

Tilman Butz

Fouriertransformation für Fußgänger

Tilman Butz

Fouriertransformation für Fußgänger

7., aktualisierte Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. rer. nat. habil. Tilman Butz

Geboren 1945 in Göggingen/Augsburg. Ab 1966 Studium der Physik an der Technischen Universität München, Diplom 1972, Promotion 1975, Habilitation 1985. Von 1985 bis 1992 wissenschaftlicher Assistent. Seit 1993 Professor für Experimentalphysik an der Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften.

E-Mail: butz@physik.uni-leipzig.de
http://www.uni-leipzig.de/~nfp/Staff/Tilman_Butz/tilman_butz.html

Abbildungen: H. Gödel, Dr. T. Soldner (1.2, 1.5), H. Dietze (1.3, 1.10), Dr. T. Reinert (3.11), St. Jankuhn (2.22, 4.24, A.1 - A.9, A.16 - A.18)

1. Auflage 1998
2. Auflage 2000
3. Auflage 2003
4. Auflage 2005
5. Auflage 2007
6. Auflage 2009
- 7., aktualisierte Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ulrich Sandten | Kerstin Hoffmann

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: AZ Druck und Datentechnik, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0946-9

Für Renate, Raphaela und Florentin

Vorwort

Fouriertransformation¹ für Fußgänger. Für *Fußgänger*? Zu diesem Titel inspirierte mich das berühmte Buch von Harry J. Lipkin „Beta-decay for Pedestrians“ [1], in dem so schwierige physikalische Probleme der schwachen Wechselwirkung wie Helizität und Paritätsverletzung für „Fußgänger“ anschaulich erläutert werden. Im Gegensatz dazu kommt man bei der diskreten Fouriertransformation mit den vier Grundrechenarten aus, die jeder Schüler beherrschen sollte. Da es sich auch noch um einen linearen Algorithmus² handelt, dürfte es eigentlich ebensowenig Überraschungen geben wie bei der vielzitierten „Milchmädchenrechnung“. Dennoch hält sich im Zusammenhang mit Fouriertransformationen hartnäckig das Vorurteil, dabei könne Information verlorengehen oder man könnte Artefakten aufsitzen; jedenfalls sei diesem mystischen Zauberspuk nicht zu trauen. Solche Vorurteile haben ihre Wurzeln häufig in schlechten Erfahrungen, die man bei der – unsachgemäßen – Verwendung fertiger Fouriertransformationsprogramme oder -hardware gemacht hat.

Dieses Buch wendet sich an alle, die als Laien – als Fußgänger – einen behutsamen und auch amüsanten Einstieg in die Anwendung der Fouriertransformation suchen, ohne dabei mit zuviel Theorie, mit Existenzbeweisen und dergleichen konfrontiert werden zu wollen. Es ist geeignet für Studenten der naturwissenschaftlichen Fächer an Fachhochschulen und Universitäten, aber auch für „nur“ interessierte Computerfreaks. Ebenso eignet es sich für Studenten der Ingenieurwissenschaften und für alle Praktiker, die mit der Fouriertransformation arbeiten. Elementare Kenntnisse in der Integralrechnung sind allerdings wünschenswert.

Wenn sich durch dieses Buch Vorurteile vermeiden oder gar abbauen lassen, dann hat sich das Schreiben schon gelohnt. Hier wird gezeigt, wie es „funktioniert“. Die Fouriertransformation wird generell nur in einer Dimension behandelt. In Kap. 1 werden als Einstieg Fourierreihen vorgestellt und dabei wichtige Sätze bzw. Theoreme eingeführt, die sich wie ein roter Fa-

¹ Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), französischer Mathematiker und Physiker.

² Integration und Differentiation sind lineare Operatoren. Dies ist in der diskreten Version (Kap. 4) sofort einsichtig und gilt natürlich auch beim Übergang zur kontinuierlichen Form.

den durch das ganze Buch ziehen. Wie es sich für Fußgänger gehört, werden natürlich auch „Fußangeln“ erläutert. Kapitel 2 behandelt kontinuierliche Fouriertransformationen in großer Ausführlichkeit. Sehr umfangreich werden in Kap. 3 die Fensterfunktionen diskutiert, deren Verständnis essentiell für die Vermeidung enttäuschter Erwartungen ist. In Kap. 4 werden diskrete Fouriertransformationen unter besonderer Berücksichtigung des Cooley–Tukey-Algorithmus (Fast Fourier Transform, FFT) besprochen. Kapitel 5 bringt schließlich ein paar nützliche Beispiele für die Filterwirkung einfacher Algorithmen. Hier wurden aus der riesigen Stofffülle nur solche Themen aufgegriffen, die bei der Datenaufnahme bzw. -vorverarbeitung relevant sind und oftmals unbewußt ausgeführt werden. Die Spielwiese im Anhang bietet die Möglichkeit, das Gelernte an einigen nützlichen Beispielen auszuprobieren, und zugleich soll sie die Lust für die Entwicklung eigener Ideen wecken.

Dieses Buch entstand aus einem Manuskript für Vorlesungen an der Technischen Universität München und an der Universität Leipzig. Es hat daher einen starken Lehrbuchcharakter und enthält viele Beispiele – oft „per Hand“ nachzurechnen – und zahlreiche Abbildungen. Zu zeigen, daß ein deutschsprachiges Lehrbuch auch amüsant und unterhaltsam sein kann, war mir ein echtes Anliegen, denn Strebsamkeit und Fleiß alleine können Kreativität und Phantasie töten. Es muß auch Spaß machen und sollte den Spieltrieb fördern. Die beiden Bücher „Applications of Discrete and Continuous Fourier Analysis“ [2] und „Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis“ [3] haben die Gliederung und den Inhalt dieses Buches stark beeinflusst und sind als Zusatzlektüre – speziell für „Theoriedurstige“ – zu empfehlen. Für die vielen neudeutschen Ausdrücke wie z.B. „sampeln“ oder „wrappen“ entschuldige ich mich im voraus und bitte um Milde.

Dank gebührt Frau U. Seibt und Frau K. Schandert sowie den Herren Dipl.-Phys. T. Reinert, T. Soldner und St. Jankuhn, insbesondere aber Herrn Dipl.-Phys. H. Gödel für die mühevollen Arbeit, aus einem Manuskript ein Buch entstehen zu lassen. Anregungen, Anfragen und Änderungsvorschläge sind erwünscht.

Viel Spaß beim Lesen, Spielen und Lernen.

Leipzig,
Mai 1998

Tilman Butz

Vorwort zur zweiten Auflage

Bei der Durchsicht der ersten Auflage sind einige Fehler gefunden worden, die in der zweiten Auflage korrigiert wurden. Ich danke insbesondere für Hinweise von aufmerksamen Lesern, auch für Hinweise per e-mail. Anregungen, Anfragen und Hinweise sind weiterhin erwünscht.

Leipzig,
Dezember 1999

Tilman Butz

Vorwort zur dritten Auflage

Zu der ersten und zweiten Auflage des Buches sind zahlreiche Hinweise, Anfragen und Anregungen von aufmerksamen Lesern eingegangen, auch per e-mail, für die ich mich sehr bedanke. Besonderer Dank gebührt Herrn Dipl.-Phys. St. Jankuhn für sein akribisches Korrekturlesen; die Hinweise wurden in der dritten Auflage berücksichtigt. Außerdem wurden einige Änderungen und Erweiterungen vorgenommen, insbesondere in den Kapiteln 2.3, 2.4, 3, 4.7 und 5.2, die zum Teil aus intensiven e-mail Diskussionen über bestimmte Formulierungen resultierten. Anregungen, Anfragen und Hinweise sind weiterhin erwünscht.

Leipzig,
Juli 2003

Tilman Butz

Vorwort zur vierten Auflage

Die vierte, durchgesehene und erweiterte Auflage basiert auf der 3. Auflage und enthält eine Fülle von neuen „Spielwiesen“ (manche nennen das lieber „Probleme“) nach jedem Kapitel, die der ersten englischen Ausgabe entnommen sind. Besonderer Dank gebührt, wie schon früher, Herrn Dipl.-Phys. St. Jankuhn für sein akribisches Korrekturlesen und seinen virtuoseren Umgang mit \LaTeX sowie Frau A. Käthner. Anregungen, Anfragen und Hinweise sind weiterhin erwünscht.

Leipzig,
September 2005

Tilman Butz

Vorwort zur fünften Auflage

Die fünfte, durchgesehene Auflage basiert auf der 4. Auflage. Besonderer Dank gebührt wiederum Herrn Dipl.-Phys. St. Jankuhn, und natürlich auch allen aufmerksamen Lesern, die mich auf Schwächen und Fehler aufmerksam gemacht haben. Anregungen, Anfragen und Hinweise sind immer erwünscht.

Leipzig,
Februar 2007

Tilman Butz

Vorwort zur sechsten Auflage

Die sechste, durchgesehene Auflage basiert auf der 5. Auflage. Besonderer Dank gebührt wiederum Herrn Dipl.-Phys. St. Jankuhn, und natürlich auch allen aufmerksamen Lesern, die mich auf Schwächen und Fehler (immer noch!) aufmerksam gemacht haben. Anregungen, Anfragen und Hinweise sind wie immer erwünscht.

Leipzig,
August 2008

Tilman Butz

Vorwort zur siebten Auflage

Die siebte, durchgesehene Auflage basiert auf der 6. Auflage. Besonderer Dank gebührt allen aufmerksamen Lesern, die mich auf Schwächen und Fehler aufmerksam gemacht haben und natürlich auch Herrn Dipl.-Phys. St. Jankuhn. Anregungen, Anfragen und Hinweise sind wie immer erwünscht.

Leipzig,
August 2011

Tilman Butz

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Fourierreihen	3
1.1 Fourierreihen	3
1.1.1 Gerade und ungerade Funktionen	4
1.1.2 Definition der Fourierreihe	4
1.1.3 Berechnung der Fourierkoeffizienten	6
1.1.4 Fourierreihe in komplexer Schreibweise	11
1.2 Theoreme und Sätze	14
1.2.1 Linearitätstheorem	14
1.2.2 Der 1. Verschiebungssatz	14
1.2.3 Der 2. Verschiebungssatz	17
1.2.4 Skalierungssatz	22
1.3 Partialsummen, Besselsche Ungleichung, Parsevals Gleichung ..	22
1.4 Gibbssches Phänomen	25
1.4.1 Der Dirichletsche Integralkern	26
1.4.2 Integraldarstellung der Partialsummen	27
1.4.3 Gibbsscher Überschwinger	28
Spielwiese	31
2 Kontinuierliche Fouriertransformation	33
2.1 Kontinuierliche Fouriertransformation	33
2.1.1 Gerade und ungerade Funktionen	33
2.1.2 Die δ -Funktion	34
2.1.3 Hin- und Rücktransformation	35
2.1.4 Polardarstellung der Fouriertransformierten	40
2.2 Theoreme und Sätze	42
2.2.1 Linearitätstheorem	42
2.2.2 Der 1. Verschiebungssatz	42
2.2.3 Der 2. Verschiebungssatz	44
2.2.4 Skalierungssatz	46
2.3 Faltung, Kreuzkorrelation, Autokorrelation, Parsevals Theorem	47
2.3.1 Faltung	47
2.3.2 Kreuzkorrelation	56
2.3.3 Autokorrelation	57

2.3.4	Parsevals Theorem	58
2.4	Fouriertransformation von Ableitungen	59
2.5	Fußangeln	62
2.5.1	„Aus 1 mach 3“	62
2.5.2	Abschneidefehler	64
	Spielwiese	67
3	Fensterfunktionen	71
3.1	Das Rechteckfenster	72
3.1.1	Nullstellen	72
3.1.2	Intensität im zentralen Peak	72
3.1.3	„Sidelobe“-Unterdrückung	73
3.1.4	3 dB-Bandbreite	74
3.1.5	Asymptotisches Verhalten der „Sidelobes“	75
3.2	Das Dreieckfenster (Fejer-Fenster)	76
3.3	Das Kosinus-Fenster	77
3.4	Das \cos^2 -Fenster (Hanning)	78
3.5	Das Hamming-Fenster	80
3.6	Das Triplett-Fenster	81
3.7	Das Gauß-Fenster	82
3.8	Das Kaiser–Bessel-Fenster	83
3.9	Das Blackman–Harris-Fenster	85
3.10	Überblick über die Fensterfunktionen	87
3.11	Wichten oder Falten?	90
	Spielwiese	91
4	Diskrete Fouriertransformation	93
4.1	Diskrete Fouriertransformation	93
4.1.1	Gerade und ungerade Zahlenfolgen und „wrap-around“	93
4.1.2	Das Kronecker-Symbol oder die „diskrete δ -Funktion“	94
4.1.3	Definition der diskreten Fouriertransformation	96
4.2	Theoreme und Sätze	100
4.2.1	Linearitätstheorem	100
4.2.2	Der 1. Verschiebungssatz	101
4.2.3	Der 2. Verschiebungssatz	102
4.2.4	Skalierungssatz/Nyquist-Frequenz	102
4.3	Faltung, Kreuzkorrelation, Autokorrelation, Parsevals Theorem	103
4.3.1	Faltung	105
4.3.2	Kreuzkorrelation	107
4.3.3	Autokorrelation	108
4.3.4	Parsevals Theorem	108
4.4	Das Sampling-Theorem	109
4.5	Daten spiegeln, Sinus- und Kosinus-Transformation	114
4.6	„Zero-padding“	118
4.7	Fast Fourier Transform (FFT)	125

Spielwiese	132
5 Filterwirkung bei digitaler Datenverarbeitung	137
5.1 Transferfunktion	137
5.2 Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß, Notchfilter	139
5.3 Daten verschieben	146
5.4 Daten komprimieren	147
5.5 Differenzieren diskreter Daten	148
5.6 Integrieren diskreter Daten	149
Spielwiese	153
Anhang: Lösungen	157
Literaturverzeichnis	207
Sachverzeichnis	209