

Abhandlungen und Vorträge

aus dem Gebiete der

Mathematik, Naturwissenschaft und Technik

1. Heft. Die neue Mechanik. Von H. Poincaré. 4. Aufl. M. 4.80

Die kleine Schrift behandelt die durch Einführung der relativistischen Anschauung bedingte grundlegende Umwandlung der physikalischen Begriffe Kraft und Masse und beleuchtet die daraus sich ergebenden Folgerungen nach vielen Seiten hin, insbesondere für astronomische Fragen. Die ungemein klare, alle Grundgedanken scharf hervorhebende Darstellung ermöglicht auch dem Fernerstehenden ein leichtes Eindringen in den so schwierigen Stoff.

2. Heft. Physikalisches über Raum und Zeit. Von Prof. Dr. E. Cohn. 4. Auflage. Geh. M. 4.80

In gemeinverständlicher Weise wird dargelegt, welche wissenschaftlichen Erfahrungen zur Aufstellung der Relativitätstheorie geführt haben, und welche Bedeutung dieses neue Prinzip für unsere physikalische Auffassung von Raum und Zeit hat. Die vorliegende Schrift ist ständig bemüht, scharf hervortreten zu lassen, was beobachtbare Tatsache, was willkürliche Festsetzung und was notwendige Folgerung ist.

3. Heft. Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. Von Prof. Dr. A. Brill. Mit 6 Figuren. 4. Auflage. M. 8.40

„Die große Reichhaltigkeit des Inhalts, die fesselnde Art des Vortrages, die Behandlung auch der mehr philosophischen Seite der Probleme machen das Buch für jeden wichtig und wertvoll, der die Folgerungen und Fortschritte der Relativitätstheorie kennen lernen will.“
(Sokrates.)

4. Heft. Der Hohennersche Präzisionsdistanzmesser und seine Verbindung mit einem Theodolit (D. R. P. Nr. 277000). Einrichtung und Gebrauch des Instrumentes für die verschiedenen Zwecke der Tachymetrie; mit Zahlenbeispielen sowie Genauigkeitsversuchen. Von Prof. Dr.-Ing. H. Hohenner. Mit 7 Abbildungen im Text und 1 Tafel. Geh. M. 9.60

Erörtert die theoretischen Grundlagen dieses neuen optischen Entfernungsmessers, seine Wirkungsweise und seine Vorzüge gegenüber den bisherigen Instrumenten sowie seine vielseitige Verwendbarkeit bei größtmöglicher Genauigkeit.

5. Heft. Raum, Zeit und Relativitätstheorie. Gemeinverständl. Vorträge von Prof. Dr. L. Schlesinger. Mit 2 Taf. u. 5 Fig. M. 8.40

Die Abhandlung, aus einem Vortrag hervorgegangen, der sich an Gebildete aller Stände wendet, behandelt die allgemeine und spezielle Relativitätstheorie. Sie setzt nur ein Mindestmaß an mathematischen Kenntnissen voraus und bedient sich vorwiegend graphischer Methoden.

6. Heft. Der Kreiselkompaß. Von Dr. K. Hochmuth. Mit 20 Fig. im Text. M. 12.—

Die Schrift gibt eine bisher noch nicht vorhandene knappe aber ebenso klare Darstellung der Grundprinzipien der Theorie wie der Konstruktion des Apparates.

8. Heft. Naturwissenschaft und Technik der Gegenwart. Von Prof. Dr. R. von Mises. [U. d. Pr. 21.]

In fesselnder Darstellung führt der bekannte Gelehrte weiteren Kreisen der Gebildeten die große Bedeutung vor Augen, die den neuesten naturwissenschaftlichen Forschungen innerhalb unseres gesamten geistigen Lebens zukommt, und zeigt, in welchem Verhältnis diese zu den sich überstürzenden technischen Fortschritten stehen. Dabei werden vor allem auch die Grundgedanken der Relativitätstheorie und der modernen Atomistik gemeinverständlich dargelegt.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

ABHANDLUNGEN UND VORTRÄGE AUS DEM GEBIETE
DER MATHEMATIK, NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK

HEFT 7

**DIE GRUNDGLEICHUNGEN
DER MECHANIK
INSBESONDERE STARRER KÖRPER**

NEU ENTWICKELT
MIT GRASSMANN'S PUNKTRECHNUNG

VON

DR. ALFRED LOTZE

STUDIENDIREKTOR IN STUTT GART



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1922

**SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA:
© SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN 1922
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B.G. TEUBNER IN LEIPZIG 1922**

ISBN 978-3-663-15531-7

ISBN 978-3-663-16103-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-16103-5

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug aus einer ausführlicheren noch ungedruckten Einführung in die Mechanik materieller Punktsysteme und starrer Körper mit den Methoden der Graßmannschen Punktrechnung.

Sie ist hervorgegangen aus der Überzeugung, daß die Punktrechnung, welche in natürlichster Weise sämtliche Grundelemente des Raumes gleichmäßig der Rechnung unterwirft und deren Verknüpfungen analytisch unmittelbar durch rechnerische Grundoperationen wiedergibt, auch in der Mechanik eine weitgehende Vereinfachung und Vereinheitlichung der Methoden und eine naturgemäßere Darstellungsweise ermöglichen wird.

Mögen die Ergebnisse dieser Arbeit weitere Kreise der Mathematiker und Physiker von der Richtigkeit dieser Auffassung überzeugen.

Stuttgart, im Frühjahr 1921.

A. Lotze.

Inhalt.

	Seite
Literatur	IV
Benennungen und Bezeichnungen	V
Zerlegungsformeln	VI
Einleitung: Kinematik des einzelnen Punkts	1
I. Kinematik des starren Körpers	2
1. Endliche Verrückung eines starren Körpers.	2
2. Kinematische Grundgleichung des starren Körpers	4
3. Grundlegende Sätze über Größen 2. Stufe	5
4. Ebene Bewegung. Euler-Savarysche Gleichung	7
5. Beschleunigungszustand des bewegten starren Körpers	10
6. Beschleunigung der Relativbewegung	12
II. Allgemeine Dynamik materieller Punktsysteme	14
1. Die Bewegungsgleichungen	14
2. Momente des Impulses J und der Dyname D	15
3. Invarianten der Bewegung eines „vollständigen“ Systems	16
4. Potential. Energiesatz.	17
5. Das Zweikörperproblem	18
6. Das Prinzip von d'Alembert. Lagranges Gleichungen 1. Art	20
7. Das Gaußsche Prinzip.	21
8. Hamiltons Prinzip	22
9. Lagranges Gleichungen 2. Art	23
III. Dynamik des starren Körpers	25
1. Die dynamische Grundgleichung des freien starren Körpers	25
2. Wucht und Arbeit am starren Körper	26
3. Trägheitsmomente	28
4. Die Impulsschraube J	32
5. Die Kraftschraube oder Dyname D	34
6. Gleichgewichtsbedingung für den starren Körper	35
7. Impulsmomente	37
8. Neue Ableitung der Eulerschen Kreiselgleichungen	38
9. Bewegung des freien Kreisels unter Wirkung einer Einzelkraft durch s	39
10. Lineare Schraubensysteme	41

Literatur.

H. Graßmanns Gesammelte Werke. Bd. I, 1 u. 2; Bd. II, 2. 1894—1902. — Mehmkke, Vorlesungen über Punktrechnung¹⁾, I. 1913.) — Encyclopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. IV, 1. 1901/08. — Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl. 1879/80. — Marcolongo, Theoretische Mechanik; deutsch von Timerding. 1911/12. — Schäfer, Cl., Einführung in die theoretische Physik. Bd. I. 1914. — Burali-Forti, Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de Graßmann. Paris 1897. — Hyde, The Directional Calculus, based upon the methods of Hermann Graßmann. Boston 1890. — Timerding, Geometrie der Kräfte. 1908. — Jahnke, Vorlesungen über Vektorenrechnung. 1905. — Ball, Theory of screws. 2. Aufl. Cambridge 1900.

1) „Besonders geeignet zur Einführung für mit der Punktrechnung noch nicht vertraute Leser.“

Benennungen und Bezeichnungen.

Die „eigentlichen“ geometrischen Größen der Punktrechnung sind in der heute wohl allgemein üblichen Benennung:

der Punkt, der Stab, das Blatt, der Block.

Für die „uneigentlichen“ (∞ fernen) Elemente, in deren Benennung noch keine Einheitlichkeit herrscht, seien die folgenden Namen gewählt:

„Pfeil“ für den freien Vektor, der zugleich einen ∞ fernen Punkt vertritt.

„Schild“ für den freien Bivektor, der zugleich einen ∞ fernen Stab vertritt.

„Spate“ für den Trivektor, der zugleich die ∞ ferne Ebene vertritt.

Für Stab- (und Schild-) Summen führte Hyde den Namen „Schraube“ ein (s. Hyde, Directional Calculus S. 62).

Wir bezeichnen im folgenden stets:

- | | | |
|----|------------------------------------|--------------------------------|
| a) | Größen 1. Stufe (Punkte, Pfeile) | mit kleinen latein. Buchstaben |
| b) | „ 2. „ (Stäbe, Schilde, Schrauben) | „ großen „ „ |
| c) | „ 3. „ (Blätter, Spate) | „ kleinen griech. „ |
| d) | „ 4. „ (Blöcke, d. h. Skalare) | „ großen „ „ |

Uneigentliche Größen (Pfeile, Schilde, Spate) werden im Bedarfsfalle durch Überstreichen als solche gekennzeichnet. $\bar{\omega}$ = Einheitsspat!

e) Zahlgrößen (Vorzahlen, Parameter usw.) mit kleinen deutschen Buchstaben.

f) Graßmannsche Quotienten (extensive Brüche) mit großen deutschen Buchstaben.

g) Lückenausdrücke mit großen deutschen unterstrichenen Buchstaben.

h) Winkel durch $\hat{\alpha}, \hat{\phi}, \hat{\delta}; \hat{A}\hat{B}, \hat{G}\hat{e}, \hat{\phi}\hat{\psi}$; usw.¹⁾

i) Die Ergänzung eines Pfeils \bar{v} in der Ebene als Hauptgebiet 2. Stufe (im ebenen Pfeilfeld) durch \perp . $\perp \bar{v}$ ist der Pfeil, in welchem \bar{v} durch positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ übergeht.²⁾

k) Die Ergänzung eines Pfeils \bar{v} oder Schilds \bar{W} im Raum als Hauptgebiet 3. Stufe (im räumlichen Pfeilfeld) durch \perp . $\perp \bar{v}$ ist ein Schild senkrecht zu \bar{v} von gleichem Zahlwert und solchem Umlaufssinn, daß $\bar{v} \perp \bar{v} = +v^2 \cdot \bar{\omega}$. $\perp \bar{W}$ ist ein Pfeil senkrecht \bar{W} von gleichem Zahlwert und solchem Richtungssinn, daß $\bar{W} \perp \bar{W} = +w^2 \cdot \bar{\omega} \pmod{\bar{v} = v; \pmod{\bar{W} = w}$.³⁾

l) Die Ergänzung von Stäben in der Ebene als Hauptgebiet 3. Stufe und die Ergänzung von Stäben und Blättern im Raum als Hauptgebiet 4. Stufe durch \perp (vgl. Mehmkke, Vorlesungen § 78 u. § 80).

m) Durch „ \equiv “ (lies kongruent), daß zwei Größen gleicher Stufe sich nur durch einen Zahlfaktor unterscheiden.

Anmerkung. Zur Vermeidung von Zweideutigkeit wurde an einigen Stellen die regressive Multiplikation durch \circ bezeichnet.

Von einer durchgehenden Bezeichnung äußerer Produkte durch eckige Klammern wurde abgesehen. Die Klammern verschiedener Art haben vielmehr überall die gewohnte Bedeutung.

1) Nach E. Müller in Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 49, S. 90/91.

2) s. Graßmann, Werke I,2 § 331, S. 207/08.

3) s. „ „ „ § 335, S. 211/12.

**Einige Zerlegungsformeln
für 3-faktorige Produkte im Raum als Hauptgebiet 4. Stufe
in dualer Gegenüberstellung.**

$$\begin{array}{l|l}
 1a) \ a b \cdot c = a \cdot b c. & 1b) \ \alpha \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta \gamma. \\
 2a) \ a b \cdot C = a \cdot b C. & 2b) \ \alpha \beta \cdot C = \alpha \cdot \beta C. \\
 3a) \ a b \cdot \gamma = a \gamma \cdot b - b \gamma \cdot a. & 3b) \ \alpha \beta \cdot c = \alpha c \cdot \beta - \beta c \cdot \alpha. \\
 4a) \ AB \cdot c = Ac \cdot B + Bc \cdot A. & 4b) \ AB \cdot \gamma = A \gamma \cdot B + B \gamma \cdot A.
 \end{array}$$

$$5) \ a B \cdot \gamma = a \gamma \cdot B + B \gamma \cdot a$$

oder anders geschrieben: 5) $\gamma B \cdot a = \gamma a \cdot B + B a \cdot \gamma$.

Gl. (5) ist also sich selbst dual!

Über die Ableitung der Gl. (4) und (5) vgl. etwa:

Graßmann, Ges. Werke I, 2, S. 422/24 [Gl. (10); (18); (22)].