

■ Herbert Amann
■ Joachim Escher

Analysis I

Dritte Auflage

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Berlin

Autoren:
Herbert Amann
Institut für Mathematik
Universität Zürich
Winterthurerstr. 190
CH-8057 Zürich
e-mail: herbert.amann@math.unizh.ch

Joachim Escher
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
D-30167 Hannover
e-mail: escher@ifam.uni-hannover.de

Erste Auflage 1998
Zweite Auflage 2002

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

ISBN 3-7643-7755-0 Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechts.

© 2006 Birkhäuser Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz
Ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
Satz und Layout mit \LaTeX : Gisela Amann, Zürich
Gedruckt auf säurefreiem Papier, hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff. TCF ∞
Printed in Germany
ISBN-10: 3-7643-7755-0
ISBN-13: 978-3-7643-7755-7

e-ISBN 3-7643-7756-9

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Vorwort

Ein Hauptanliegen der Mathematikausbildung ist die Schulung der Fähigkeit, logisch zu denken und komplexe Zusammenhänge zu analysieren und zu verstehen. Eine solche Analyse erfordert das Erkennen und Herausarbeiten möglichst einfacher Grundstrukturen, welche einer Vielzahl äußerlich verschiedener Problemstellungen gemein sind. Dazu bedarf es eines gerüttelten Maßes an Abstraktionsfähigkeit, die es erlaubt, sich auf den wesentlichen Kern zu konzentrieren, ohne sich von aktuellen Einkleidungen und Nebensächlichkeiten ablenken zu lassen.

Erlernen und Einüben solcher Fähigkeiten können natürlich nicht im „luftleeren Raum“ erfolgen. Sie sind an ein sorgfältiges Ausarbeiten von Einzelheiten gebunden. Nur eine stete geistige Auseinandersetzung mit konkreten Fragestellungen und das Ringen um ein tieferes Verständnis, auch von Details, können zum Erfolg führen.

Das vorliegende Werk ist entscheidend vom Streben nach Klarheit, Transparenz und Konzentration auf das Wesentliche geprägt. Es verlangt vom Leser¹ von Anfang an die Bereitschaft, sich mit abstrakten Konzepten auseinanderzusetzen, sowie ein beträchtliches Maß an Mitarbeit und Eigeninitiative. Er wird für seine Mühen durch die Schulung seiner Denkfähigkeit reichlich belohnt. Darüberhinaus werden ihm die Grundlagen für eine tiefergehende Beschäftigung mit der Mathematik und ihren Anwendungen vermittelt.

Dieses Buch ist der erste Band einer dreiteiligen Einführung in die Analysis. Sie ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche die Autoren im Laufe der letzten sechsundzwanzig Jahre an den Universitäten Bochum, Kiel und Zürich, sowie Basel und Kassel abgehalten haben. Da wir hoffen, daß das Werk auch zum Selbststudium und zu Ergänzungen neben Vorlesungen verwendet werde und der Leser daran interessiert sei, eine gute mathematische Allgemeinbildung zu erwerben, haben wir mehr Stoff aufgenommen, als in einer dreisemestrigen Vorlesung behandelt werden kann. Dies geschah einerseits zur Abrundung und um Ausblicke zu geben, andererseits, um schöne und wichtige Anwendungen der entwickelten Theorie aufzuzeigen. Es ist uns ein Anliegen zu demonstrieren, daß die Mathematik nicht nur Eleganz

¹In diesem Werk verwenden wir im Interesse der deutschen Sprache durchgehend die männliche Form. Dies ist im Sinne einer „Variablen“ zu verstehen, an deren Stelle nach Bedarf und Bezug das weibliche Äquivalent treten kann.

und innere Schönheit besitzt, sondern auch schlagkräftige Methoden zur Lösung konkreter Fragestellungen zur Verfügung stellt.

Die „eigentliche Analysis“ beginnt mit Kapitel II. Im ersten Kapitel haben wir auch Grundbegriffe bereitgestellt, die in der Linearen Algebra entwickelt werden. Daneben sind wir relativ ausführlich auf den Aufbau der Zahlensysteme eingegangen. Dieses Kapitel ist insbesondere für das Selbststudium konzipiert. Es ist bestens geeignet, den Leser in der logisch exakten Deduktion einfacher Sachverhalte zu üben und ihn darin zu schulen, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren und kein unbewiesenes a-priori-Wissen unreflektiert zu übernehmen. Dem erfahrenen Dozenten wird es leichtfallen, eine geeignete Stoffauswahl zu treffen, oder die entsprechenden Grundlagen an späterer Stelle, wenn sie erstmals benötigt werden, zu behandeln.

Wir haben uns bemüht, mit diesem Werk ein solides Fundament zu legen und eine Analysis zu lehren, welche dem Leser später ein tieferes Eindringen in die moderne Mathematik erleichtert. Deshalb haben wir alle Begriffe und Konzepte von Anfang an in der Allgemeinheit dargestellt, in der sie später auch bei einer weitergehenden Beschäftigung mit der Mathematik und ihren Anwendungen gebraucht werden. So muß sich der Student den Stoff nur ein einziges Mal erarbeiten und kann dann, hierauf aufbauend, zu neuen Erkenntnissen fortschreiten.

Wir sehen davon ab, hier eine nähere Beschreibung des Inhaltes der drei Bände zu geben. Hierzu verweisen wir auf die Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln sowie auf das ausführliche Inhaltsverzeichnis. Wir möchten die Aufmerksamkeit jedoch besonders auf die zahlreichen Übungsaufgaben lenken, die wir den einzelnen Paragraphen beigegeben haben. Das Bearbeiten dieser Aufgaben ist eine unabdingbare Voraussetzung für ein vertieftes Verständnis des Stoffes und eine wirksame Selbstkontrolle.

Beim Schreiben dieses ersten Bandes konnten wir von der Hilfe zahlreicher Kollegen und Schüler profitieren, welche uns mit konstruktiver Kritik zur Seite standen und uns halfen, zahlreiche Druckfehler und Unrichtigkeiten zu beseitigen. Besonders danken möchten wir hier Peter Gabriel, Patrick Guidotti, Stephan Maier, Sandro Merino, Frank Weber, Bea Wollenmann, Bruno Scarpellini und, nicht zuletzt, den Hörern der verschiedenen Vorlesungen, welche durch ihre positiven Reaktionen und späteren Erfolge uns in unserer Art, Analysis zu lehren, bestärkten.

Von Peter Gabriel erhielten wir Unterstützung, die weit über das übliche Maß hinausreicht. Er hat in uneigennütziger Weise den Anhang „Einführung in die Schlußlehre“ verfaßt und uns zur Verfügung gestellt. Dafür gebührt ihm unser ganz besonderer Dank.

Wie bei früheren Gelegenheiten auch wurde ein wesentlicher Teil der Arbeit, die zum Gelingen eines solchen Werkes nötig ist, „hinter den Kulissen“ geleistet. Dabei ist von unschätzbarem Wert für uns der große Beitrag unseres „Satzperfektionisten“, der unzählige anstrengende Stunden vor dem Bildschirm und lange hartnäckige Diskussionen grammatikalischer Feinheiten beige-steuert hat. Der

perfekte Satz dieses Buches und die grammatisch richtigen Sätze sind allein sein Verdienst. Unser allerherzlichster Dank gilt ihm.

Herzlich danken möchten wir auch Andreas, der uns stets mit der neuesten \TeX -Version² versorgte und uns bei Soft- und Hardware-Problemen beratend und helfend zur Seite stand.

Schließlich danken wir Thomas Hintermann für die Anregung, unsere Vorlesungen in dieser Form einer größeren Öffentlichkeit zugänglich zu machen, sowie ihm und dem Birkhäuser Verlag für die gute und angenehme Zusammenarbeit.

Zürich und Kassel, im Juni 1998

H. Amann und J. Escher

Vorwort zur zweiten Auflage

In dieser Neuauflage haben wir Ungenauigkeiten und Fehler ausgemerzt, auf die wir durch aufmerksame Leser hingewiesen wurden. Besonders wertvoll waren uns die zahlreichen Hinweise und Änderungsvorschläge unserer Kollegen H. Crauel und A. Ilchmann. Ihnen allen gilt unser herzlichster Dank.

Zürich und Hannover, im März 2002

H. Amann und J. Escher

Vorwort zur dritten Auflage

Auch in dieser Auflage haben wir weitere Fehler korrigiert, die uns in der Zwischenzeit zur Kenntnis gebracht worden sind. Besonders zu Dank verpflichtet sind wir Gary Brookfield, der uns anlässlich seiner Übersetzung dieses Bandes ins Englische auf Unstimmigkeiten aufmerksam gemacht und einzelne Beweisvereinfachungen vorgeschlagen hat. Wir danken auch Filip Bár, der ausführliche „Anmerkungen und Errata“ zu unseren Bänden geschrieben (<http://matheplanet.com>) und uns seine Korrekturliste zugesandt hat.

Zürich und Hannover, im März 2006

H. Amann und J. Escher

²Für den Text wurde ein \LaTeX -file erstellt. Die Abbildungen wurden zusätzlich mittels CorelDRAW! und Maple gestaltet.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kapitel I Grundlagen	
1 Logische Grundbegriffe	3
2 Mengen	9
Elementare Tatsachen	9
Die Potenzmenge	10
Komplemente, Durchschnitte und Vereinigungen	10
Produkte	11
Mengensysteme	13
3 Abbildungen	16
Einfache Beispiele	17
Die Komposition von Abbildungen	18
Kommutative Diagramme	19
Injektionen, Surjektionen und Bijektionen	20
Umkehrabbildungen	20
Mengenabbildungen	21
4 Relationen und Verknüpfungen	24
Äquivalenzrelationen	24
Ordnungsrelationen	26
Verknüpfungen	28
5 Die natürlichen Zahlen	32
Die Peano-Axiome	32
Rechenregeln	34
Der euklidische Algorithmus	38
Das Induktionsprinzip	39
Rekursive Definitionen	43

6	Abzählbarkeit	50
	Permutationen	51
	Der Mächtigkeitsbegriff	51
	Abzählbare Mengen	52
	Unendliche Produkte	54
7	Gruppen und Homomorphismen	56
	Gruppen	57
	Untergruppen	59
	Restklassen	59
	Homomorphismen	61
	Isomorphismen	63
8	Ringe, Körper und Polynome	67
	Ringe	67
	Der binomische Satz	70
	Multinomialformeln	71
	Körper	73
	Angeordnete Körper	74
	Formale Potenzreihen	77
	Polynome	78
	Polynomiale Funktionen	80
	Division mit Rest	82
	Linearfaktoren	83
	Polynome in mehreren Unbestimmten	84
9	Die rationalen Zahlen	90
	Die ganzen Zahlen	90
	Die rationalen Zahlen	92
	Rationale Nullstellen von Polynomen	94
	Quadratwurzeln	95
10	Die reellen Zahlen	98
	Die Ordnungsvollständigkeit	98
	Die Dedekindsche Konstruktion der reellen Zahlen	99
	Die natürliche Ordnung von \mathbb{R}	101
	Die erweiterte Zahlengerade	102
	Eine Charakterisierung von Supremum und Infimum	102
	Der Satz von Archimedes	103
	Die Dichtheit der rationalen Zahlen in \mathbb{R}	103
	n -te Wurzeln	104
	Die Dichtheit der irrationalen Zahlen in \mathbb{R}	106
	Intervalle	107

11 Die komplexen Zahlen 110

 Eine Konstruktion der komplexen Zahlen 110

 Elementare Eigenschaften 111

 Rechenregeln 114

 Bälle in \mathbb{K} 116

12 Vektorräume, affine Räume und Algebren 119

 Vektorräume 119

 Lineare Abbildungen 120

 Vektorraumbasen 123

 Affine Räume 125

 Affine Abbildungen 128

 Polynominterpolation 129

 Algebren 131

 Differenzenoperatoren und Summenformeln 132

 Newtonsche Interpolationspolynome 133

Kapitel II Konvergenz

1 Konvergenz von Folgen 141

 Folgen 141

 Metrische Räume 142

 Häufungspunkte 145

 Konvergenz 145

 Beschränkte Mengen 147

 Eindeutigkeitsaussagen 148

 Teilfolgen 148

2 Das Rechnen mit Zahlenfolgen 152

 Nullfolgen 152

 Elementare Rechenregeln 152

 Vergleichssätze 155

 Folgen komplexer Zahlen 155

3 Normierte Vektorräume 160

 Normen 160

 Bälle 161

 Beschränkte Mengen 162

 Beispiele 162

 Räume beschränkter Abbildungen 163

 Innenprodukträume 165

 Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung 167

 Euklidische Räume 169

 Äquivalente Normen 170

 Konvergenz in Produkträumen 172

4	Monotone Folgen	175
	Beschränkte monotone Folgen	175
	Einige wichtige Grenzwerte	176
5	Uneigentliche Konvergenz	181
	Die Konvergenz gegen $\pm\infty$	181
	Limes superior und Limes inferior	182
	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	184
6	Vollständigkeit	187
	Cauchyfolgen	187
	Banachräume	188
	Die Cantorsche Konstruktion der reellen Zahlen	190
7	Reihen	195
	Konvergenz von Reihen	195
	Die harmonische und die geometrische Reihe	196
	Rechenregeln	197
	Konvergenzkriterien	197
	Alternierende Reihen	198
	g -al-Entwicklungen	200
	Die Überabzählbarkeit von \mathbb{R}	204
8	Absolute Konvergenz	207
	Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium	208
	Die Exponentialfunktion	211
	Umordnungen von Reihen	211
	Doppelreihen	213
	Cauchyprodukte	216
9	Potenzreihen	222
	Der Konvergenzradius	223
	Rechenregeln	225
	Der Identitätssatz für Potenzreihen	226
 Kapitel III Stetige Funktionen		
1	Stetigkeit	231
	Elementare Eigenschaften und Beispiele	231
	Folgenstetigkeit	236
	Rechenregeln	237
	Einseitige Stetigkeit	240

2	Topologische Grundbegriffe	245
	Offene Mengen	245
	Abgeschlossene Mengen	246
	Die abgeschlossene Hülle	248
	Der offene Kern	250
	Der Rand einer Menge	251
	Die Hausdorffeigenschaft	251
	Beispiele	252
	Eine Charakterisierung stetiger Abbildungen	253
	Stetige Ergänzungen	255
	Relativtopologien	257
	Allgemeine topologische Räume	259
3	Kompaktheit	264
	Die Überdeckungseigenschaft	264
	Eine Charakterisierung kompakter Mengen	265
	Folgenkompaktheit	266
	Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen	267
	Der Satz vom Minimum und Maximum	267
	Totalbeschränktheit	271
	Gleichmäßige Stetigkeit	272
	Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen	273
4	Zusammenhang	277
	Charakterisierung des Zusammenhanges	277
	Zusammenhang in \mathbb{R}	278
	Der allgemeine Zwischenwertsatz	279
	Wegzusammenhang	280
	Zusammenhang in allgemeinen topologischen Räumen	283
5	Funktionen in \mathbb{R}	285
	Der Zwischenwertsatz von Bolzano	285
	Monotone Funktionen	286
	Stetige monotone Funktionen	288
6	Die Exponentialfunktion und Verwandte	291
	Die Eulersche Formel	291
	Die reelle Exponentialfunktion	294
	Der Logarithmus und die allgemeine Potenz	295
	Die Exponentialfunktion auf $i\mathbb{R}$	297
	Die Definition von π und Folgerungen	300
	Tangens und Cotangens	304
	Das Abbildungsverhalten der Exponentialfunktion	305
	Ebene Polarkoordinaten	306

Der komplexe Logarithmus	308
Komplexe Potenzen	309
Eine weitere Darstellung der Exponentialfunktion	310

Kapitel IV Differentialrechnung in einer Variablen

1 Differenzierbarkeit	317
Die Definition	317
Lineare Approximierbarkeit	318
Rechenregeln	320
Kettenregel	321
Umkehrfunktionen	322
Differenzierbare Abbildungen	323
Höhere Ableitungen	323
Einseitige Differenzierbarkeit	329
2 Mittelwertsätze und ihre Anwendungen	333
Extremalstellen	333
Der erste Mittelwertsatz	334
Monotonie und Differenzierbarkeit	335
Konvexität und Differenzierbarkeit	338
Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski	342
Der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen	344
Der zweite Mittelwertsatz	345
Die Regeln von de l'Hospital	346
3 Taylorsche Formeln	352
Landausche Symbole	352
Die Taylorsche Formel	353
Taylorpolynome, Taylorreihe und Restglied	355
Restglieddarstellungen im reellen Fall und Anwendungen	357
Polynomiale Interpolation	362
Differenzenquotienten höherer Ordnung	363
4 Iterationsverfahren	368
Fixpunkte und Kontraktionen	368
Der Banachsche Fixpunktsatz	369
Das Newtonverfahren	373

Kapitel V Funktionenfolgen

1	Gleichmäßige Konvergenz	381
	Punktweise konvergente Folgen	381
	Gleichmäßig konvergente Folgen	382
	Funktionenreihen	384
	Das Weierstraßsche Majorantenkriterium	386
2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen	389
	Stetigkeit	389
	Lokal gleichmäßige Konvergenz	389
	Der Banachraum der beschränkten und stetigen Funktionen	391
	Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen	392
3	Analytische Funktionen	396
	Differenzierbarkeit von Potenzreihen	396
	Analytizität	397
	Stammfunktionen analytischer Funktionen	399
	Die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus	401
	Die Binomialreihe	401
	Der Identitätssatz für analytische Funktionen	406
4	Polynomiale Approximation	410
	Banachalgebren	410
	Dichtheit und Separabilität	411
	Der Satz von Stone und Weierstraß	413
	Trigonometrische Polynome	417
	Periodische Funktionen	419
	Der trigonometrische Approximationssatz	421
	Anhang Einführung in die Schlußlehre	425
	Literaturverzeichnis	431
	Index	433