Herbert Amann
Joachim Escher

Analysis I

Dritte Auflage

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Berlin

Autoren:
Herbert Amann
Institut für Mathematik
Universität Zürich
Winterthurerstr. 190
CH-8057 Zürich
e-mail: herbert.amann@math.unizh.ch

Joachim Escher
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
D-30167 Hannover
e-mail: escher@ifam.uni-hannover.de

Erste Auflage 1998
Zweite Auflage 2002

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-7643-7755-0 Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin

Ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
Satz und Layout mit LaTeX: Gisela Amann, Zürich
Gedruckt auf säurefreiem Papier, hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff. TCF ∞
Printed in Germany
ISBN-10: 3-7643-7755-0
ISBN-13: 978-3-7643-7755-7
e-ISBN 3-7643-7756-9

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Vorwort

Ein Hauptanliegen der Mathematikausbildung ist die Schulung der Fähigkeit, logisch zu denken und komplexe Zusammenhänge zu analysieren und zu verstehen. Eine solche Analyse erfordert das Erkennen und Herausarbeiten möglichst einfacher Grundstrukturen, welche einer Vielzahl äußerlich verschiedener Problemstellungen gemein sind. Dazu bedarf es eines gerüttelten Maßes an Abstraktionsfähigkeit, die es erlaubt, sich auf den wesentlichen Kern zu konzentrieren, ohne sich von aktuellen Einkleidungen und Nebensächlichkeiten ablenken zu lassen.

Erlernen und Einüben solcher Fähigkeiten können natürlich nicht im „luftleeren Raum“ erfolgen. Sie sind an ein sorgfältiges Ausarbeiten von Einzelheiten gebunden. Nur eine stete geistige Auseinandersetzung mit konkreten Fragestellungen und das Ringen um ein tieferes Verständnis, auch von Details, können zum Erfolg führen.

Das vorliegende Werk ist entscheidend vom Streben nach Klarheit, Transparenz und Konzentration auf das Wesentliche geprägt. Es verlangt vom Leser[1] von Anfang an die Bereitschaft, sich mit abstrakten Konzepten auseinanderzusetzen, sowie ein beträchtliches Maß an Mitarbeit und Eigeninitiative. Er wird für seine Mühen durch die Schulung seiner Denkfähigkeit reichlich belohnt. Darüberhinaus werden ihm die Grundlagen für eine tiefergehende Beschäftigung mit der Mathematik und ihren Anwendungen vermittelt.

Dieses Buch ist der erste Band einer dreiteiligen Einführung in die Analysis. Sie ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche die Autoren im Laufe der letzten sechsundzwanzig Jahre an den Universitäten Bochum, Kiel und Zürich, sowie Basel und Kassel abgehalten haben. Da wir hoffen, daß das Werk auch zum Selbststudium und zu Ergänzungen neben Vorlesungen verwendet werde und der Leser daran interessiert sei, eine gute mathematische Allgemeinbildung zu erwerben, haben wir mehr Stoff aufgenommen, als in einer dreisemestrigen Vorlesung behandelt werden kann. Dies geschah einerseits zur Abrundung und um Ausblicke zu geben, andererseits, um schöne und wichtige Anwendungen der entwickelten Theorie aufzuzeigen. Es ist uns ein Anliegen zu demonstrieren, daß die Mathematik nicht nur Eleganz

[1] In diesem Werk verwenden wir im Interesse der deutschen Sprache durchgehend die männliche Form. Dies ist im Sinne einer „Variablen“ zu verstehen, an deren Stelle nach Bedarf und Bezug das weibliche Äquivalent treten kann.

und innere Schönheit besitzt, sondern auch schlagkräftige Methoden zur Lösung konkreter Fragestellungen zur Verfügung stellt.

Die „eigentliche Analysis“ beginnt mit Kapitel II. Im ersten Kapitel haben wir auch Grundbegriffe bereitgestellt, die in der Linearen Algebra entwickelt werden. Daneben sind wir relativ ausführlich auf den Aufbau der Zahlensysteme eingegangen. Dieses Kapitel ist insbesondere für das Selbststudium konzipiert. Es ist bestens geeignet, den Leser in der logisch exakten Deduktion einfacher Sachverhalte zu üben und ihn darin zu schulen, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren und kein unbewiesenes a-priori-Wissen unreflektiert zu übernehmen. Dem erfahrenen Dozenten wird es leichtfallen, eine geeignete Stoffauswahl zu treffen, oder die entsprechenden Grundlagen an späterer Stelle, wenn sie erstmals benötigt werden, zu behandeln.

Wir haben uns bemüht, mit diesem Werk ein solides Fundament zu legen und eine Analysis zu lehren, welche dem Leser später ein tieferes Eindringen in die moderne Mathematik erleichtert. Deshalb haben wir alle Begriffe und Konzepte von Anfang an in der Allgemeinheit dargestellt, in der sie später auch bei einer weitergehenden Beschäftigung mit der Mathematik und ihren Anwendungen gebraucht werden. So muß sich der Student den Stoff nur ein einziges Mal erarbeiten und kann dann, hierauf aufbauend, zu neuen Erkenntnissen fortschreiten.

Wir sehen davon ab, hier eine nähere Beschreibung des Inhaltes der drei Bände zu geben. Hierzu verweisen wir auf die Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln sowie auf das ausführliche Inhaltsverzeichnis. Wir möchten die Aufmerksamkeit jedoch besonders auf die zahlreichen Übungsaufgaben lenken, die wir den einzelnen Paragraphen beigegeben haben. Das Bearbeiten dieser Aufgaben ist eine unabdingbare Voraussetzung für ein vertieftes Verständnis des Stoffes und eine wirksame Selbstkontrolle.

Beim Schreiben dieses ersten Bandes konnten wir von der Hilfe zahlreicher Kollegen und Schüler profitieren, welche uns mit konstruktiver Kritik zur Seite standen und uns halfen, zahlreiche Druckfehler und Unrichtigkeiten zu beseitigen. Besonders danken möchten wir hier Peter Gabriel, Patrick Guidotti, Stephan Maier, Sandro Merino, Frank Weber, Bea Wollenmann, Bruno Scarpellini und, nicht zuletzt, den Hörern der verschiedenen Vorlesungen, welche durch ihre positiven Reaktionen und späteren Erfolge uns in unserer Art, Analysis zu lehren, bestärkten.

Von Peter Gabriel erhielten wir Unterstützung, die weit über das übliche Maß hinausreicht. Er hat in uneigennütziger Weise den Anhang „Einführung in die Schlußlehre“ verfaßt und uns zur Verfügung gestellt. Dafür gebührt ihm unser ganz besonderer Dank.

Wie bei früheren Gelegenheiten auch wurde ein wesentlicher Teil der Arbeit, die zum Gelingen eines solchen Werkes nötig ist, „hinter den Kulissen“ geleistet. Dabei ist von unschätzbarem Wert für uns der große Beitrag unseres „Satzperfektionisten“, der unzählige anstrengende Stunden vor dem Bildschirm und lange hartnäckige Diskussionen grammatikalischer Feinheiten beigesteuert hat. Der

perfekte Satz dieses Buches und die grammatisch richtigen Sätze sind allein sein Verdienst. Unser allerherzlichster Dank gilt ihm.

Herzlich danken möchten wir auch Andreas, der uns stets mit der neuesten TeX-Version[2] versorgte und uns bei Soft- und Hardware-Problemen beratend und helfend zur Seite stand.

Schließlich danken wir Thomas Hintermann für die Anregung, unsere Vorlesungen in dieser Form einer größeren Öffentlichkeit zugänglich zu machen, sowie ihm und dem Birkhäuser Verlag für die gute und angenehme Zusammenarbeit.

Zürich und Kassel, im Juni 1998 H. Amann und J. Escher

Vorwort zur zweiten Auflage

In dieser Neuauflage haben wir Ungenauigkeiten und Fehler ausgemerzt, auf die wir durch aufmerksame Leser hingewiesen wurden. Besonders wertvoll waren uns die zahlreichen Hinweise und Änderungsvorschläge unserer Kollegen H. Crauel und A. Ilchmann. Ihnen allen gilt unser herzlichster Dank.

Zürich und Hannover, im März 2002 H. Amann und J. Escher

Vorwort zur dritten Auflage

Auch in dieser Auflage haben wir weitere Fehler korrigiert, die uns in der Zwischenzeit zur Kenntnis gebracht worden sind. Besonders zu Dank verpflichtet sind wir Gary Brookfield, der uns anläßlich seiner Übersetzung dieses Bandes ins Englische auf Unstimmigkeiten aufmerksam gemacht und einzelne Beweisvereinfachungen vorgeschlagen hat. Wir danken auch Filip Bár, der ausführliche „Anmerkungen und Errata“ zu unseren Bänden geschrieben (http://matheplanet.com) und uns seine Korrekturliste zugesandt hat.

Zürich und Hannover, im März 2006 H. Amann und J. Escher

[2] Für den Text wurde ein LaTeX-file erstellt. Die Abbildungen wurden zusätzlich mittels CorelDRAW! und Maple gestaltet.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel II Konvergenz

Kapitel IV Differentialrechnung in einer Variablen

Kapitel V Funktionenfolgen