und schriftlichen Rückmeldungen aus den Reihen der Leserschaft aufgenommen, angenommen und ggf. modifiziert in die aktuelle Auflage übernommen, soweit das Profil des *Leitfadens Geometrie* dadurch nicht verändert wurde. Insofern sind die Leserinnen und Leser der vergriffenen Auflagen aktive Mitgestalter im Prozess der Weiterentwicklung des *Leitfadens Geometrie*.

Dafür danken wir ihnen.

Ausdrücklicher Dank gilt auch Benjamin Imping, der uns bei der Herstellung des Manuskripts vielfältig unterstützt hat.

Münster, im September 2008

S. Müller-Philipp & J. Gorski

---

## Inhaltsverzeichnis

### Vororientierung

- Zielvorstellungen im Leitfaden Geometrie	x
- Methoden im Leitfaden Geometrie	xii
- Einsatz des Leitfadens Geometrie als vorlesungsbegleitende Literatur	xiv

<b>1</b>	<b>Topologie</b>	<b>1</b>
1.1	Einstiegsproblem	1
1.2	Grundlegende Definitionen der Graphentheorie	6
1.3	Eckenordnungen und Kantenzahlen	14
1.4	Plättbarkeit von Graphen	20
1.5	Durchlaufbarkeit von Graphen	28
1.6	Erteilungs- und Färbungsprobleme	34
<b>2</b>	<b>Polyeder</b>	<b>46</b>
2.1	Einstiegsproblem	46
2.2	Die platonischen Körper	50
2.3	Halbreguläre Polyeder	57
<b>3</b>	<b>Axiomatik</b>	<b>64</b>
3.1	Zum Einstieg	64
3.2	Inzidenzgeometrie	69
3.3	Affine und projektive Inzidenzgeometrien	73
3.4	Axiome der Anordnung	79
3.5	Winkel	83
3.6	Längen- und Winkelmessung	86
3.7	Zusammenstellung aller relevanten Axiome	95

---

<b>4</b>	<b>Abbildungsgeometrie</b>	97
4.1	Einstiegsproblem	97
4.2	Kongruenzabbildungen	101
4.2.1	Definition und Eigenschaften der Kongruenzabbildungen	102
4.2.2	Verkettung von Kongruenzabbildungen	118
4.2.3	Weitere Sätze zur Verkettung von Kongruenzabbildungen	146
4.2.4	Die Gruppe der Kongruenzabbildungen	147
4.2.5	Kongruenz von Strecken, Winkeln, Dreiecken	152
4.2.6	Deckabbildungsgruppen	167
4.3	Ähnlichkeitsabbildungen	178
4.4	Affine Abbildungen	189
<b>5</b>	<b>Geometrische Konstruktionen</b>	195
5.1	Einstieg	195
5.2	Grundlegendes	199
5.3	Ausgewählte Hilfsmittel zum Konstruieren	203
5.4	Grundkonstruktionen	206
5.4.1	Abtragen	206
5.4.2	Halbieren	210
5.4.3	Lote	212
5.4.4	Parallele durch einen Punkt	215
5.4.5	Mittelparallele	217
5.4.6	Linien im Dreieck	218
5.4.7	Konstruktionen am Kreis	222
5.4.8	Teilung in $n$ gleiche Teile	225
<b>6</b>	<b>Fragestellungen der euklidischen Geometrie</b>	231
6.1	Einstiegsproblem	231
6.2	Besondere Punkte und Linien im Dreieck	236
6.3	Sätze am Kreis	251
6.4	Die Satzgruppe des Pythagoras	261
6.5	Der goldene Schnitt	273

<b>7</b>	<b>Darstellende Geometrie</b>	283
7.1	Einstiegsproblem	283
7.2	Axonometrie	287
7.3	Dreitafelprojektion	296
7.4	Zentralprojektion	300
	Benutzte Zeichen und Abkürzungen	308
	Literatur	310
	Stichwortverzeichnis	313



## Vororientierung

### Zielvorstellungen im Leitfaden Geometrie

Was soll das Ganze? Was wollen Sie von uns? Was genau sollen wir lernen? Warum lernen wir das? Wie sollen wir das lernen? Können wir es in unserem späteren Beruf / im Leben gebrauchen?

Fragen dieser Art stellen Lernende an den verschiedensten Stellen unseres Bildungssystems, jedenfalls sollten sie sie stellen. Auf der anderen Seite sollten die Initiatoren der Lernprozesse Antworten auf diese Fragen bereithalten, die die Lernenden in ihrer Lernausgangslage zufrieden stellen:

Zunächst verfolgen wir natürlich rein fachliche Ziele. Es geht uns darum, Ihnen mathematische Qualifikationen für Ihre spätere Unterrichtspraxis zu vermitteln. In diesem Zusammenhang haben wir sieben Themenbereiche ausgewählt, von denen wir überzeugt sind, dass sie eine tragfähige Grundlage für einen kompetenten Geometrieunterricht von Klasse 1 bis 10 bedeuten können. Beispielfhaft denken wir hier an das Kapitel „Abbildungsgeometrie“, das zentrale Qualifikationen für die Lernbereiche „Flächeninhaltsbestimmungen“, „Kongruenzabbildungen“, „zentrische Streckung“ im Sekundarbereich I und für die Themen „Symmetrie“, „Ornamente“, „Vergrößern – Verkleinern“ in der Grundschule (und in der Sekundarstufe I) bereitstellt.

Mit der ausdrücklichen Herausstellung der folgenden Zielvorstellungen verlassen wir den Rahmen üblicher mathematischer Fachbücher:

- *Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens*

Wenn Sie in der Schule nicht gefördert wurden (und räumliches Vorstellungsvermögen entwickelt sich am besten bis zum Alter von etwa 12 Jahren), dann muss hier unter Umständen „nachgebessert“ werden. Das geht auch bei Erwachsenen. Besuden hat uns in seinen Aufsätzen zum räumlichen Vorstellungsvermögen immer wieder darauf hingewiesen, dass Raumvorstellung das Ergebnis von Verinnerlichungsprozessen ist und letztere – das wissen wir von Aebli – haben ihren Ausgangspunkt bei konkreten Handlungen. Denken ist verinnerlichtes Handeln (Aebli). Sie müssen Handlungserfahrungen machen und diese mehr und mehr im Kopf durchführen. Braucht man erst die konkreten Objekte, mit denen man hantiert, so werden diese allmählich durch Visualisierungen und schließlich durch Vorstellungen von den Objekten ersetzt. Einen besonde-

ren Beitrag zur Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens wollen wir im Kapitel „Polyeder“ leisten. Hier sollen Sie sich komplexere Körper vorstellen und in der gelungenen Vorstellung Manipulationen mit / an diesen Objekten vornehmen. Dazu sollten Sie die konkreten Objekte zunächst selbst herstellen, und damit sind wir beim nächsten Punkt.

- *Schulrelevante Arbeitsweisen auf höherem Niveau erfahren und anwenden*

Das Herstellen von Körpernetzen und das Erstellen der Körper aus Karton sind schultypische Tätigkeiten. Um Sie nicht zu unterfordern, Sie aber trotzdem mit den Problemen, die da auftauchen können, zu konfrontieren, werden wir von Ihnen so etwas erwarten, allerdings bei komplizierteren Gebilden. Ähnliches gilt für das Falten, das Arbeiten mit Plättchenmaterial usw. Wo es sich anbietet, sollen solche Tätigkeiten auch Ihnen beim Lernen von Mathematik nützen.

Schließlich sollte jede Lehrerin und jeder Lehrer in der Lage sein, etwa einen Würfel, einen Quader, eine Pyramide (mit quadratischer Grundfläche), einen Zylinder oder einen Kegel ad hoc an der Tafel zu skizzieren bzw. exakt darzustellen. In der Sekundarstufe I werden Sie dies auch von ihren Schülerinnen und Schülern erwarten, in der Primarstufe vielleicht für die erstgenannten Körper. Unmittelbare Basisqualifikationen hierfür versuchen wir Ihnen im Kapitel „Darstellende Geometrie“ zu vermitteln.

- *Über die Schulformen hinaus blicken*

Für die angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer: Sie werden in diesem Buch auch mit Inhalten des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I konfrontiert. Dies ist wichtig, damit Sie Ihren späteren Mathematikunterricht so gestalten können, dass er tragfähige Konzepte liefert, die von den Kindern kein Umlernen in weiterführenden Schulen erfordern, sondern ein Aufbauen auf Bekanntem und ein Weiterverfolgen bekannter Arbeits- und Denkweisen. Als ein Beispiel aus diesem Buch nennen wir hier das „Haus der Vierecke“. Die Behandlung von Deckabbildungsgruppen soll Ihnen helfen, Aktivitäten des Faltens und Verschönerns von Quadraten oder das Legen von Plättchen vor einem mathematischen Hintergrund zu sehen.

Für die angehenden Sekundarstufenlehrerinnen und -lehrer: Sie werden eine Reihe von Aktivitäten kennen lernen, die Kindern aus der Grundschulzeit schon vertraut sind. Sie übernehmen die Kinder nicht in Klasse 5 als geometrisch „unbeschriebene Blätter“. Ihre Vorerfahrungen, ihre Erwartungen, die ihnen vertrauten Arbeitsformen, Materialien, Techniken können und müssen Sie aufgreifen.

- *Förderung der Bereitschaft zum Umgang mit Problemen*

Der Erwerb mathematischen Wissens ist ein aktiver, konstruktiver Prozess. Das geht nicht ohne Fehler und nicht ohne Anstrengungen. Immer wieder werden wir Sie mit komplexeren Problemen konfrontieren, die sich einer schnellen Lösung entziehen. Wir erwarten, dass Sie sich auch darauf einlassen, und hoffen, dass Sie sich dabei selbst beobachten. So können Sie Erfahrungen sammeln, die Ihnen später helfen, die Lernprozesse von Kindern besser zu verstehen.

- *Anwendungsorientierung*

„Wer [...] durch Mathematik Allgemeinbildung vermitteln will, darf sich nicht auf rein innermathematische Theorien und Strukturprinzipien beschränken, sondern muss auch die Beziehungen der Mathematik zum Leben entwickeln.“ (Wittmann 1987, S. VI) Wir versuchen, sinnvolle Sachzusammenhänge zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zu machen. Interessante, auch fächerübergreifende Fragen wie z.B. die Geometrie der Bienenwabe stellen vermutlich hohe Anforderungen an Sie, fördern unseres Erachtens aber auch die Bereitschaft zur Auseinandersetzung. Auf der anderen Seite werden wir von Ihnen erwarten, erworbene Abstraktionen nicht nur innermathematisch, sondern auch auf Alltagssituationen und Fragestellungen aus dem Schulalltag anzuwenden.

## Methoden im Leitfaden Geometrie

Zum Erreichen der genannten Zielvorstellungen und um Mathematik maximal verstehbar zu machen, greifen wir unter anderem auf folgende im weiteren Sinn methodische Hilfsmittel, Techniken zurück:

- durchgängige Orientierung an Erkenntnissen der Lernpsychologie und Textproduktion;
- bewusster Einbau von Redundanzen, um Häufungsstellen von Informationsquanten zu entzerren und dem Lernenden einen „fließenden“ Lernprozess mit gleichmäßigem (für ihn hoffentlich mittleren) Schwierigkeitsgrad zu ermöglichen;
- Initiierung von Selbsttätigkeiten der Leser auf allen Darstellungsebenen (Bruner) bzw. Ebenen der Erkenntnistätigkeit (Lompscher), sei es bei Hinführungen, Beispielen, Anwendungen oder in Beweisprozessen;
- häufige Wiederholungen / Rückschauen auf bisher „Geleistetes“;

- z.T. spiralcurriculumförmiges Aufgreifen früherer Erkenntnisse auf höherem / anderem Niveau (Bruner);
- gelegentlicher Verzicht auf fachlich extrem verdichtete und daher elegante Argumentationen zugunsten der
- Verwendung von Überlegungen und Formulierungen aus den Reihen unserer Studierenden;
- Integration zahlreicher beispielgebundener Hinführungen zu neuen Sätzen, denn: „Man muss einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist; [...] Man muss Beobachtungen kombinieren und Analogien verfolgen, man muss immer und immer wieder probieren.“ (Polya 1962, S. 10)
- Beweise werden häufig erst dann geführt, wenn das Verständnis des zu Beweisenden oder der Beweisidee am Beispiel sichergestellt ist;
- vielfältige Maßnahmen zur Vorstrukturierung des Lernstoffes, teils in Form von „Vororientierungen“ (Ausubel) oder Hinführungen, besonders häufig aber durch im Text auch satztechnisch hervorgehobene „Leitfragen“;
- regelmäßig eingestreute Übungsaufgaben, aber auch
- unregelmäßig eingestreute kleine Scherze.

Wir möchten, dass unsere Leserinnen und Leser mit dem *Leitfaden Geometrie* Mathematik wirklich verstehen, das Verstandene anwenden und in angemessenem Umfang selbständig damit weiterarbeiten.

Die Moderatorin eines – aus welchen Gründen auch immer – beliebten Literaturmagazins im deutschen Fernsehen würde auch zu diesem Buch vermutlich sagen: **L e s e n** Sie den *Leitfaden Geometrie*. **L e s e n** Sie. Ganz gleich was Sie **l e s e n**. **L e s e n** Sie alles Mögliche. Hauptsache Sie **l e s e n**.

Wir hingegen empfehlen:

Folgen Sie den Empfehlungen dieser Moderatorin allenfalls in begründeten Ausnahmefällen.

Lesen Sie den *Leitfaden Geometrie* nicht. Arbeiten Sie ihn durch!

Nutzen Sie jedes der zahlreichen im Text eingebauten Angebote zum selbständigen Lernen: Basteln Sie, zeichnen Sie, konstruieren Sie, lösen Sie die Übungsaufgaben, äußern Sie sich zu bewusst eingebauten Provokationen, beantworten Sie im Text oder in Fußnoten auftauchende Verständnisfragen bevor Sie weiterlesen – nein, weiter durcharbeiten!

## **Einsatz des Leitfadens Geometrie als vorlesungsbegleitende Literatur**

Der *Leitfaden Geometrie* bietet mehr, als man realistisch in einer vierstündigen Vorlesung behandeln kann. Auch wenn die Auswahl der Inhalte natürlich die Entscheidung der Dozentin / des Dozenten ist, wollen wir hier doch einige Anregungen für einen möglichst gewinnbringenden Einsatz des *Leitfadens Geometrie* geben:

### Variante 1

Kapitel 1 (Topologie) und Kapitel 2 (Polyeder) sind unabhängig voneinander und nicht Voraussetzung für das Verständnis der folgenden Kapitel. Strebt man einen möglichst systematischen Aufbau der Geometrie an mit einer axiomatischen Grundlegung und einer Betonung der Abbildungsgeometrie, so kann man auch bei Kapitel 3 (Axiomatik) einsteigen, Kapitel 4 (Abbildungsgeometrie) und Kapitel 6 (Euklidische Geometrie) behandeln und dann entscheiden, welche der verbleibenden Kapitel eine sinnvolle Ergänzung wären.

Zu Risiken und Nebenwirkungen dieses Weges sei angemerkt: Falls hierbei Kapitel 2 (Polyeder) und 7 (Darstellende Geometrie) nicht (gründlich) behandelt werden, weisen wir darauf hin, dass die oben geforderte Schulung der Raumvorstellung zu kurz kommen kann.

### Variante 2

Wer die Axiomatik am ehesten für verzichtbar hält, kann Kapitel 3 (Axiomatik) überschlagen und stattdessen nur einen Blick auf die Zusammenfassung aller eingeführten Axiome am Ende dieses Kapitels werfen. Eine weitere vertretbare Kürzung stellen die letzten Abschnitte von Kapitel 4 (Abbildungsgeometrie) zu Ähnlichkeitsabbildungen (mit Ausnahme der in Kapitel 6 benötigten Strahlensätze) und affinen Abbildungen dar.

Wir halten diesen Weg für weitgehend risiko- und nebenwirkungsfrei.

### Variante 3

Wer meint, es sei nicht Aufgabe eines Universitätsstudiums, Schulstoff zu wiederholen, bzw. wer das Glück hat, auf eine Hörerschaft mit intakten Vor-

kenntnissen im Bereich der Schulgeometrie zu treffen, kann Einsparungen in den Kapitel 5 (Geometrische Konstruktionen) und 6 (Euklidische Geometrie) vornehmen.

Zu Risiken und Nebenwirkungen dieses Vorgehens merken wir an:

Bei einer Fehleinschätzung der Lernausgangslage des Publikums ist damit zu rechnen, dass angehenden Lehrerinnen und Lehrern des Sekundarbereichs I Basisqualifikationen für ihren späteren Unterricht fehlen (Kapitel 6) und die fundamentale Idee des Konstruierens (Kapitel 5) nicht verstanden oder an die Benutzung von DGS-Software gebunden wird. Darüber hinaus besteht die Gefahr, dass wesentliche Unterschiede zwischen abbildungsgeometrischem und euklidischem Arbeiten nicht erfahren werden.

Wir wünschen Ihnen Erfolg bei der Durcharbeitung der einzelnen Kapitel und weisen ausdrücklich darauf hin, dass wir für Anregungen – insbesondere solche zur weiteren Erhöhung der Lesbarkeit und Verstehbarkeit – aus den Reihen der Leserschaft dankbar sind. Unsere E-Mail-Adressen finden Sie im Impressum.