

Algebra in der Grundschule

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von
Prof. Dr. Friedhelm Padberg
Universität Bielefeld

Bisher erschienene Bände (Auswahl):

Didaktik der Mathematik

P. Bardy: Mathematisch begabte Grundschulkinder – Diagnostik und Förderung (P)
M. Franke: Didaktik der Geometrie (P)
M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (P)
K. Hasemann: Anfangsunterricht Mathematik (P)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe (P)
F. Käpnick: Mathematiklernen in der Grundschule (P)
G. Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule (P)
G. Krauthausen/P. Scherer: Einführung in die Mathematikdidaktik (P)
G. Krummheuer/M. Fetzner: Der Alltag im Mathematikunterricht (P)
F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik (P)
P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe (P)
A. S. Steinweg: Algebra in der Grundschule – Muster und Strukturen/Gleichungen/funktionale Beziehungen (P)

G. Hinrichs: Modellierung im Mathematikunterricht (P/S)

R. Danckwerts/D. Vogel: Analysis verständlich unterrichten (S)
G. Greefrath: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (S)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I (S)
F. Padberg: Didaktik der Bruchrechnung (S)
H.-J. Vollrath/H.-G. Weigand: Algebra in der Sekundarstufe (S)
H.-J. Vollrath/J. Roth: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (S)
H.-G. Weigand/T. Weth: Computer im Mathematikunterricht (S)
H.-G. Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S)

Mathematik

F. Padberg: Einführung in die Mathematik I – Arithmetik (P)
F. Padberg: Zahlentheorie und Arithmetik (P)

K. Appell/J. Appell: Mengen – Zahlen – Zahlbereiche (P/S)
A. Filler: Elementare Lineare Algebra (P/S)
S. Krauter/C. Bescherer: Erlebnis Elementargeometrie (P/S)
H. Kütting/M. Sauer: Elementare Stochastik (P/S)
T. Leuders: Erlebnis Arithmetik (P/S)
F. Padberg: Elementare Zahlentheorie (P/S)
F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: Zahlbereiche (P/S)

A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Analysis (S)
G. Wittmann: Elementare Funktionen und ihre Anwendungen (S)

P: Schwerpunkt Primarstufe
S: Schwerpunkt Sekundarstufe

Weitere Bände in Vorbereitung

Anna Susanne Steinweg

Algebra in der Grundschule

Muster und Strukturen –
Gleichungen – funktionale
Beziehungen

Anna Susanne Steinweg
Didaktik der Mathematik und Informatik
Otto-Friedrich-Universität Bamberg
E-Mail: anna.steinweg@uni-bamberg.de

ISBN 978-3-8274-2079-4

ISBN 978-3-8274-2738-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-8274-2738-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Bianca Alton

Korrektur: Maren Klingelhöfer

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-spektrum.de

Vorwort

Im August 2012 titelte das Satireblatt ‚Der Postillon‘: „Wert von x ein für alle Mal auf 5 festgesetzt“. Weiter unten im Text wird ein (fiktiver) Interviewpartner zitiert, der die Mühsal der Menschen bei der Lösung von Gleichungen beklagt. „Seit Jahrzehnten mühen sich Generationen von Schülern, Studenten, Physikern und Mathematikern bei dem Versuch ab, immer wieder den Wert von x zu ermitteln. [...] Um diesen Missstand zu beheben, hat das Institut die Ergebnisse von x aus mehreren Tausend Rechenaufgaben der letzten 100 Jahre gesammelt und daraus einen Durchschnittswert von 5,14929131 ermittelt. [...] Außerdem legten die Wissenschaftler auch endgültige Werte für die Buchstaben a (1), b (3), c (10), y (2) und z (29) fest, [...]“ (Der Postillon, 21.08.2012).

Als Reaktion scherzt ein Freund: „Na, dann brauchst du dein Buch ja nicht mehr zu schreiben!“

Selbstverständlich darf man herzlich lachen, und ich habe es selbst auch ausführlich getan. Aber – ganz abgesehen davon, dass das Satireblatt hier einen wunderbaren, vermeintlich wissenschaftlichen Internetberichten nachempfundenen Stil wählt, der tatsächlich zum Schmunzeln einlädt – stellt sich doch auch die schlichte Frage, warum dieser Internetscherz offensichtlich für ein breites Publikum gelingt.

Der gesamte Text spielt mit der Alltagsvorstellung sehr vieler Menschen, die zum einen Algebra und Gleichungslehre synonym verstehen und sich zum anderen offensichtlich an die ‚Lösung‘ von Gleichungen oder Gleichungssystemen als das Hauptmerkmal ihres eigenen Algebraunterrichts erinnern.

Letztere Alltagsvorstellung oder Jugenderinnerung trifft vielleicht sogar einen wunden Punkt der Gestaltung von Lernumgebungen in der Sekundarstufe, die mitunter zu sehr auf kalkülhafte Jonglage mit Termen und Gleichungen bei Äquivalenzumformungen abzielen. Dies soll hier aber nicht weiter Thema sein und wird im Übrigen in anderen Werken dieser Reihe zum Unterricht in der Sekundarstufe (z. B. Padberg und Heckmann 2012 oder Vollrath und Roth 2012) und zur Algebra (z. B. Vollrath und Weigand 2007), zumindest in der Theorie, bestens widerlegt.

Die erste Alltagsvorstellung hingegen, die eine sehr enge Kopplung des Begriffs Algebra bzw. algebraisches Denken und Handeln mit der Auseinandersetzung mit Gleichungen deutlich macht, ist von hoher Relevanz für das vorliegende Buch.

Algebra, algebraische Argumentationen und algebraisches Denken, so soll im Weiteren gezeigt werden, sind dabei viel bunter und vielfältiger als die Gleichungslehre. Natürlich, auch Gleichungen und Terme und sogar Symbole für Variablen haben ihren Platz. Sie sind aber allesamt nicht zwingend der Ausgangspunkt der Förderung algebraischen Denkens und sicherlich nicht die allein vorstellbaren Lernumgebungen in der Primar- und unteren Sekundarstufe.

Vor allem Muster und Strukturen, aber auch die Eigenschaften der Rechenoperationen, funktionale Beziehungen und ja, auch Terme und Gleichungen bieten ein überraschend ergiebiges Kaleidoskop an Anknüpfungspunkten, algebraisches Denken im ganz alltäglichen Mathematikunterricht von der Jahrgangsstufe 1 an zu ermöglichen und anzustoßen. Variable – insbesondere Buchstabenvariable – stellen sich dabei als für algebraische Erstbegegnungen weder notwendig noch hinreichend heraus, werden aber auch in ihrer Bedeutung beleuchtet.

Das vorliegende Buch möchte Sie einladen, die Vielfalt algebraischer Aktivitäten zu entdecken, nationale und internationale Forschungsideen und Forschungsergebnisse zu algebraischem Denken von der Jahrgangsstufe 1 an kennenzulernen und – last but not least – in Dokumenten von Kindern der Jahrgangsstufen 1 bis 7, die in ‚algebraischen Lernumgebungen‘ entstanden sind, den Denkwegen und Entwicklungsschritten nachzuspüren.

Mein Dank geht an alle Lehrerinnen, die Aktivitäten zur algebraischen Denkentwicklung in ihren Klassen erprobt haben und mich – jetzt auch Sie – daran teilhaben ließen. Besonders sei dabei natürlich den Kindern gedankt, die sich mutig und frei auf diese vielleicht auf den ersten Blick ungewohnten Lernumgebungen eingelassen haben und uns mit ihren Antworten und Kommentaren viel davon berichten, welche Potenziale in ihnen und auch in den Lerngelegenheiten stecken.

Herzlich danke ich Erich Christian Wittmann für seine grundlegenden Ideen und für alle intensiven Diskussionen und Anregungen.

Eine spannende und anregungsreiche Lektüre wünscht

Anna Susanne Steinweg

Bamberg, im März 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Inhaltsverzeichnis	vii
1 Algebraisches Denken – eine Annäherung	1
1.1 Abgrenzung von Arithmetik und Algebra.....	2
1.2 Blick zurück nach vorn – Geschichte der Algebra.....	3
1.3 Zugänge und Wege zur Algebra.....	6
1.4 Warum der Weg zur Algebra steinig sein kann – Hinweise auf Einflussfaktoren.....	8
1.5 Beziehungen zwischen Arithmetik und Algebra	10
1.6 Warum algebraisches Denken fördern?	15
2 Muster und Strukturen – wegweisend für algebraisches Denken	19
2.1 Muster und Strukturen in Bildungsstandards und Lehrplänen	20
2.2 Muster und Strukturen in internationalen Standards.....	22
2.3 Muster regen das Denken an	25
2.4 Über Folgen nachdenken – algebraisches Denken fördern	26
2.5 Formen- und Farbmuster.....	28
2.6 Zahlenmuster	39
2.6.1 Mathematischer Hintergrund zu Zahlenfolgen.....	40
2.6.2 Aktivitäten zu Zahlenfolgen.....	42
2.6.3 Zahlenfolgen operativ verändern	45
2.6.4 Zahlenfolgen innerhalb anderer Aufgabenformate	48
2.7 Muster und Terme – Terme und Muster.....	57
2.7.1 Was siehst du? – Terme in Muster hineindeuten.....	57
2.7.2 Kann man das zeichnen? – Muster aus Termen entwickeln.....	62
2.7.3 Sind das jetzt ‚echte‘ Beweise? - Muster und Terme	
im Zusammenspiel.....	68
3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen	73
3.1 Gleichungen und das Gleichheitszeichen aus Sicht der Lernenden.....	73
3.2 Mathematische Begriffe und Hintergrund.....	77
3.3 Strukturen in Termen und Gleichungen sehen lernen –	
‚Termbausteine‘.....	81
3.4 Prozesse mit Konzeptideen – Lösungsverfahren linearer Gleichungen hinterfragen	88

3.5	Gleichwertigkeit herstellen.....	96
3.6	Zahlenspiele – Terme und Gleichungen ‚wirkungslos‘ variieren.....	101
3.6.1	Terme variieren	102
3.6.2	Gleichungen variieren	104
3.7	Gleichungen erfinden	107
3.8	Gleichwertigkeit beurteilen	110
3.9	Da stimmt was nicht – Gleichungen korrigieren	116
3.10	Bemerkungen zum Thema Gleichungen.....	120
4	Eigenschaften von Rechenoperationen und Beweisstrategien ..	123
4.1	Operation und Gegenoperation.....	125
4.2	Kommutativität.....	126
4.2.1	Kommutativität der Addition	126
4.2.2	Kommutativität der Multiplikation	131
4.3	Assoziativität	136
4.4	Distributivität	141
4.5	Mit Termen spielen – Konstanz erhalten.....	153
4.6	Bemerkungen zu Eigenschaften von Operationen – Algebra als bewusste Strategienutzung	162
5	Zur Bedeutung von Variablen	165
5.1	Eine kurze Geschichte der Variablen.....	166
5.2	Grundkonzepte von Variablen.....	167
5.2.1	Die Unbekannte – auf der Suche nach Mister X.....	169
5.2.2	Die Veränderliche – was passiert, wenn?	171
5.2.3	Variable als unbestimmte, allgemeine Zahl	172
5.3	Lernumgebungen zu Variablen als Unbekannte von Anfang an.....	174
5.3.1	Verbale und andere Zahlenrätsel.....	175
5.3.2	Die Unbekannte als ‚Behälter‘	183
5.3.3	Die Bedeutung unlösbarer Rätsel.....	185
5.4	Variable variieren.....	189
5.5	Bemerkungen zu Variablen.....	190
6	Funktionale Beziehungen nutzen	197
6.1	Mathematische Hintergründe zu Funktionen.....	200
6.2	Funktionales Denken.....	201
6.3	Funktionale Beziehungen in verschiedenen Repräsentationen.....	203
6.4	Funktionale Beziehungen aufdecken – auf der Suche nach der Regel.....	206
6.4.1	Die Funktion entschlüsseln – rekursive	208
	und explizite Vorgehensweisen	208
6.4.2	Funktionale Beziehungen notieren	211
6.4.3	Eigene Regeln aufstellen und finden lassen.....	213
6.4.4	Grafische Repräsentation linearer Funktionen	215

6.5	Algebraisches Denken und Technik – Möglichkeiten von neuen und alten Technologien	218
6.5.1	Einsatz von Taschenrechnern	218
6.5.2	Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen.....	220
6.6	Bemerkungen zu funktionalen Beziehungen	224
7	Schlussbemerkungen	227
7.1	Die Bedeutung der Lehrpersonen.....	227
7.2	Algebraisches Denken – auf dem Weg zu	
	mathematischen Konzepten	231
	Exkurs: Wege zur algebraischen Syntax	237
A	Von Multiplikationstabellen zur algebraischen Symbolsprache –	
	„Grid“-Algebra	238
B	Von Größenvergleichen zur algebraischen Symbolsprache –	
	„Measure Up“-Algebra	243
Anhang	249
Literatur	253
Bildnachweis	271
Index	275