

# Elementare Logik

Von

**Franz von Kutschera**

Privatdozent für Logik und Grundlagenforschung  
an der Universität München



1967

Springer-Verlag

Wien New York

ISBN-13: 978-3-7091-8175-1      e-ISBN-13: 978-3-7091-8174-4  
DOI: 10.1007/978-3-7091-8174-4

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten**

**Ohne schriftliche Genehmigung des Verlages  
ist es auch nicht gestattet, dieses Buch oder Teile daraus  
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie)  
oder sonstwie zu vervielfältigen**

**© 1967 by Springer-Verlag / Wien**

**Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1967**

**Library of Congress Catalog Card Number 66-29038**

**Titel Nr. 9144**

*Professor*  
*Dr. Wilhelm Britzelmayr*  
*in Dankbarkeit zu eigen*

## Vorwort

In der formalen Logik hat sich seit der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts eine tiefgreifende Entwicklung vollzogen, so daß sich die moderne *mathematische* oder *symbolische* Logik ihren Methoden wie ihrem Inhalt nach wesentlich von der traditionellen Logik unterscheidet. In ihrer modernen Gestalt hat sich die Logik eine Reihe neuer Anwendungsgebiete erschlossen, insbesondere in der mathematischen Grundlagenforschung und in der analytischen Philosophie und Wissenschaftstheorie der Gegenwart und hat so über die Grenzen ihres Fachs hinaus ein weites Interesse gefunden.

An einen weiteren Kreis von logisch Interessierten möchte sich auch diese Einführung in die Grundlehren der modernen Logik wenden. Sie nimmt daher besondere Rücksicht auf die Schwierigkeiten des mathematisch nicht vorgebildeten Lesers im Umgang mit Formalismen und entwickelt die Methode der Formalisierung in aller Ausführlichkeit. Unter diesem didaktischen Gesichtspunkt wird auch nicht so sehr Wert gelegt auf die schnelle Gewinnung von Resultaten, als auf die gründliche Einübung der Methoden, mit denen sie gewonnen werden. Daher werden gelegentlich verschiedene Beweise für das gleiche Resultat angegeben und Semantik wie Beweisbegriff der elementaren Logik werden auf verschiedenen Wegen aufgebaut. Besonderer Wert wird auch auf die semantische Deutung der Formalismen gelegt, die gleichwertig neben der Beweistechnik steht, und auf die Methoden des natürlichen Schließens, die sowohl für die Anwendungen wie auch für die Begründung der Logik wichtig sind. Einfache Übungsaufgaben am Ende der einzelnen Abschnitte sollen dem Leser die Möglichkeit geben, sein Verständnis der Darlegungen zu kontrollieren und zu vertiefen.

Das Hauptziel des Buches ist es, den Leser zu einer gründlichen Beherrschung der elementaren Logik zu führen, die das Fundament aller logischen Theorien bildet und deren Kenntnis zum Studium der meisten nicht-mathematischen Anwendungen der Logik ausreicht. Im ersten Kapitel wird die einfachste logische Theorie, die Aussagenlogik, dargestellt. Am Modellfall dieser Theorie wird durch den Übergang vom

Studium aussagenlogischer Strukturen in der Umgangssprache zu ihrer Symbolisierung und Präzisierung durch Wahrheitsfunktionen und endlich zum Aufbau eines axiomatischen Kalküls die Methode der Formalisierung schrittweise entwickelt. Im zweiten Kapitel wird die Prädikatenlogik der ersten Stufe behandelt, wobei der Ausgang wieder von umgangssprachlichen Strukturen genommen wird. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels geht ausführlich auf die verschiedenen Möglichkeiten der Formalisierung der elementaren Logik unter dem Aspekt des natürlichen Schließens ein. Dieser Abschnitt ist im Inhalt spezieller, in der Darstellung etwas schwieriger als die übrigen Darlegungen und kann beim ersten Durchlesen des Buches ohne Nachteil für die Verständlichkeit des Folgenden überschlagen werden. Das dritte Kapitel stellt die Erweiterungen der Prädikatenlogik durch Hinzunahme der Identität, der Kennzeichnung und der Funktionsterme dar und bildet damit den Abschluß der Behandlung der elementaren Logik. Im vierten und fünften Kapitel werden die Grundzüge stärkerer Logiksysteme entworfen, der Prädikatenlogik zweiter Stufe und der für die mathematischen Anwendungen besonders wichtigen Klassenlogik. Am Beispiel der elementaren Arithmetik wird das Programm des Logizismus, der Begründung der Mathematik aus der Logik erläutert. Das sechste Kapitel endlich enthält, zusammengefaßt unter dem Gesichtspunkt der Entwicklung der formalen Logik, eine Darstellung der aristotelischen Syllogistik, der BOOLEschen Klassenlogik und der FREGESchen Definitionslehre, in der im Hinblick auf die große praktische Bedeutung der Definitionen die wichtigsten Grundsätze des Definierens besprochen werden.

München, im Herbst 1966

FRANZ V. KUTSCHERA

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung .....	I
<b>1 Aussagenlogik .....</b>	<b>12</b>
1.1 Aussagenlogische Strukturen der Umgangssprache .....	13
1.1.1 Sätze .....	13
1.1.2 Satzstrukturen und Schlüsse .....	16
1.2 Theorie der Wahrheitsfunktionen .....	20
1.2.1 Symbolisierung aussagenlogischer Verknüpfungen .....	20
1.2.2 Wahrheitstabellen .....	27
1.2.3 Vollständige Systeme von Wahrheitsfunktionen .....	38
1.2.4 Wahrheitsentwicklungen .....	48
1.2.5 Fundamentale Theoreme der Aussagenlogik .....	54
1.2.6 Metatheoreme zur Aussagenlogik .....	57
1.2.7 Rückblick .....	68
1.3 Eine Axiomatisierung der Aussagenlogik .....	72
1.3.1 Die Syntax der Sprache $\mathfrak{A}$ .....	73
1.3.2 Die Semantik der Sprache $\mathfrak{A}$ .....	76
1.3.3 Der Kalkül $\mathfrak{A}_1$ .....	80
1.3.4 Theoreme und Metatheoreme von $\mathfrak{A}_1$ .....	86
1.3.5 Die Adäquatheit von $\mathfrak{A}_1$ .....	101
1.3.6 Die Grenzen der Aussagenlogik .....	109
<b>2 Prädikatenlogik .....</b>	<b>111</b>
2.1 Prädikatenlogische Strukturen in der Umgangssprache .....	111
2.1.1 Eigennamen und Prädikate .....	111
2.1.2 All- und Existenzsätze .....	115
2.2 Die Sprache der Prädikatenlogik .....	129
2.2.1 Die Syntax der Sprache $\mathfrak{P}$ .....	129
2.2.2 Interpretationen .....	136
2.3 Der Kalkül $\mathfrak{P}_1$ .....	150
2.3.1 Axiome und Deduktionsregeln .....	150
2.3.2 Theoreme und Metatheoreme von $\mathfrak{P}_1$ .....	151
2.3.3 Die Adäquatheit des Kalküls $\mathfrak{P}_1$ .....	162
2.4 Formalisierungen des natürlichen Schließens .....	166
2.4.1 Der Kalkül $\mathfrak{P}_2$ .....	168
2.4.2 Der Kalkül $\mathfrak{P}_3$ .....	195

	Seite
<b>3 Erweiterungen und Anwendungen der Prädikatenlogik</b> .....	238
3.1 Die Identität .....	238
3.2 Kennzeichnungs- und Funktionsterme .....	247
3.3 Elementare Systeme .....	261
<b>4 Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe</b> .....	275
4.1 Die Sprache der Prädikatenlogik der zweiten Stufe.....	277
4.2 Die Unvollständigkeit der Prädikatenlogik der zweiten Stufe .....	283
4.3 Der Vollständigkeitssatz von Henkin .....	286
4.4 Relationsprodukte und Relationsketten .....	289
4.5 Die Kategorizität der Peanoaxiome .....	295
<b>5 Klassenlogik</b> .....	299
5.1 Begriffe und Klassen .....	299
5.2 Die elementare Klassenalgebra .....	307
5.3 Relationen und Funktionen .....	315
5.4 Ein logisches Modell der Peanoaxiome .....	322
5.5 Das Problem der Geschlossenheit des Aufbaus der Logik .....	326
5.6 Die logischen Antinomien .....	331
<b>6 Einige Themen aus der Geschichte der Logik</b> .....	340
6.1 Die aristotelische Syllogistik .....	340
6.2 Die BOOLEsche Klassenlogik .....	349
6.3 FREGES Definitionslehre .....	354
Literaturverzeichnis.....	379
Sachverzeichnis .....	383
Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole .....	386
Verzeichnis der Axiome und Definitionen .....	388
Verzeichnis der Theoreme .....	390