12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik

Oliver Deiser Caroline Lasser Elmar Vogt
Dirk Werner

12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Autoren
PD Dr. Oliver Deiser
Technische Universität München
TUM School of Education
Schellingstraße 33
80799 München
oliver.deiser@tum.de

Prof. Dr. Caroline Lasser
Zentrum Mathematik - M3
Wissenschaftliches Rechnen
Technische Universität München
85747 Garching bei München
classer@ma.tum.de

Prof. Dr. Elmar Vogt
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 6
14195 Berlin
vogt@math.fu-berlin.de

Prof. Dr. Dirk Werner
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 6
14195 Berlin
werner@math.fu-berlin.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

11 12 13 14 15 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Dr. Meike Barth
Copy Editing: Heike Pressler
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Satz: Autorensatz
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm

ISBN 978-3-8274-2297-2

Vorwort

Das Ziel des vorliegenden Buches ist, wichtige mathematische Begriffsbildungen, Methoden, Ideen und Resultate zu sammeln, anzuordnen und in je etwa zwei Seiten lesbar und informativ darzustellen. Die Darstellung ist informell und sorgt sich nicht – wie bei einer mathematischen Monographie – allzu sehr um systematische und hierarchische Aspekte, will aber die die Mathematik kennzeichnende Genauigkeit nicht preisgeben.

Die Leserinnen und Leser, die wir in erster Linie im Blick haben, sind Studierende der Mathematik, die neben den Vorlesungsskripten und den zugehörigen Lehrbüchern gerne einen Text zur Hand haben möchten, der zwischen Lexikon und Lehrbuch einzuordnen ist und Überblick, Hilfestellung und Orientierung bietet, einen Text, der sich zur Wiederholung zentraler Konzepte der mathematischen Grundvorlesungen ebenso eignet wie zur Gewinnung erster Einblicke in noch unbekannte Teilgebiete der Mathematik.

Was das Buch nicht kann und will, ist einen vollständigen Katalog der Schlüsselkonzepte der Mathematik zu geben. Die Auswahl der Begriffe ist subjektiv, und auch ihre Darstellung ist von unseren wissenschaftlichen Erfahrungen bestimmt, die keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit erheben. Auf der anderen Seite haben wir natürlich versucht, unsere Auswahl am Lernenden zu orientieren, der das gewaltige Wissensgebäude der modernen Mathematik betritt. Was ihm dort fast sicher begegnet, sollte reichlich vorhanden sein, zusammen mit einigen Ausblicken, die ihn auf etwas hinweisen, das ihn vielleicht einmal besonders fesseln und beschäftigen wird.

Das Buch ist in zwölf Kapitel unterteilt und jedes Kapitel in zwölf Unterkapitel, die wir in Querverweisen als Abschnitte bezeichnen. Diese Einteilung dient der Organisation und damit der Lesbarkeit des Buches. Sie soll keineswegs andeuten, dass die Mathematik in zwölf Disziplinen so zerfallen würde wie Gallien in drei Teile. Das Bedürfnis nach Ordnung und Symmetrie ist ein menschliches, und die Leserinnen und Leser sind explizit dazu aufgerufen, Linien nicht als Gräben zu verstehen und sie kritisch zu hinterfragen.

Das 1. Kapitel beschäftigt sich mit der mathematischen Methode und den überall verwendeten sprachlichen Grundbegriffen der Mathematik. In Kapitel 2 wird das Zahlsystem von den natürlichen Zahlen bis hin zu den p-adischen Zahlen behandelt. Die Zahlentheorie, also die Theorie der natürlichen Zahlen, bildet das Thema des 3. Kapitels. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der diskreten Mathematik, wobei die Graphentheorie im Zentrum steht, die der diskreten Mathematik einen flexiblen sprachlichen Rahmen zur Verfügung stellt. Das 5. Kapitel behandelt grundlegende Konzepte der linearen Algebra im Umfeld von Vektoren, linearen Abbildungen und Matrizen. Im algebraischen 6. Kapitel reicht der Bogen von den algebraischen Grundstrukturen bis hin zu einem Ausblick auf die Galois-Theorie. Der Analysis sind die Kapitel 7 und 8 gewidmet; sie zeichnen den langen Weg nach, der von Folgen, Grenzwerten und stetigen Funktionen zum Gaußschen Integralsatz und der Analysis für die komplexen Zahlen führt. Aspekte der Topologie und Geometrie werden in Kapitel 9 betrachtet, und gerade hier wird der Auswahlcharakter der einzelnen Abschnitte augenfällig. Grundgedanken der Numerik – vor allem in Bezug auf die lineare Algebra – werden in Kapitel 10 vorgestellt, und Kapitel 11 wählt aus dem weiten Feld der Stochastik und Wahrscheinlichkeitstheorie einige Grundbegriffe und Ausblicke aus. Das abschließende 12. Kapitel widmet sich der mathematischen Logik, wobei hier Themen der Mengenlehre dominieren, die in der mathematischen Grundausbildung oft angesprochen, aber nicht im Detail ausgeführt werden. Jedes der zwölf Kapitel beginnt mit einem einführenden Vorspann, so dass wir uns an dieser Stelle mit diesem knappen Überblick begnügen können.

Besonders danken möchten wir Herrn Dr. Andreas Rüdinger vom Spektrum-Verlag, der das Projekt initiiert und von den ersten Ideen bis zur Fertigstellung kontinuierlich gestalterisch begleitet hat. Seine kritische Lektüre von Vorabversionen des Texts hat zu zahlreichen Verbesserungen geführt.

Berlin und München, im Oktober 2010

Oliver Deiser, Caroline Lasser, Elmar Vogt, Dirk Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen 1
1.1 Die Mathematik und ihre Sprache 2
1.2 Junktoren 4
1.3 Quantoren 6
1.4 Beweise 7
1.5 Menge und Element 9
1.6 Mengenoperationen 12
1.7 Relationen 14
1.8 Funktionen 16
1.9 Äquivalenzrelationen 19
1.10 Partielle und lineare Ordnungen 21
1.11 Existenz und algorithmische Berechenbarkeit 23
1.12 Strukturen und strukturerhaltende Abbildungen 25

2 Zahlen 29
2.1 Natürliche Zahlen 30
2.2 Ganze und rationale Zahlen 32
2.3 Reelle Zahlen 34
2.4 Komplexe Zahlen 37
2.5 Quaternionen 39
2.6 b-adische Darstellungen 41
2.7 Irrationale Zahlen 43
2.8 Algebraische und transzendente Zahlen 45
2.9 Die Zahlen π und e 47
2.10 Infinitesimale Größen 49
2.11 p-adische Zahlen 51
2.12 Zufallszahlen 53

3 Zahlentheorie 55
3.1 Teilbarkeit 56
3.2 Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik 57
3.3 Kongruenzen 59
3.4 Einfache Primzahltests 61
3.5 Das RSA-Verfahren 64
3.6 Die Verteilung der Primzahlen 66
3.7 Quadratische Reste 69
3.8 Kettenbrüche 72
3.9 Rationale Approximationen algebraischer Zahlen; Liouvillesche Zahlen 74
3.10 Diophantische Gleichungen 77
3.11 Elliptische Kurven 79
3.12 Zahlkörper 80

4 Diskrete Mathematik . . . 85
4.1 Kombinatorisches Zählen . . . 86
4.2 Graphen . . . 88
4.3 Euler-Züge . . . 90
4.4 Hamilton-Kreise und das $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$-Problem . . . 92
4.5 Bäume . . . 94
4.6 Färbungen und der Satz von Ramsey . . . 95
4.7 Bipartite Graphen . . . 97
4.8 Matroide . . . 100
4.9 Netzwerke und Flüsse . . . 102
4.10 Kürzeste Wege . . . 104
4.11 Transitivierung von Relationen . . . 106
4.12 Planare Graphen und Minoren . . . 107

5 Lineare Algebra . . . 111
5.1 Vektorräume . . . 112
5.2 Lineare Unabhängigkeit und Dimension . . . 114
5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . 116
5.4 Lineare Gleichungssysteme . . . 119
5.5 Determinanten . . . 121
5.6 Euklidische und unitäre Vektorräume . . . 123
5.7 Normierte Vektorräume . . . 125
5.8 Orthogonalität . . . 127
5.9 Dualität . . . 129
5.10 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 131
5.11 Diagonalisierung . . . 133
5.12 Singulärwertzerlegung und Jordansche Normalform . . . 135

6 Algebra . . . 137
6.1 Gruppen . . . 138
6.2 Ringe . . . 142
6.3 Körper . . . 143
6.4 Normalteiler und Faktorgruppen . . . 144
6.5 Ideale und Teilbarkeit in Ringen . . . 147
6.6 Endlich erzeugte abelsche Gruppen . . . 149
6.7 Quotientenkörper . . . 152
6.8 Polynome . . . 153
6.9 Körpererweiterungen . . . 156
6.10 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal . . . 157
6.11 Galoistheorie . . . 158
6.12 Lösbarkeit polynomialer Gleichungen durch Radikale . . . 162

7 Elementare Analysis . . . 165
7.1 Folgen und Grenzwerte . . . 166
7.2 Unendliche Reihen und Produkte . . . 168

7.3 Stetige Funktionen . . . 170
7.4 Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen 172
7.5 Differenzierbare Funktionen . . . 174
7.6 Das Riemannsche Integral . . . 176
7.7 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 178
7.8 Vertauschung von Grenzprozessen . . . 180
7.9 Taylorentwicklung und Potenzreihen . . . 182
7.10 Fourierreihen . . . 185
7.11 Fouriertransformation . . . 187
7.12 Kurven im $\mathbb{R}^d$ . . . 189

8 Höhere Analysis . . . 191
8.1 Metrische und normierte Räume . . . 192
8.2 Partielle und totale Differenzierbarkeit . . . 195
8.3 Mittelwertsatz, Taylorformel und lokale Extrema . . . 197
8.4 Der Satz von Picard-Lindelöf . . . 198
8.5 Stabilität von Gleichgewichtspunkten . . . 200
8.6 Das Lebesguesche Maß . . . 202
8.7 Das Lebesguesche Integral . . . 204
8.8 Der Gaußsche Integralsatz . . . 207
8.9 Holomorphe Funktionen . . . 209
8.10 Der Residuensatz . . . 211
8.11 Fixpunktsätze . . . 213
8.12 Der Bairesche Kategoriensatz . . . 215

9 Topologie und Geometrie . . . 217
9.1 Topologische Räume . . . 218
9.2 Stetige Abbildungen . . . 221
9.3 Beschreibung von Topologien . . . 222
9.4 Produkträume und Quotientenräume . . . 224
9.5 Zusammenhang . . . 227
9.6 Trennung . . . 229
9.7 Kompaktheit . . . 231
9.8 Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . 233
9.9 Mannigfaltigkeiten . . . 238
9.10 Homotopie . . . 241
9.11 Homologie . . . 243
9.12 Euklidische und nichteuklidische Geometrie . . . 245

10 Numerik . . . 249
10.1 Die Kondition . . . 250
10.2 Gleitkomma-Arithmetik . . . 252
10.3 Numerische Stabilität . . . 254
10.4 Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . 257
10.5 Die Methode der kleinsten Quadrate . . . 260

10.6 Eigenwertprobleme . . . 262
10.7 Polynominterpolation . . . 264
10.8 Die schnelle Fouriertransformation . . . 266
10.9 Numerische Integration und Summation . . . 268
10.10 Die Gaußschen Quadraturverfahren . . . 270
10.11 Runge-Kutta-Verfahren . . . 272
10.12 Das Newton-Verfahren . . . 274

11 Stochastik . . . 277
11.1 Wahrscheinlichkeitsräume . . . 278
11.2 Zufallsvariable . . . 280
11.3 Erwartungswert und Varianz . . . 283
11.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit . . . 285
11.5 Null-Eins-Gesetze . . . 288
11.6 Das Gesetz der großen Zahl . . . 288
11.7 Der zentrale Grenzwertsatz . . . 290
11.8 Parameterschätzung . . . 293
11.9 Statistische Tests . . . 295
11.10 Markovsche Ketten . . . 297
11.11 Irrfahrten . . . 300
11.12 Die Brownsche Bewegung . . . 301

12 Mengenlehre und Logik . . . 303
12.1 Mächtigkeiten . . . 304
12.2 Das Diagonalverfahren . . . 306
12.3 Die Russell-Antinomie . . . 308
12.4 Die Zermelo-Fraenkel-Axiomatik . . . 310
12.5 Das Auswahlaxiom . . . 312
12.6 Das Zornsche Lemma . . . 314
12.7 Paradoxa der Maßtheorie . . . 315
12.8 Berechenbare Funktionen . . . 317
12.9 Formale Beweise und Modelle . . . 320
12.10 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze . . . 323
12.11 Transfinite Zahlen . . . 325
12.12 Die Kontinuumshypothese . . . 327

Index . . . 329