Jürgen Tietze

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

Jürgen Tietze

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

13., verbesserte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Jürgen Tietze
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Fachhochschule Aachen
Eupener Straße 70
52066 Aachen

E-Mail: tietze@fh-aachen.de

1. Auflage 1988
2., verbesserte Auflage 1990
3., verbesserte Auflage 1991
4., verbesserte Auflage 1992
5., neu bearbeitete und erweiterte Auflage 1995
6., verbesserte Auflage 1996
7., durchgesehene Auflage 1998
8., durchgesehene Auflage 1999
9., durchgesehene Auflage November 2000
10., verbesserte und aktualisierte Auflage Mai 2002
11., verbesserte Auflage September 2003
12., vollständig überarbeitete Auflage April 2005
13., verbesserte Auflage Dezember 2006

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Petra Rußkamp

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Wilhelm & Adam, Heusenstamm
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0283-5

„Mathematik = Höhere Faulheit: ständig harte Arbeit auf der Suche nach dem leichteren Weg“

(Graffito auf einer Hörsaalbank)

Vorwort zur 13. Auflage

Ein wirtschaftswissenschaftliches Studium ist heutzutage ohne Mathematik *(als Hilfswissenschaft)* undenkbar, mathematische Beschreibungs-, Erklärungs- und Optimierungs-Modelle beherrschen große Teile der ökonomischen Theorie und in zunehmendem Maße auch der ökonomischen Praxis.

Mathematik in diesem Zusammenhang bedeutet einerseits das Problem, mathematische Ideen zu verstehen, um die dazugehörigen Techniken zu beherrschen und andererseits, diese zunächst abstrakten Techniken zielgerichtet und sinnvoll für ökonomische Anwendungen nutzbar zu machen.

Das nun in 13. Auflage vorliegende Buch – als Lehr-, Arbeits- und Übungsbuch vorrangig zum Selbststudium konzipiert – versucht, beide Aspekte zu berücksichtigen durch

- ausführliche Darstellung, plausible Begründung und Einübung mathematischer Grundelemente und ökonomisch relevanter mathematischer Techniken aus der Analysis *(d.h. der Differential- und Integralrechnung)*, der linearen Algebra und der linearen Optimierung sowie
- ausführliche Demonstration der Anwendbarkeit mathematischer Instrumente auf Beschreibung, Erklärung, Analyse und Optimierung ökonomischer Vorgänge, Situationen und Probleme.

Dieses Buch wendet sich daher sowohl an Studierende der ersten Semester, die das notwendige mathematische Elementarrüstzeug von Grund auf verstehen, wiederholen, einüben und ökonomisch anwenden möchten als auch an fortgeschrittene Studierende oder quantitativ orientierte Wirtschaftspraktiker, die sich über die Fülle der Anwendungsmöglichkeiten mathematischen Instrumentariums auf ökonomische Sachverhalte informieren möchten.

Jahrelange Erfahrungen mit Teilnehmer(inne)n meiner Vorlesungen in Finanz- und Wirtschaftsmathematik bzw. Operations Research haben mich darin bestärkt, ein Buch für den *(zunächst)* nicht so bewanderten Leser zu schreiben *(und nicht für den mathematischen Experten)*. Wenn daher auch in manchen Fällen die mathematischen Beweise nicht streng sind oder fehlen, so habe ich mich doch bemüht, jeden mathematischen Sachverhalt in einer das Verstehen erleichternden Weise zu begründen und plausibel herzuleiten. Die daraus resultierende relativ breite *(weil auf Verständnis abzielende)* Darstellung dürfte allen den Leserinnen und Lesern entgegenkommen, die sich im Selbststudium die Elemente der Wirtschaftsmathematik aneignen wollen.

Weiterhin habe ich bewusst auf das eine oder andere Detail traditioneller Mathematikdarstellungen verzichtet, so auf die Theorie der Folgen und Reihen, auf die sog. Epsilontik oder auf die Theorie der Determinanten, auf Stoffinhalte also, die zwar von prinzipiellem mathematischen Interesse sind, nicht aber im Vordergrund ökonomischer Anwendungen stehen und daher dem Studienanfänger *(und erst recht dem Praktiker)* als unnötiger theoretischer Ballast erscheinen können.

Die vorliegende 13. Auflage wurde erneut sorgfältig durchgesehen und in vielen Details verbessert. Das bis zur 4. Auflage noch enthaltene Kapitel über Finanzmathematik wurde in wesentlich erweiterter Form als eigenständiges Lehrbuch „Einführung in die Finanzmathematik“ im gleichen Verlag herausgegeben, siehe [66] im Literaturverzeichnis.

Der Text enthält eine Vielzahl ergänzender Beispiele und Übungsaufgaben, die das Gefühl für die Beherrschung und die Anwendbarkeit des mathematischen Kernstoffes stärken sollen. Für den umfangreichen

Aufgabenteil *(mit mehr als 1300 Aufgaben in über 300 Übungsteilen)* ist im gleichen Verlag ein separates Übungsbuch erschienen, das neben sämtlichen Aufgaben dieses Lehrbuchs auch deren Lösungen – mit z.T. ausführlichen Lösungswegen – sowie zehn Original-Klausuren enthält:

Tietze, J.: Übungsbuch zur angewandten Wirtschaftsmathematik
– Aufgaben, Testklausuren und Lösungen – 5. Auflage
Vieweg Braunschweig, Wiesbaden 2005, ISBN 3-528-43146-6

Zum *Gebrauch* des Buches: Um die Lesbarkeit des Textes zu verbessern, wurde die äußere Form strukturiert:

Definitionen, mathematische Sätze und $\boxed{\text{wichtige Ergebnisse}}$ sind jeweils eingerahmt.

***Bemerkungen** sind in kursiver Schrifttype gehalten.*

| **Beispiele** sind mit einem senkrechten Strichbalken am linken Rand gekennzeichnet.

Definitionen *(Def.)* , Sätze, Bemerkungen *(Bem.)*, Formeln, Beispiele *(Bsp.)*, Aufgaben *(Aufg.)* und Abbildungen *(Abb.)* sind in jedem erststelligen Unterkapitel ohne Rücksicht auf den Typ fortlaufend durchnummeriert. So folgen etwa in Kap. 6.2 nacheinander Bsp. 6.2.15, Abb. 6.2.16, Bem. 6.2.17, Def. 6.2.18 usw. Ein * an einer Aufgabe weist auf einen etwas erhöhten Schwierigkeitsgrad hin. Zahlen in eckigen Klammern, z.B. [66], beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Buches.

Die reproduktionsfähige Rohvorlage für den Druck hat in monatelanger unermüdlicher und sachkundiger Weise Herr cand. rer. pol. Norbert Breker gestaltet. Hilfreiche Unterstützung erhielt ich von Herrn cand. rer. pol. Manfred Havenith *(digitale Bearbeitung der Graphiken)* sowie von Herrn cand. rer. pol. Roland Hansen *(Korrektur)*. Ihnen allen danke ich herzlich.

Die 3-D-Darstellungen in Kapitel 3 wurden mit der Graphiksoftware GRAPHDAT, einer Entwicklung des Instituts für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen erstellt. Für seine diesbezügliche Unterstützung danke ich Herrn Prof. Dr. Reinhard Wodicka vielmals.

Dieses Buch hätte nicht entstehen können ohne Herma, die mir in vielen kritischen Situationen ihre Kraft zum Weitermachen lieh.

Zum Schluss gebührt mein Dank dem Vieweg Verlag Wiesbaden und hier besonders Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch sowie Frau Petra Rußkamp für die gute und verständnisvolle Zusammenarbeit.

Die Hinweise vieler Leserinnen und Leser auf Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten in den vorhergehenden Auflagen waren für mich und – so hoffe ich – auch für diese überarbeitete Neuauflage sehr wertvoll. Da ich allerdings damit rechne, dass trotz aller Sorgfalt der Fehlerteufel *(bzw. die Fehlerteufelin)* nicht untätig geblieben sind, danke ich schon jetzt allen Leserinnen und Lesern für entsprechende Korrekturhinweise oder Verbesserungsvorschläge, z.B. per E-Mail *(tietze@fh-aachen.de)*. Ich werde jede Ihrer Rückmeldungen beantworten und in allen Fällen auch um eine schnelle Antwort bemüht sein.

Aachen, im November 2006 *Jürgen Tietze*

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

(auf den angegebenen Seiten finden sich nähere Erläuterungen zu den jeweiligen Symbolen)

$\in$ ($\notin$)	ist (kein) Element von, 1
$\{x \in M \mid \ldots\}$	Mengenklammer, 2f
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	spezielle Zahlenmengen, 3
$\{\ \}, \emptyset$	leere Menge, 2
$[a,b]\,;\,]a,b[$ $[a,b[\,;\,]a,b]$	Intervalle, 4
$<\ ;\ \leq$	kleiner; kleiner oder gleich
$>\ ;\ \geq$	größer; größer oder gleich
w , f	wahr, falsch, 4
$A(x)$, $A(x,y,\ldots)$	Aussageformen, 5
$T(x)$, $T(x,y,\ldots)$	Terme, 5
D_A, D_G	Definitionsmenge, 6,47
L, L_A, L_G	Lösungsmenge, 6ff,48f
$:=\ ;\ =:$	definitionsgemäß gleich, 3
$\equiv$	identisch gleich
$\approx$	ungefähr gleich
$\triangleq$	entspricht
$\wedge\ ,\ \vee\ ,\ \neg$	und, oder, nicht, 8ff
$\Rightarrow\ ,\ \Leftarrow$	Folgerung, 13f
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz, 14f
$\subset$	ist Teilmenge von, 15f
$\cap\ ,\ \cup$	Durchschnitt,Vereinigung, 16f
$\setminus$	Mengendifferenz, 17f
$A \times B \times \ldots$	Produktmenge, 20f
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler Raum, 21
$\lvert a \rvert$	absoluter Betrag, 29
Σ, Π	Summe, Produkt, 29ff
$n!$	Fakultät, 32
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient, 32f
a^n, e^x	Potenz, 34ff
$\sqrt[n]{a},\ a^{\frac{1}{n}}$	Wurzel, 37ff
$\log_a x, \ln x, \lg x$	Logarithmus, 42ff
∞	unendlich, 4,43,167ff
$f, f(x), f(x,y,..)$	Funktionen, 77ff,153ff
D_f, W_f	Definitions-, Wertebereich, 78
$x \mapsto f(x)$	Zuordnungsvorschrift, 77ff
f^{-1}	Umkehrfunktion, 89ff
$f(g(x))$	verkettete Funktion, 95f,215
$f\uparrow\ ,\ f\downarrow$	f steigt bzw. fällt, 97f,6-18f
sin, cos tan, cot	trigonometrische Funktio- nen, 121ff
$\vec{x}$	Vektor, 154,451f
„$\frac{1}{\infty}$“ „$\frac{1}{0+}$“	uneigentliche Terme, 180,226ff

$\lim f(x)$ $x \to \infty$ $x \to x_0$ $x \to x_0^+$ $x \to x_0^-$	Grenzwert von f , 167ff für: x gegen unendlich für: x gegen x_0 rechtsseitiger Grenzwert linksseitiger Grenzwert
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	Differenzenquotient (Sekantensteigung) , 200
$f'(x), \frac{df}{dx}$	Differentialquotient 1. Ableitung , 201f
$\frac{d}{dx}$	Differentialoperator, 201
$f''(x), \frac{d^2f}{dx^2}$	2. Ableitung, 223f
$f^{(n)}(x), \frac{d^nf}{dx^n}$	n-te Ableitung, 223f
df	Differential, 237ff
$\varepsilon_{f,x}$	x-Elastizität von f, 303ff
$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$	Länge der *(gerichteten)* Strecke von A nach B, 314f
$\frac{\partial f}{\partial x}\ , f_x$	1. partielle Ableitung, 327ff
$\frac{\partial}{\partial x}$	partieller Differential- operator, 327
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xx}$	2. partielle Ableitung, 331f
df_x	partielles Differential, 335f
df	totales Differential, 336
$\int f(x)\,dx$	unbestimmtes Integral, 403
$\int_a^b f(x)dx$	bestimmtes Integral, 408
$F(x)\Big\vert_a^b$	F(b) - F(a), 415
$\dot{y}$	$y'(t), \frac{dy}{dt}$, 437
$A, B, \ldots$ $A_{m,n}$ (a_{ik})	Matrizen, 449ff
$a_{ik}, b_{ik}, \ldots$	Matrix-Elemente, 450
A^T	transponierte Matrix, 451
$\vec{a}, \vec{b}, \ldots$	Spaltenvektoren, 451f
$\vec{a}^T, \vec{b}^T, \ldots$	Zeilenvektoren, 451f
$\mathbf{O}, \vec{0}$	Nullmatrix, Nullvektor, 453
$E, \vec{e}_i$	Einheitsmatrix, Einheitsvektor, 453
A^{-1}	inverse Matrix, 466
rg A	Rang der Matrix A, 486

Abkürzungen

BL	Basislösung
BV	Basisvariable
CD	Cobb-Douglas
c.p.	ceteris paribus
DB	Deckungsbeitrag
d.h.	das heißt
€	Euro
f	falsch
FE	Faktoreinkommen
GE	Geldeinheit
LE	Leistungseinheit
LGS	Lineares Gleichungssystem
LO	Lineare Optimierung
m.a.W.	mit anderen Worten
ME	Mengen-Einheit
NB	Nebenbedingung
NBV	Nichtbasisvariable
NNB	Nichtnegativitätsbedingung
p.a.	pro Jahr
s.	siehe
T€	tausend Euro
u.v.a	und vieles andere
u.v.a.m.	und vieles andere mehr
vgl.	vergleiche
w	wahr
WE	Währungseinheit
w.z.b.w.	was zu beweisen war
ZE	Zeiteinheit

Abkürzungen für Rechengesetze:

A1 - A5	Axiome für „+"
D	Distributivgesetz
M1 - M5	Axiome für „·"
L1 - L3	Logarithmengesetze
P1 - P7	Potenzgesetze
R1 - R13	Rechenregeln in $\mathbb{R}$
W1 - W5	Wurzelgesetze

Häufig verwendete Variablennamen

a_t, $a(t)$	Auszahlung d. Periode t
A, A(t)	Annuität; Arbeitsinput *(in t)*
B	Bestand; *(zulässiger)* Bereich
C	Konsum, Konsumsumme
C_0	Kapitalwert
e	Eulersche Zahl
e_t, $e(t)$	Einzahlung d. Periode t
E	Erlös, Umsatz, Ausgaben; Einheitsmatrix
ε	Elastizität
g	Stückgewinn
g_D	Stückdeckungsbeitrag
G	Gewinn
G_D	Deckungsbeitrag
h	Stunde*(n)*
i	Zinssatz *(= p/100)*
I, I(t)	Investition *(im Zeitpunkt t)*
k	Stückkosten
K	Kosten; Kapital
k_f	stückfixe Kosten
K_f	Fixkosten
K_n	Endwert *(eines Kapitals)*
K_0	Barwert *(eines Kapitals)*
K_t	Zeitwert *(eines Kapitals im Zeitpunkt t)*
k_v	stückvariable Kosten
K_v	variable Kosten
L	Lösungsmenge; Lagrange-Funktion; Liquidationserlös
λ	Lagrange-Multiplikator
p	Preis; Zinsfuß
q	Zinsfaktor *(= 1 + i)*
r	Input; Homogenitätsgrad; *(stetiger)* Zinssatz; Rang einer Matrix
R	Rate; Zahlungsstrom
R_n	Renten-Endwert
S	Sparen, Sparsumme
t	Zeit
T	Laufzeit
U	Nutzen*(index)*; Umsatz
x	Nachfrage; Angebot; Output; Menge
Y	Einkommen; Sozialprodukt
Z	Zielfunktion

Griechisches Alphabet

α, A	Alpha
β, B	Beta
γ, Γ	Gamma
δ, Δ	Delta
ε, E	Epsilon
ζ, Z	Zeta
η, H	Eta
ϑ, Θ	Theta
ι, I	Jota
κ, K	Kappa
λ, Λ	Lambda
μ, M	My
ν, N	Ny
ξ, Ξ	Xi
o, O	Omikron
π, Π	Pi
ρ, P	Rho
σ, Σ	Sigma
τ, T	Tau
υ, Y	Ypsilon
φ, Φ	Phi
χ, X	Chi
ψ, Ψ	Psi
ω, Ω	Omega