

Mathematik für das erste Semester

Mike Scherfner • Torsten Volland

Mathematik für das erste Semester

Analysis und Lineare Algebra für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Autoren

Mike Scherfner und Torsten Volland,
Berlin

Weitere Informationen zum Buch finden Sie unter www.spektrum-verlag.de/978-3-8274-2504-1

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2012
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

12 13 14 15 16 5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Sabine Bartels
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Satz: Autorenatz

Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm

Titelbild: © C. Petz, T. Weinkauff, H.-C. Hege (Zuse-Institut Berlin), B.R. Noack (TU Berlin), H. Streckwall (HSVA). Die Abbildung zeigt die Wirbelstruktur der Strömung an einem Schiffspropeller, dargestellt durch beleuchtete Stromlinien und transparente Flächen gleichen Drucks. Das Strömungsfeld wurde mit Methoden der Computational Fluid Dynamics (CFD) simuliert.

ISBN 978-3-8274-2504-1

Einige Worte vorab

Das erste Semester zeigt oft deutlich, was über Mathematik bisher nicht gewusst (oder vergessen) wurde. Manchmal wurden schlummernde Begabungen gar nicht gefördert oder gefordert und erst zum Studium wird einem klar, dass die Mathematik nicht auf dem Schulhof blieb, als man dessen Tore für immer hinter sich lassen wollte. Und dann ist es natürlich an Hochschulen oft so, dass noch viel mehr an Mathematik gelernt werden muss, als man auch nur zu träumen wagte. Dieses Buch wird Ihnen im Studium zur Seite stehen.

Wir behandeln die zwei wesentlichen mathematischen Themengebiete, die Ihnen zum Anfang Ihres Studiums begegnen, nämlich die so genannte Analysis (in einer Variablen) und Lineare Algebra. Diese bilden die Grundlage für diverse andere Kurse — nicht nur solche in der Mathematik. Die beiden genannten Gebiete werden zumeist im ersten Semester parallel (oder auch in einem Kurs zur höheren Mathematik verschmolzen) behandelt, das begründet wesentlich den Namen des Buches. Natürlich können die Teile auch getrennt gelesen werden — Sie haben faktisch zwei Bücher in einem. Nur an wenigen Stellen, wie bei den Differenzialgleichungen, gibt es explizit sichtbare Verknüpfungen.

Dieses Buch ist aus zwei zuvor getrennt erschienenen Büchern (Lineare Algebra bzw. Analysis für das erste Semester) entstanden, die hier in deutlich überarbeiteter Form vorliegen. Die ursprünglichen Werke wurden sehr gut angenommen und haben zahlreiche Studierende u. a. zum Bestehen ihrer Prüfungen gebracht; dennoch haben wir uns — auch nach vielen Gesprächen mit Kollegen und Studierenden — um Verbesserungen bemüht.

Am Ende kann es ohnehin nie allen Recht gemacht werden, denn was dem einen zuviel, ist dem anderen zu wenig; was dem einen klar erscheint, erscheint dem anderen viel zu kompliziert. Wir haben einfach versucht, Ihnen mit diesem Buch einen Begleiter zu schreiben, der Verständnis für Probleme zeigt und so gut wie (uns) möglich bei den Schwierigkeiten des ersten Semesters hilft. Denn oft entscheidet sich bereits hier, ob es für Sie im Studium eine Zukunft gibt oder nicht.

Vor dem eigentlichen Start möchten wir Ihnen genauer beschreiben, an was und wen wir beim Verfassen gedacht haben.

Für wen ist dieses Buch?

Dieses Buch richtet sich primär an Studierende der Ingenieurwissenschaften im ersten Semester an Universitäten und Fachhochschulen. Dabei ist es gleichfalls gut als Einstieg für angehende Lehrer geeignet. Der Übergang zum Bachelor als erstem akademischen Grad hat zu zahlreichen Verwirrungen und Irrungen geführt, was leider auch die Studierenden erdulden müssen. Dadurch bleibt, teils auch in der mathematischen Ausbildung der Ingenieure, weniger Zeit, um alles bis ins Detail exakt zu präsentieren. Dies finden wir bedauerlich, versuchen aber trotzdem das Beste aus der verbleibenden Zeit zu machen.

Die Stoffauswahl richtet sich daher wesentlich nach dem, was der Ingenieur in seinen Mathematikveranstaltungen geboten bekommt. Wie es dort üblich ist, wird viel Wert auf Beispiele, Rechnungen und Verfahren gelegt. Wir haben uns aber bemüht, die Sachverhalte plausibel zu machen, was häufig auch die Idee für den Beweis (oder diesen selbst) einschließt. Es war lange Zeit die Tradition von Lehrbüchern der Mathematik, die Resultate im Textfluss zu präsentieren, sodass sich das eigentliche mathematische Resultat ganz natürlich ergab und man am Gedankengang teilhaben konnte. Diese Idee ist auch hier aufgenommen worden; es soll sich alles im Fluss erlernen (und erleben) lassen, das Buch soll freundlicher Erklärer sein, nicht strenger Oberlehrer.

Der Wert des Buches liegt auch darin begründet, dass das Wort „trivial“ nicht zu finden sein wird (auf das Entdecken im *nachfolgenden* Text setzen wir eine hohe Belohnung aus). Viele Begründungen sind eher intuitiv und weniger formal. Das ist keine Unterlassung, sondern Absicht; Gleichungswüsten in Buchform gibt es bereits genug.

Sie können das Buch gerne auch zur Hand nehmen, wenn Sie nicht im ersten Semester sind. Wir betonen die Eignung für Erstsemester nur, weil wir einen möglichst sanften Zugang bieten.

Unser Ziel

Es gibt kein Buch, das Sie sich unter das Kopfkissen legen, um dann nach einigen Nächten wissend zu erwachen. Wir möchten aber beweisen, dass Mathematik kein Buch mit sieben Siegeln ist. Sicher ist Mathematik ein anspruchsvolles Geschäft, jedoch keines, was auch nur die geringste Angst berechtigt aufkommen lässt.

In unserem Buch gibt es kein Kapitel, dem nicht eine Motivation vorangestellt wurde. Was einen motiviert oder nicht, das ist allerdings sehr individuell; wir hoffen jedenfalls, das Kommende durch einleitende Worte leichter annehmbar zu machen. Vor dem richtigen Start gibt es auch noch eine Vorbereitung, die Sie von der Schule abholt und Wesentliches von dem liefert, was Sie eventuell verpasst, vergessen oder gar nicht gelernt haben.

In einem Buch für Studierende der Ingenieurwissenschaften erwarten viele, dass es unzählige Anwendungsaufgaben gibt, die sich direkt mit der Praxis befassen. Immerhin geht es um mathematische Grundlagen für die verschiedensten Studiengänge wie Maschinenbau, Biotechnologie, Verfahrenstechnik, Elektrotech-

nik, etc. Wir wollten jedoch der Tatsache Rechnung tragen, dass es gerade am Anfang des Studiums schwer genug ist, sich zu fokussieren. Und in den meisten Fällen müsste man für interessante Anwendungsaufgaben weit ausholen, was vom mathematischen Kern ablenken würde. Das ist der Grund, warum das Buch am Ende doch ein ziemlich (rein) mathematisches bleibt. Natürlich hätten wir weitere begeisternde Themen nehmen können, in die Numerik einführen und viele Seiten mit ingenieurwissenschaftlicher Praxis füllen. Letztendlich wollen — und müssen — die allermeisten Studierenden zum Schluss der Mathematikurse eine Klausur bestehen und/oder im Semester Hausaufgaben lösen. Und das ist dann nun einmal rein mathematischer Natur. Als Mathematiker und Naturwissenschaftler würden wir gerne jeden Tag „Mehr Begeisterung und Durchhaltevermögen, liebe Studierende, wir haben da noch was!“ schreien. Aber wir müssen auch keine Prüfungen mehr ablegen und begreifen, dass Studienordnungen, Arbeit neben dem Studium zum Überleben und neue Knechtschaften (wie die der Bachelor-Studiengänge) ihren Tribut fordern. Daher halten wir uns hier wesentlich an die Weisheit, dass sich der Magen auch mit zuviel gutem Essen verderben lässt.

Inhalt und Aufbau

Wir behandeln die Standardthemen der Analysis für eine Variable und der Linearen Algebra. Diese Auswahl orientiert sich an der Tatsache, dass an den meisten Hochschulen gerade diese Themen an den Anfang gestellt werden. Die Reihenfolge der Hauptteile richtet sich danach, dass das Denken bezüglich einer Variable aus der Schule recht vertraut und vergleichsweise unkompliziert ist. Der Übergang zu mehreren Dimensionen erscheint oft sehr abstrakt, muss aber in der Linearen Algebra vollzogen werden. In der Zukunft erwartet Sie dann die Analysis in mehreren Variablen, wo zahlreiche Überlegungen aus den hier behandelten Themen offensichtlich zusammenfließen. Ein erstes Treffen findet bereits beim Thema Differenzialgleichungen statt. Die Behandlung selbiger ist durchaus nicht üblich für ein Buch zum ersten Semester, jedoch lernt man hier bereits viel über das Zusammenspiel der hier behandelten Disziplinen und Sie werden die Tragweite der Konzepte (z. B. das der Linearität) erkennen.

Mathematiker und Physiker werden das Fehlen von Themen (mit Recht) bedauern und auch den Studierenden der Ingenieurwissenschaften können wir nicht alles bieten, was wir wollten (oder aus der Sicht einiger sollten); ein solches Werk bleibt immer ein Spagat (mit mehr als zwei Beinen) zwischen den Notwendigkeiten des Studienplanes, den Wünschen der Studierenden, der Dozenten, der gegebenen Zeit und dem eigenen Anspruch. Und letzterer ist dann meist nur durch eine ständig wachsende Seitenzahl befriedigt, die jede Lücke zu schließen vermag — aber auch jeden Rahmen sprengen würde.

Wir werden in diesem Buch zahlreiche Beispiele betrachten, die das Erlernte greifbar machen. Wir haben uns bemüht, die ersten Beispiele stets einfach zu halten. Was zuvor in der Theorie gemacht wurde, soll gleich verstehbar in den Beispielen umgesetzt werden. Am Ende eines jeden Kapitels stehen

Aufgaben, an die sich sofort die *vollständigen Lösungen* anschließen, damit Sie sofort prüfen können, ob Sie Weg und Ergebnis gefunden haben. Die Aufgaben sind dabei manchmal einfach (es müssen ja auch die Grundlagen verstanden werden), teils aber auch anspruchsvoll und benötigen neben Rechenfertigkeiten auch Verständnis.

Am Ende jedes Kapitels finden Sie jeweils noch einige ausgewählte Fragen, die in dieser Art aus einer (mündlichen) Prüfung stammen könnten. Es gibt keine angeschlossenen Antworten, denn Sie finden alles im Text zuvor. Beherrschen Sie nämlich etwas nicht, so wollen wir Sie beabsichtigt wieder zum Lesen bringen.

Bitte beachten Sie, dass wir die Aufgaben nicht als Zusatz sehen, sondern als bedeutenden Teil des Buches: Es gibt nämlich einem gewaltigen Unterschied zwischen dem Kennen und dem Können.

Wie bereits erwähnt, finden Sie am Anfang eine Vorbereitung. Es handelt sich dabei um eine kleine (aber nützliche) Sammlung von Dingen, die vor dem eigentlichen Start gewusst werden sollten. Nicht alles davon werden wir in diesem Buch verwenden. Aber es hilft Ihnen sicher beim Studienanfang und bei anderen Mathematikveranstaltungen. Viele Bücher enden einfach mit dem Stoff, unseres mit Ideen und Tipps zu den Prüfungen, die vor Ihnen liegen. Ferner bieten wir zur realistischen Vorbereitung mögliche Klausuraufgaben.

Ihnen wird auffallen, dass Definitionen, Beispiele und Sätze farblich hervorgehoben sind. Wir möchten damit erreichen, dass Sie die — sagen wir es bildlich — tragenden Teile des Gerüsts (z. B. zur direkten Vorbereitung auf einen Test oder zur Auffrischung von Gelerntem) schnell finden. Ein mathematisches Gerüst taugt aber nichts ohne die verbindenden (und erklärenden) Elemente, die sich wesentlich im schwarzen Text befinden.

Wir hoffen, dass Sie dieses Buch als eine Art persönlichen Begleiter annehmen können; so haben wir uns nach Kräften bemüht, den Stoff freundlich und verbindlich zu vermitteln.

Dank

Einige liebe Menschen in unserem Umfeld hatten etwas weniger von uns, weil wir uns Zeit für dieses Buch genommen haben. Danke, dass Ihr das erduldet habt!

Wir bedanken uns bei Herrn Dirk Ferus, dessen Skripte zum Thema Inspiration und Hilfe waren und dem der erstgenannte Autor seine schönsten Vorlesungen verdankt. Wir bedanken uns ferner bei Matthias Plau, der mit Rat und Tat geholfen hat; den Herren Epp und Schönfeld für ihre Hilfe bei den Graphiken. Den Herren Seiler, Mehrmann und Rambau danken wir für ihr Skript zur Linearen Algebra, das in seinen verschiedenen Evolutionsstufen oft motivierender Richtungsgeber war. Ferner Dank an Stefan Born für charismatische und konstruktive Bemerkungen zur Mathematik und Restwelt.

Mike Scherfner, Torsten Volland

Inhaltsverzeichnis

Einige Worte vorab	v
Analysis	1
1 Worum geht es in der Analysis?	3
2 Ein wenig Vorbereitung	5
2.1 Motivation	5
2.2 Ein Vorrat an Buchstaben	5
2.3 Vom richtigen Umgang mit der Aussagenlogik	6
2.4 Vollständige Induktion	9
2.5 Mengen	10
2.5.1 Ein kleiner Zoo wichtiger Mengen	12
2.5.2 Wie aus bekannten Mengen neue entstehen	13
2.6 Aufgaben	16
2.7 Lösungen	17
3 Reelle und komplexe Zahlen	21
3.1 Motivation	21
3.2 Reelle Zahlen	21
3.2.1 Rechnen mit Ungleichungen	22
3.3 Summen und Produkte	23
3.3.1 Fakultät und Binomialkoeffizient	25
3.4 Komplexe Zahlen	27
3.4.1 Polarkoordinaten	29
3.5 Aufgaben	31
3.6 Lösungen	32
4 Abbildungen und Funktionen	37
4.1 Motivation und Definitionen	37
4.2 Einige Eigenschaften von Abbildungen	38
4.3 Komposition von Abbildungen	42
4.4 Darstellung von Funktionen	44
4.5 Aufgaben	45

4.6	Lösungen	46
5	Wichtige Funktionen im Überblick	51
5.1	Motivation	51
5.2	Polynome und rationale Funktionen	51
5.2.1	Polynome	51
5.2.2	Rationale Funktionen	52
5.3	Sinus, Kosinus und Tangens	55
5.3.1	Einige Additionstheoreme	57
5.4	Exponentialfunktion und Logarithmus	58
5.4.1	Potenz- und Logarithmusgesetze	59
5.5	Weitere wichtige Funktionen	60
5.6	Aufgaben	63
5.7	Lösungen	63
6	Folgen	69
6.1	Motivation	69
6.2	Grundlagen	69
6.3	Konvergenz und Divergenz	70
6.4	Rechenregeln für Folgen	73
6.5	Das Monotoniekriterium	75
6.6	Was noch über Folgen gewusst werden sollte	75
6.7	Das Häufungspunktprinzip und mehr	76
6.8	Aufgaben	77
6.9	Lösungen	78
7	Reihen	83
7.1	Motivation	83
7.2	Grundlegendes zu Reihen	84
7.3	Eigenschaften von Reihen	86
7.4	Konvergenzkriterien	86
7.4.1	Majorantenkriterium	88
7.4.2	Wurzelkriterium	89
7.4.3	Quotientenkriterium	89
7.4.4	Leibniz-Kriterium	90
7.5	Aufgaben	91
7.6	Lösungen	91
8	Stetigkeit	95
8.1	Motivation	95
8.2	Grundlagen zur Stetigkeit	96
8.3	Zusammensetzung stetiger Funktionen	99
8.4	Der Zwischenwertsatz	100
8.5	Supremum, Infimum, Maximum und Minimum	101
8.6	Maximum und Minimum für stetige Funktionen	102
8.7	Aufgaben	103

8.8	Lösungen	104
9	Differenziation	107
9.1	Motivation	107
9.2	Grundlagen zur Differenziation	108
9.3	Rechenregeln für Ableitungen	110
9.4	Der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus	113
9.5	Höhere Ableitungen	115
9.6	Ausflug: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion	116
9.6.1	Schwingung eines Pendels	116
9.6.2	Eigenschaften von Sinus und Kosinus	117
9.6.3	Exponentialfunktion	118
9.7	Die Regel von l'Hospital	118
9.8	Aufgaben	120
9.9	Lösungen	121
10	Potenzreihen	127
10.1	Motivation	127
10.2	Grundlegendes zu Potenzreihen	127
10.3	Aufgaben	130
10.4	Lösungen	131
11	Taylorpolynome, Taylorreihen und Extremwerte	135
11.1	Motivation	135
11.2	Taylorpolynom und Taylorreihe	136
11.2.1	Das Taylorpolynom	136
11.2.2	Die Taylorreihe	138
11.2.3	Fehlerabschätzung	142
11.3	Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen	144
11.3.1	Zur Berechnung lokaler Extrema	144
11.4	Aufgaben	147
11.5	Lösungen	147
12	Integration	151
12.1	Motivation	151
12.2	Grundlagen zur Integration	152
12.3	Der Hauptsatz	155
12.4	Wichtige Regeln zur Integration	157
12.4.1	Substitutionsregel	157
12.4.2	Partielle Integration	159
12.4.3	Integration rationaler Funktionen	160
12.5	Das uneigentliche Integral	162
12.5.1	Integration unbeschränkter Funktionen	164
12.5.2	Unbeschränkte Integrationsgrenzen	164
12.6	Aufgaben	168
12.7	Lösungen	169

13 Ausblick: Fourierreihen	177
13.1 Motivation	177
13.2 Grundlagen zu Fourierreihen	178
13.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihe	181
Lineare Algebra	185
14 Worum geht es in der Linearen Algebra?	187
15 Vektorräume, lineare Unabhängigkeit	191
15.1 Motivation	191
15.2 Vektorräume	192
15.3 Der Vektorraum der reellen Zahlen	194
15.4 Der Vektorraum reellwertiger Funktionen auf \mathbb{R}	195
15.5 Linearkombinationen	196
15.6 Aufgaben	201
15.7 Lösungen	202
16 Lineare Abbildungen und Matrizen	207
16.1 Motivation	207
16.2 Grundlagen zu linearen Abbildungen	207
16.3 Kern und Bild	209
16.4 Grundlegendes zu Matrizen	211
16.5 Rechnen mit Matrizen	213
16.5.1 Multiplikation von Matrizen	213
16.5.2 Vektorraumstruktur für Matrizen	215
16.6 Besondere Matrizen	216
16.7 Aufgaben	219
16.8 Lösungen	220
17 Lineare Gleichungssysteme	225
17.1 Motivation und elementare Anwendungen	225
17.2 Grundlagen	227
17.3 Gauß-Algorithmus	228
17.3.1 Abweichungen vom Idealfall	230
17.4 Die Struktur der Lösungsmenge	231
17.5 Zum Invertieren von Matrizen	234
17.6 Aufgaben	235
17.7 Lösungen	235
18 Determinanten	241
18.1 Motivation	241
18.2 Definition und Berechnung	242
18.2.1 Berechnung für (2×2) -Matrizen	244
18.2.2 Berechnung für (3×3) -Matrizen	244

18.2.3	Dreiecksmatrizen	244
18.3	Geometrische Interpretation	245
18.3.1	Determinante als Volumenform	245
18.3.2	Determinante und Orientierung	246
18.3.3	Determinante und lineare Unabhängigkeit	247
18.4	Rechenregeln für die Determinante	248
18.5	Das Kreuzprodukt	249
18.6	Aufgaben	250
18.7	Lösungen	251
19	Norm und Skalarprodukt	257
19.1	Motivation	257
19.2	Die Norm	257
19.3	Das Skalarprodukt	260
19.4	Orthonormalisierung nach Schmidt	262
19.4.1	Das Verfahren	265
19.5	Orthogonale Matrizen	266
19.6	Aufgaben	267
19.7	Lösungen	269
20	Basiswechsel und darstellende Matrizen	273
20.1	Motivation	273
20.2	Koordinatenabbildungen und Koordinatenvektoren	274
20.2.1	Das Geschehen im Diagramm	275
20.3	Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen	276
20.4	Matrixtransformation bei einem Basiswechsel	278
20.5	Aufgaben	280
20.6	Lösungen	281
21	Eigenwerte und Eigenvektoren	287
21.1	Motivation	287
21.2	Grundlagen	287
21.3	Berechnung der Eigenwerte	290
21.4	Berechnung der Eigenvektoren	291
21.5	Vielfachheiten	291
21.6	Hauptvektoren	293
21.7	Diagonalisierbarkeit	295
21.7.1	Diagonalisierung am Beispiel	298
21.8	Aufgaben	299
21.9	Lösungen	300
22	Differenzialgleichungen	307
22.1	Motivation	307
22.2	Grundlagen	308
22.3	Umschreiben in ein System am Beispiel	309
22.4	Einige Fragestellungen und erste Antworten	311

22.5 Lösen durch Integration	312
22.6 Standardlösungsansatz I	313
22.7 Standardlösungsansatz II	315
22.8 Finden einer partikulären Lösung	316
22.9 Anfangswertprobleme	318
22.10 Wronski-Test	319
22.11 Beispiel für nicht-lineare Differenzialgleichungen	321
22.12 Aufgaben	322
22.13 Lösungen	323
Klausuraufgaben	329
23 Analysis	331
23.1 Aufgaben	331
23.2 Lösungen	334
24 Lineare Algebra	343
24.1 Aufgaben	343
24.2 Lösungen	346
Vom Umgang mit Prüfungen	353
Literatur und Schlussbemerkungen	359
Index	361