ABHANDLUNGEN UND VORTRÄGE AUS DEM GEBIETE
DER MATHEMATIK, NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK

HEFT 7

DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER MECHANIK

INSBESONDERE STARRER KÖRPER

NEU ENTWICKELT
MIT GRASSMANNS PUNKTRECHNUNG

VON

DR. ALFRED LOTZE
STUDIENDIREKTOR IN STUTTGART

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1922

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B.G. TEUBNER IN LEIPZIG 1922

ISBN 978-3-663-15531-7 ISBN 978-3-663-16103-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16103-5

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug aus einer ausführlicheren noch ungedruckten Einführung in die Mechanik materieller Punktsysteme und starrer Körper mit den Methoden der Graßmannschen Punktrechnung.

Sie ist hervorgegangen aus der Überzeugung, daß die Punktrechnung, welche in natürlichster Weise sämtliche Grundelemente des Raumes gleichmäßig der Rechnung unterwirft und deren Verknüpfungen analytisch unmittelbar durch rechnerische Grundoperationen wiedergibt, auch in der Mechanik eine weitgehende Vereinfachung und Vereinheitlichung der Methoden und eine naturgemäßere Darstellungsweise ermöglichen wird.

Mögen die Ergebnisse dieser Arbeit weitere Kreise der Mathematiker und Physiker von der Richtigkeit dieser Auffassung überzeugen.

Stuttgart, im Frühjahr 1921.

A. Lotze.

Inhalt.

Seite
Literatur . . . IV
Benennungen und Bezeichnungen . . . V
Zerlegungsformeln . . . VI
Einleitung: Kinematik des einzelnen Punkts . . . 1

I. Kinematik des starren Körpers . . . 2
1. Endliche Verrückung eines starren Körpers . . . 2
2. Kinematische Grundgleichung des starren Körpers . . . 4
3. Grundlegende Sätze über Größen 2. Stufe . . . 5
4. Ebene Bewegung. Euler-Savarysche Gleichung . . . 7
5. Beschleunigungszustand des bewegten starren Körpers . . . 10
6. Beschleunigung der Relativbewegung . . . 12

II. Allgemeine Dynamik materieller Punktsysteme . . . 14
1. Die Bewegungsgleichungen . . . 14
2. Momente des Impulses J und der Dyname D . . . 15
3. Invarianten der Bewegung eines „vollständigen" Systems . . . 16
4. Potential. Energiesatz . . . 17
5. Das Zweikörperproblem . . . 18
6. Das Prinzip von d'Alembert. Lagranges Gleichungen 1. Art . . . 20
7. Das Gaußsche Prinzip . . . 21
8. Hamiltons Prinzip . . . 22
9. Lagranges Gleichungen 2. Art . . . 23

III. Dynamik des starren Körpers . . . 25
1. Die dynamische Grundgleichung des freien starren Körpers . . . 25
2. Wucht und Arbeit am starren Körper . . . 26
3. Trägheitsmomente . . . 28
4. Die Impulsschraube J . . . 32
5. Die Kraftschraube oder Dyname D . . . 34
6. Gleichgewichtsbedingung für den starren Körper . . . 35
7. Impulsmomente . . . 37
8. Neue Ableitung der Eulerschen Kreiselgleichungen . . . 38
9. Bewegung des freien Kreisels unter Wirkung einer Einzelkraft durch s 39
10. Lineare Schraubensysteme . . . 41

Literatur.

H. Graßmanns Gesammelte Werke. Bd. I, 1 u. 2; Bd. II, 2. 1894—1902. — Mehmke, Vorlesungen über Punktrechnung I, 1. 1913.[1]) — Encyklopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. IV, 1. 1901/08. — Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl. 1879/80. — Marcolongo, Theoretische Mechanik; deutsch von Timerding. 1911/12. — Schäfer, Cl., Einführung in die theoretische Physik. Bd. I. 1914. — Burali-Forti, Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de Graßmann. Paris 1897. — Hyde, The directional Calculus, based upon the methods of Hermann Graßmann. Boston 1890. — Timerding, Geometrie der Kräfte. 1908. — Jahnke, Vorlesungen über Vektorenrechnung. 1905. — Ball, Theory of screws. 2. Aufl. Cambridge 1900.

1) „Besonders geeignet zur Einführung für mit der Punktrechnung noch nicht vertraute Leser."

Benennungen und Bezeichnungen.

Die „eigentlichen“ geometrischen Größen der Punktrechnung sind in der heute wohl allgemein üblichen Benennung:

der Punkt, der Stab, das Blatt, der Block.

Für die „uneigentlichen“ (∞ fernen) Elemente, in deren Benennung noch keine Einheitlichkeit herrscht, seien die folgenden Namen gewählt:

„Pfeil“ für den freien Vektor, der zugleich einen ∞ fernen Punkt vertritt.

„Schild“ für den freien Bivektor, der zugleich einen ∞ fernen Stab vertritt.

„Spat“ für den Trivektor, der zugleich die ∞ ferne Ebene vertritt.

Für Stab- (und Schild-) Summen führte Hyde den Namen „Schraube“ ein (s. Hyde, Directional Calculus S. 62).

Wir bezeichnen im folgenden stets:

a)	Größen 1. Stufe	(Punkte, Pfeile)	mit	kleinen latein.	Buchstaben
b)	„ 2. „	(Stäbe, Schilde, Schrauben)	„	großen „	„
c)	„ 3. „	(Blätter, Spate)	„	kleinen griech.	„
d)	„ 4. „	(Blöcke, d. h. Skalare)	„	großen „	„

Uneigentliche Größen (Pfeile, Schilde, Spate) werden im Bedarfsfalle durch Überstreichen als solche gekennzeichnet. $\bar{\varpi}$ = Einheitsspat!

e) Zahlgrößen (Vorzahlen, Parameter usw.) mit kleinen deutschen Buchstaben.

f) Graßmannsche Quotienten (extensive Brüche) mit großen deutschen Buchstaben.

g) Lückenausdrücke mit großen deutschen unterstrichenen Buchstaben.

h) Winkel durch $\hat{\alpha}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\delta}$; $\widehat{AB}$, $\widehat{G\epsilon}$, $\widehat{\varphi\psi}$; usw.[1])

i) Die Ergänzung eines Pfeils $\bar{v}$ in der Ebene als Hauptgebiet 2. Stufe (im ebenen Pfeilfeld) durch $\llcorner$. $\llcorner\bar{v}$ ist der Pfeil, in welchem $\bar{v}$ durch positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ übergeht.[2])

k) Die Ergänzung eines Pfeils $\bar{v}$ oder Schilds $\overline{W}$ im Raum als Hauptgebiet 3. Stufe (im räumlichen Pfeilfeld) durch $\perp$. $\perp\bar{v}$ ist ein Schild senkrecht zu $\bar{v}$ von gleichem Zahlwert und solchem Umlaufssinn, daß $\bar{v}\perp\bar{v} = +\mathfrak{v}^2\cdot\bar{\varpi}$. $\perp\overline{W}$ ist ein Pfeil senkrecht $\overline{W}$ von gleichem Zahlwert und solchem Richtungssinn, daß $\overline{W}\perp\overline{W} = +\mathfrak{w}^2\cdot\bar{\varpi}$ (mod $\bar{v} = \mathfrak{v}$; mod $\overline{W} = \mathfrak{w}$).[3])

l) Die Ergänzung von Stäben in der Ebene als Hauptgebiet 3. Stufe und die Ergänzung von Stäben und Blättern im Raum als Hauptgebiet 4. Stufe durch $|$ (vgl. Mehmke, Vorlesungen § 78 u. § 80).

m) Durch „$\equiv$“ (lies kongruent), daß zwei Größen gleicher Stufe sich nur durch einen Zahlfaktor unterscheiden.

Anmerkung. Zur Vermeidung von Zweideutigkeit wurde an einigen Stellen die regressive Multiplikation durch $\circ$ bezeichnet.

Von einer durchgehenden Bezeichnung äußerer Produkte durch eckige Klammern wurde abgesehen. Die Klammern verschiedener Art haben vielmehr überall die gewohnte Bedeutung.

---

1) Nach E. Müller in Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 49, S. 90/91.
2) s. Graßmann, Werke I,2 § 331, S. 207/08.
3) s. „ „ „ § 335, S. 211/12.

Einige Zerlegungsformeln für 3-faktorige Produkte im Raum als Hauptgebiet 4. Stufe in dualer Gegenüberstellung.

1a) $ab \cdot c = a \cdot bc.$	1b) $\alpha\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta\gamma.$
2a) $ab \cdot C = a \cdot bC.$	2b) $\alpha\beta \cdot C = \alpha \cdot \beta C.$
3a) $ab \cdot \gamma = a\gamma \cdot b - b\gamma \cdot a.$	3b) $\alpha\beta \cdot c = \alpha c \cdot \beta - \beta c \cdot \alpha.$
4a) $AB \cdot c = Ac \cdot B + Bc \cdot A.$	4b) $AB \cdot \gamma = A\gamma \cdot B + B\gamma \cdot \mathrm{A}.$

5) $aB \cdot \gamma = a\gamma \cdot B + B\gamma \cdot a$

oder anders geschrieben: 5) $\gamma B \cdot a = \gamma a \cdot B + Ba \cdot \gamma.$

Gl. (5) ist also sich selbst dual!

Über die Ableitung der Gl. (4) und (5) vgl. etwa:

Graßmann, Ges. Werke I, 2, S. 422/24 [Gl. (10); (18); (22)].