

Jürgen Tietze

**Einführung in die angewandte
Wirtschaftsmathematik**

Aus dem Programm

Wirtschafts- und Finanzmathematik

Finanzmathematik für Einsteiger

von M. Adelmeyer und E. Warmuth

Finanzderivate mit MATLAB®

von M. Günther und A. Jüngel

Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection

von W. Hausmann, K. Diener und J. Käsler

Kreditderivate und Kreditrisikomodelle

von M. R. W. Martin, S. Reitz und C. S. Wehn

Zinsderivate

von S. Reitz, W. Schwarz und M. R. W. Martin

Operations Research

von H.-J. Zimmermann

Mathematik für Wirtschaftsingenieure 1, 2

von N. Henze und G. Last

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

von J. Tietze

Übungsbuch zur angewandten Wirtschaftsmathematik

von J. Tietze

Einführung in die Finanzmathematik

von J. Tietze

Übungsbuch zur Finanzmathematik

von J. Tietze

vieweg

Jürgen Tietze

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

13., verbesserte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben



Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Jürgen Tietze
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Fachhochschule Aachen
Eupener Straße 70
52066 Aachen

E-Mail: tietze@fh-aachen.de

1. Auflage 1988
- 2., verbesserte Auflage 1990
- 3., verbesserte Auflage 1991
- 4., verbesserte Auflage 1992
- 5., neu bearbeitete und erweiterte Auflage 1995
- 6., verbesserte Auflage 1996
- 7., durchgesehene Auflage 1998
- 8., durchgesehene Auflage 1999
- 9., durchgesehene Auflage November 2000
- 10., verbesserte und aktualisierte Auflage Mai 2002
- 11., verbesserte Auflage September 2003
- 12., vollständig überarbeitete Auflage April 2005
- 13., verbesserte Auflage Dezember 2006

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Petra Rußkamp

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Wilhelm & Adam, Heusenstamm
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0283-5

„Mathematik = Höhere Faulheit:
ständig harte Arbeit auf der
Suche nach dem leichteren Weg“
(Graffito auf einer Hörsaalbank)

Vorwort zur 13. Auflage

Ein wirtschaftswissenschaftliches Studium ist heutzutage ohne Mathematik (*als Hilfswissenschaft*) undenkbar, mathematische Beschreibungs-, Erklärungs- und Optimierungs-Modelle beherrschen große Teile der ökonomischen Theorie und in zunehmendem Maße auch der ökonomischen Praxis.

Mathematik in diesem Zusammenhang bedeutet einerseits das Problem, mathematische Ideen zu verstehen, um die dazugehörigen Techniken zu beherrschen und andererseits, diese zunächst abstrakten Techniken zielgerichtet und sinnvoll für ökonomische Anwendungen nutzbar zu machen.

Das nun in 13. Auflage vorliegende Buch – als Lehr-, Arbeits- und Übungsbuch vorrangig zum Selbststudium konzipiert – versucht, beide Aspekte zu berücksichtigen durch

- ausführliche Darstellung, plausible Begründung und Einübung mathematischer Grundelemente und ökonomisch relevanter mathematischer Techniken aus der Analysis (*d.h. der Differential- und Integralrechnung*), der linearen Algebra und der linearen Optimierung sowie
- ausführliche Demonstration der Anwendbarkeit mathematischer Instrumente auf Beschreibung, Erklärung, Analyse und Optimierung ökonomischer Vorgänge, Situationen und Probleme.

Dieses Buch wendet sich daher sowohl an Studierende der ersten Semester, die das notwendige mathematische Elementarrüstzeug von Grund auf verstehen, wiederholen, einüben und ökonomisch anwenden möchten als auch an fortgeschrittene Studierende oder quantitativ orientierte Wirtschaftspraktiker, die sich über die Fülle der Anwendungsmöglichkeiten mathematischen Instrumentariums auf ökonomische Sachverhalte informieren möchten.

Jahrelange Erfahrungen mit Teilnehmer(inne)n meiner Vorlesungen in Finanz- und Wirtschaftsmathematik bzw. Operations Research haben mich darin bestärkt, ein Buch für den (*zunächst*) nicht so bewanderten Leser zu schreiben (*und nicht für den mathematischen Experten*). Wenn daher auch in manchen Fällen die mathematischen Beweise nicht streng sind oder fehlen, so habe ich mich doch bemüht, jeden mathematischen Sachverhalt in einer das Verstehen erleichternden Weise zu begründen und plausibel herzuleiten. Die daraus resultierende relativ breite (*weil auf Verständnis abzielende*) Darstellung dürfte allen den Leserinnen und Lesern entgegenkommen, die sich im Selbststudium die Elemente der Wirtschaftsmathematik aneignen wollen.

Weiterhin habe ich bewusst auf das eine oder andere Detail traditioneller Mathematikdarstellungen verzichtet, so auf die Theorie der Folgen und Reihen, auf die sog. Epsilontik oder auf die Theorie der Determinanten, auf Stoffinhalte also, die zwar von prinzipiellem mathematischen Interesse sind, nicht aber im Vordergrund ökonomischer Anwendungen stehen und daher dem Studienanfänger (*und erst recht dem Praktiker*) als unnötiger theoretischer Ballast erscheinen können.

Die vorliegende 13. Auflage wurde erneut sorgfältig durchgesehen und in vielen Details verbessert. Das bis zur 4. Auflage noch enthaltene Kapitel über Finanzmathematik wurde in wesentlich erweiterter Form als eigenständiges Lehrbuch „Einführung in die Finanzmathematik“ im gleichen Verlag herausgegeben, siehe [66] im Literaturverzeichnis.

Der Text enthält eine Vielzahl ergänzender Beispiele und Übungsaufgaben, die das Gefühl für die Beherrschung und die Anwendbarkeit des mathematischen Kernstoffes stärken sollen. Für den umfangreichen

Aufgabenteil (*mit mehr als 1300 Aufgaben in über 300 Übungsteilen*) ist im gleichen Verlag ein separates Übungsbuch erschienen, das neben sämtlichen Aufgaben dieses Lehrbuchs auch deren Lösungen – mit z.T. ausführlichen Lösungswegen – sowie zehn Original-Klausuren enthält:

Tietze, J.: Übungsbuch zur angewandten Wirtschaftsmathematik
– Aufgaben, Testklausuren und Lösungen – 5. Auflage
Vieweg Braunschweig, Wiesbaden 2005, ISBN 3-528-43146-6

Zum *Gebrauch* des Buches: Um die Lesbarkeit des Textes zu verbessern, wurde die äußere Form strukturiert:

Definitionen, mathematische Sätze und wichtige Ergebnisse sind jeweils eingerahmt.

Bemerkungen sind in kursiver Schrifttype gehalten.

Beispiele sind mit einem senkrechten Strichbalken am linken Rand gekennzeichnet.

Definitionen (*Def.*), Sätze, Bemerkungen (*Bem.*), Formeln, Beispiele (*Bsp.*), Aufgaben (*Aufg.*) und Abbildungen (*Abb.*) sind in jedem erststelligen Unterkapitel ohne Rücksicht auf den Typ fortlaufend durchnummeriert. So folgen etwa in Kap. 6.2 nacheinander Bsp. 6.2.15, Abb. 6.2.16, Bem. 6.2.17, Def. 6.2.18 usw. Ein * an einer Aufgabe weist auf einen etwas erhöhten Schwierigkeitsgrad hin. Zahlen in eckigen Klammern, z.B. [66], beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Buches.

Die reproduktionsfähige Rohvorlage für den Druck hat in monatelanger unermüdlicher und sachkundiger Weise Herr cand. rer. pol. Norbert Breker gestaltet. Hilfreiche Unterstützung erhielt ich von Herrn cand. rer. pol. Manfred Havenith (*digitale Bearbeitung der Graphiken*) sowie von Herrn cand. rer. pol. Roland Hansen (*Korrektur*). Ihnen allen danke ich herzlich.

Die 3-D-Darstellungen in Kapitel 3 wurden mit der Graphiksoftware GRAPHDAT, einer Entwicklung des Instituts für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen erstellt. Für seine diesbezügliche Unterstützung danke ich Herrn Prof. Dr. Reinhard Wodicka vielmals.

Dieses Buch hätte nicht entstehen können ohne Herma, die mir in vielen kritischen Situationen ihre Kraft zum Weitermachen lieh.

Zum Schluss gebührt mein Dank dem Vieweg Verlag Wiesbaden und hier besonders Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch sowie Frau Petra Rußkamp für die gute und verständnisvolle Zusammenarbeit.

Die Hinweise vieler Leserinnen und Leser auf Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten in den vorhergehenden Auflagen waren für mich und – so hoffe ich – auch für diese überarbeitete Neuauflage sehr wertvoll. Da ich allerdings damit rechne, dass trotz aller Sorgfalt der Fehlerteufel (*bzw. die Fehlerteufelin*) nicht untätig geblieben sind, danke ich schon jetzt allen Leserinnen und Lesern für entsprechende Korrekturhinweise oder Verbesserungsvorschläge, z.B. per E-Mail (tietze@fh-aachen.de). Ich werde jede Ihrer Rückmeldungen beantworten und in allen Fällen auch um eine schnelle Antwort bemüht sein.

Aachen, im November 2006

Jürgen Tietze

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Symbolverzeichnis	XV
Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet	XVI
1 Grundlagen und Hilfsmittel	1
1.1 Mengen und Aussagen	1
1.1.1 Mengenbegriff	1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen	3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen	4
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen	8
1.1.4.1 Konjunktion	8
1.1.4.2 Disjunktion	9
1.1.4.3 Negation	10
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen	10
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz	13
1.1.5.1 Folgerung (Implikation)	13
1.1.5.2 Äquivalenz	14
1.1.6 Relationen zwischen Mengen	15
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen	15
1.1.6.2 Teilmengen	15
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen	16
1.1.7.1 Durchschnittsmenge	16
1.1.7.2 Vereinigungsmenge	17
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge)	17
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen	20
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen	21
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in \mathbb{R}	22
1.2.1.1 Axiome	22
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen ...	24
1.2.1.3 Betrag einer Zahl	29
1.2.1.4 Das Summenzeichen	29
1.2.1.5 Das Produktzeichen	31
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient	32
1.2.2 Potenzen	34
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten	34
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	36
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln	37

	1.2.2.4	Potenzen mit reellen Exponenten	40
1.2.3		Logarithmen	42
	1.2.3.1	Begriff des Logarithmus	42
	1.2.3.2	Logarithmenbasen	43
	1.2.3.3	Rechenregeln für Logarithmen	44
	1.2.3.4	Logarithmen zu beliebiger Basis	46
1.2.4		Gleichungen	47
	1.2.4.1	Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen	47
	1.2.4.2	Äquivalenzumformungen	50
	1.2.4.3	Lineare Gleichungen $ax + b = cx + d$	54
	1.2.4.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	55
	1.2.4.5	Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$	59
	1.2.4.6	Gleichungen höheren als zweiten Grades	62
	1.2.4.7	Wurzelgleichungen	65
	1.2.4.8	Exponentialgleichungen	66
	1.2.4.9	Logarithmengleichungen	67
	1.2.4.10	Bruchgleichungen	67
1.2.5		Ungleichungen	69
1.2.6		Wo steckt der Fehler?	72
	1.2.6.1	Fehler bei Termumformungen	73
	1.2.6.2	Fehler bei der Lösung von Gleichungen	74
	1.2.6.3	Fehler bei der Lösung von Ungleichungen	76
2		Funktionen einer unabhängigen Variablen	77
2.1		Begriff und Darstellung von Funktionen	77
	2.1.1	Funktionsbegriff	77
	2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen	82
	2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen	87
	2.1.4	Umkehrfunktionen	89
	2.1.5	Implizite Funktionen	94
	2.1.6	Verkettete Funktionen	95
2.2		Eigenschaften von Funktionen	96
	2.2.1	Beschränkte Funktionen	96
	2.2.2	Monotone Funktionen	97
	2.2.3	Symmetrische Funktionen	99
	2.2.4	Nullstellen von Funktionen	100
2.3		Elementare Typen von Funktionen	100
	2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	100
		2.3.1.1 Grundbegriffe, Horner-Schema	101
		2.3.1.2 Konstante und lineare Funktionen	102
		2.3.1.3 Quadratische Funktionen	109
		2.3.1.4 Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung	111
	2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen	114

2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen)	116
2.3.4	Exponentialfunktionen	118
2.3.5	Logarithmusfunktionen	120
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen)	121
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi)	127
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen	131
3	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	153
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .	153
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen	154
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	163
4	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	167
4.1	Der Grenzwertbegriff	167
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$	168
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) ...	172
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen	178
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen	181
4.4	Der Stetigkeitsbegriff	185
4.5	Unstetigkeitstypen	187
4.6	Stetigkeitsanalyse	189
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen	192
4.8	Asymptoten	195
5	Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik	199
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung	199
5.1.1	Problemstellung	199
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient	199
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient)	201
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	205
5.2	Technik des Differenzierens	206
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen	207
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$...	207
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$	207
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$...	208
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$.	209
5.2.2	Ableitungsregeln	211
5.2.2.1	Faktorregel	211

5.2.2.2	Summenregel	211
5.2.2.3	Produktregel	212
5.2.2.4	Quotientenregel	213
5.2.2.5	Kettenregel	215
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik	218
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion	218
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen	220
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung	222
5.2.4	Höhere Ableitungen	223
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln	225
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de L'Hôpital	226
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweise Ermittlung von Nullstellen einer Funktion	233

6 Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung	237
6.1.1	Das Differential einer Funktion	237
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion	240
6.1.2.1	Grenzkosten	242
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben)	243
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag)	244
6.1.2.4	Grenzgewinn	246
6.1.2.5	Marginale Konsumquote	247
6.1.2.6	Marginale Sparquote	247
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution	248
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion	249
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen	252
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten	253
6.2.2	Extremwerte	256
6.2.3	Wendepunkte	260
6.2.4	Kurvendiskussion	262
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen	268
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme	270
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen	270
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen	271
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften	274

6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen ...	276
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse	277
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen	280
6.3.2.3	Gewinnmaximierung	282
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion	289
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung	291
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen	301
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen	301
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen	303
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen	308
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität	314
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung	319
7	Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	325
7.1	Grundlagen	325
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen	325
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	330
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung	331
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen	333
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential	335
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung	337
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen	340
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	344
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen	344
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	346
7.2.2.1	Problemstellung	346
7.2.2.2	Variablensubstitution	348
7.2.2.3	Lagrange-Methode	348
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	352
7.3.1	Partielle Elastizitäten	352
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität	352
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation	353
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen	354
7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes	357
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen)	362
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion	362

7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen	366
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung	371
7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	374
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen	377
7.3.3.1	Minimalkostenkombination	377
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion	383
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum ...	387
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen	393
8	Einführung in die Integralrechnung	401
8.1	Das unbestimmte Integral	401
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	401
8.1.2	Grundintegrale	404
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	405
8.2	Das bestimmte Integral	407
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals	407
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals	409
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals ...	410
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	412
8.3.1	Integralfunktion	412
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	413
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	415
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung	416
8.4	Spezielle Integrationstechniken	418
8.4.1	Partielle Integration	419
8.4.2	Integration durch Substitution	420
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung	422
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen	422
8.5.2	Die Konsumentenrente	425
8.5.3	Die Produzentenrente	426
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme	428
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft ...	432
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen	433
8.6	Elementare Differentialgleichungen	437
8.6.1	Einleitung	437
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen	438

8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen	441
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum	441
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität	441
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow	443
9	Einführung in die Lineare Algebra	449
9.1	Matrizen und Vektoren	449
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung	449
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren	453
9.1.3	Operationen mit Matrizen	454
9.1.3.1	Addition von Matrizen	454
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor	456
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)	458
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen	459
9.1.4	Die inverse Matrix	466
9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse)	468
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	473
9.2.1	Grundbegriffe	473
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus	475
9.2.3	Pivotisieren	481
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	486
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix	491
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme	493
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung	493
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung	495
10	Lineare Optimierung (LO)	499
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode	499
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung	499
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems	500
10.1.3	Ein Diät-Problem	502
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems	503
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung	505
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung	508
10.2	Simplexverfahren	510
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems	510
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens	512
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen	512

10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen	513
10.2.5	Optimalitätskriterium	515
10.2.6	Engpassbedingung	516
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung	518
10.2.8	Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem)	519
10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme	521
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen	528
10.4.1	Keine zulässige Lösung	528
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung)	529
10.4.3	Degeneration (Entartung)	529
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen	531
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen	533
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall	534
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus	535
10.5.1	Produktionsplanungsproblem	535
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten	535
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung	537
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten	537
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten	538
10.5.1.5	Zusammenfassung	540
10.5.2	Diätproblem	541
10.6	Dualität	542
10.6.1	Das duale LO-Problem	542
10.6.2	Dualitätssätze	545
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems	548
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems	548
10.7.2	Dual eines Diätproblems	550
11	Literaturverzeichnis	553
12	Sachwortverzeichnis	557

Symbolverzeichnis

(auf den angegebenen Seiten finden sich nähere Erläuterungen zu den jeweiligen Symbolen)

$\in (\notin)$	ist (kein) Element von, 1	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	Grenzwert von f , 167ff
$\{x \in M \mid \dots\}$	Mengenklammer, 2f	für: x gegen unendlich	
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	spezielle Zahlenmengen, 3	für: x gegen x_0	
$\{ \}, \emptyset$	leere Menge, 2	$x \rightarrow x_0^+$	rechtsseitiger Grenzwert
$[a, b];]a, b[$		$x \rightarrow x_0^-$	linksseitiger Grenzwert
$[a, b[;]a, b]$	Intervalle, 4	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	Differenzenquotient (Sekantensteigung), 200
$<; \leq$	kleiner; kleiner oder gleich	$f'(x), \frac{df}{dx}$	Differentialquotient, 201f
$>; \geq$	größer; größer oder gleich	1. Ableitung	
w, f	wahr, falsch, 4	$\frac{d}{dx}$	Differentialoperator, 201
$A(x),$		$f''(x), \frac{d^2f}{dx^2}$	2. Ableitung, 223f
$A(x, y, \dots)$	Aussageformen, 5	$f^{(n)}(x), \frac{d^n f}{dx^n}$	n -te Ableitung, 223f
$T(x),$		df	Differential, 237ff
$T(x, y, \dots)$	Terme, 5	$\varepsilon_{f,x}$	x -Elastizität von f , 303ff
D_A, D_G	Definitionsmenge, 6,47	$ \overrightarrow{AB} $	Länge der (<i>gerichteten</i>) Strecke von A nach B , 314f
L, L_A, L_G	Lösungsmenge, 6ff,48f	$\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$	1. partielle Ableitung, 327ff
$:=; \equiv$	definitionsgemäß gleich, 3	$\frac{\partial}{\partial x}$	partieller Differential- operator, 327
\equiv	identisch gleich	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xx}$	2. partielle Ableitung, 331f
\approx	ungefähr gleich	df_x	partielles Differential, 335f
\cong	entspricht	df	totales Differential, 336
\wedge, \vee, \neg	und, oder, nicht, 8ff	$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral, 403
\Rightarrow, \Leftarrow	Folgerung, 13f	$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral, 408
\Leftrightarrow	Äquivalenz, 14f	$F(x) \Big _a^b$	$F(b) - F(a)$, 415
\subset	ist Teilmenge von, 15f	\dot{y}	$y'(t), \frac{dy}{dt}$, 437
\cap, \cup	Durchschnitt, Vereinigung, 16f	A, B, \dots	
\setminus	Mengendifferenz, 17f	$A_{m,n}$	Matrizen, 449ff
$A \times B \times \dots$	Produktmenge, 20f	(a_{ik})	Matrix-Elemente, 450
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler Raum, 21	a_{ik}, b_{ik}, \dots	
$ a $	absoluter Betrag, 29	A^T	transponierte Matrix, 451
Σ, Π	Summe, Produkt, 29ff	\vec{a}, \vec{b}, \dots	Spaltenvektoren, 451f
$n!$	Fakultät, 32	$\vec{a}^T, \vec{b}^T, \dots$	Zeilenvektoren, 451f
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient, 32f	$\mathbf{0}, \vec{0}$	Nullmatrix, Nullvektor, 453
a^n, e^x	Potenz, 34ff	E, \vec{e}_i	Einheitsmatrix, Einheitsvektor, 453
$\sqrt[n]{a}, a^{\frac{1}{n}}$	Wurzel, 37ff	A^{-1}	inverse Matrix, 466
$\log_a x, \ln x, \lg x$	Logarithmus, 42ff	$rg A$	Rang der Matrix A , 486
∞	unendlich, 4,43,167ff		
$f, f(x), f(x, y, \dots)$	Funktionen, 77ff,153ff		
D_f, W_f	Definitions-, Wertebereich, 78		
$x \mapsto f(x)$	Zuordnungsvorschrift, 77ff		
f^{-1}	Umkehrfunktion, 89ff		
$f(g(x))$	verkettete Funktion, 95f,215		
$f \uparrow, f \downarrow$	f steigt bzw. fällt, 97f,6-18f		
\sin, \cos	trigonometrische Funktio- nen, 121ff		
\tan, \cot			
\vec{x}	Vektor, 154,451f		
${}^{\infty} \frac{1}{\infty} \quad {}^{\frac{1}{0^+}}$	uneigentliche Terme, 180,226ff		

Abkürzungen

BL	Basislösung	ME	Mengen-Einheit	Abkürzungen für	
BV	Basisvariable	NB	Nebenbedingung	Rechengesetze:	
CD	Cobb-Douglas	NBV	Nichtbasisvariable	A1 - A5	Axiome für „+“
c.p.	ceteris paribus	NNB	Nichtnegativitätsbedingung	D	Distributivgesetz
DB	Deckungsbeitrag			M1 - M5	Axiome für „·“
d.h.	das heißt	p.a.	pro Jahr	L1 - L3	Logarithmengesetze
€	Euro	s.	siehe	P1 - P7	Potenzgesetze
f	falsch	T€	tausend Euro	R1 - R13	Rechenregeln in IR
FE	Faktoreinkommen	u.v.a	und vieles andere	W1 - W5	Wurzelgesetze
GE	Geldeinheit	u.v.a.m.	und vieles andere mehr		
LE	Leistungseinheit	vgl.	vergleiche		
LGS	Lineares Gleichungssystem	w	wahr		
LO	Lineare Optimierung	WE	Währungseinheit		
m.a.W.	mit anderen Worten	w.z.b.w.	was zu beweisen war		
		ZE	Zeiteinheit		

Häufig verwendete Variablennamen

$a_t, a(t)$	Auszahlung d. Periode t	K_0	Barwert (<i>eines Kapitals</i>)
$A, A(t)$	Annuität; Arbeitsinput (<i>in t</i>)	K_t	Zeitwert (<i>eines Kapitals im Zeitpunkt t</i>)
B	Bestand; (<i>zulässiger</i>) Bereich	k_v	stückvariable Kosten
C	Konsum, Konsumsumme	K_v	variable Kosten
C_0	Kapitalwert	L	Lösungsmenge; Lagrange-Funktion; Liquidationserlös
e	Eulersche Zahl	λ	Lagrange-Multiplikator
$c_t, c(t)$	Einzahlung d. Periode t	p	Preis; Zinsfuß
E	Erlös, Umsatz, Ausgaben; Einheitsmatrix	q	Zinsfaktor ($= 1 + i$)
ε	Elastizität	r	Input; Homogenitätsgrad; (<i>steiger</i>) Zinssatz; Rang einer Matrix
g	Stückgewinn	R	Rate; Zahlungsstrom
g_D	Stückdeckungsbeitrag	R_n	Renten-Endwert
G	Gewinn	S	Sparen, Sparsumme
G_D	Deckungsbeitrag	t	Zeit
h	Stunde(n)	T	Laufzeit
i	Zinssatz ($= p/100$)	U	Nutzen(<i>index</i>); Umsatz
I, I(t)	Investition (<i>im Zeitpunkt t</i>)	x	Nachfrage; Angebot; Output; Menge
k	Stückkosten	Y	Einkommen; Sozialprodukt
K	Kosten; Kapital	Z	Zielfunktion
k_f	stückfixe Kosten		
K_f	Fixkosten		
K_n	Endwert (<i>eines Kapitals</i>)		

Griechisches Alphabet

α, A	Alpha	ι, I	Jota	ρ, P	Rho
β, B	Beta	κ, K	Kappa	σ, Σ	Sigma
γ, Γ	Gamma	λ, Λ	Lambda	τ, T	Tau
δ, Δ	Delta	μ, M	My	ν, Y	Ypsilon
ε, E	Epsilon	ν, N	Ny	φ, Φ	Phi
ζ, Z	Zeta	ξ, Ξ	Xi	χ, X	Chi
η, H	Eta	\omicron, O	Omikron	ψ, Ψ	Psi
θ, Θ	Theta	π, Π	Pi	ω, Ω	Omega