

# DIMENSIONSTHEORIE

VON

**KARL MENGER**

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN



1928

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ISBN 978-3-663-15484-6

ISBN 978-3-663-16056-4 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-16056-4

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1928

Ursprünglich erschienen bei B.G. Teubner in Leipzig 1928

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1928

**ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN**

# Inhaltsverzeichnis.

|  | Seite |
|--|-------|
| <b>I. Einführung in die mengentheoretische Geometrie</b> . . . . .                   | 1     |
| 1. Die mengentheoretische Epoche der Geometrie . . . . .                             | 1     |
| 2. Das Operieren mit beliebigen Teilmengen von Räumen . . . . .                      | 5     |
| 3. Die Zahlengerade und die Cartesischen Räume . . . . .                             | 8     |
| 4. Der allgemeine Raumbegriff . . . . .  | 15    |
| 5. Die Abgeschlossenheitseigenschaften von Mengen . . . . .                          | 24    |
| 6. Die Begrenzungen offener Mengen . . . . .   | 34    |
| 7. Die Überdeckungstheoreme für separable, kompakte und halbkompakte Räume . . . . . | 39    |
| 8. Die Dichtigkeitseigenschaften der Mengen . . . . .                                | 51    |
| 9. Zum Abschluß der einführenden Betrachtungen . . . . .                             | 55    |
| <b>II. Der Dimensionsbegriff</b> . . . . .   | 74    |
| 1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .  | 74    |
| 2. Der Dimensionsbegriff . . . . .   | 77    |
| 3. Einfache Folgerungen . . . . .  | 86    |
| <b>III. Der Summensatz</b> . . . . .   | 92    |
| 1. Verschiedene Formulierungen des Summensatzes . . . . .                            | 92    |
| 2. Beweis des Summensatzes für $n = 0$ . . . . .                                     | 95    |
| 3. Erster Beweis des Summensatzes für beliebiges $n$ . . . . .                       | 102   |
| 4. Zweiter Beweis des Summensatzes für $n > 0$ . . . . .                             | 109   |
| 5. Korollare des Summensatzes . . . . .  | 113   |
| 6. Die rational $n$ -dimensionalen Räume. — Normalbereiche . . . . .                 | 120   |
| <b>IV. Theorie der dimensionellen Raumstruktur</b> . . . . .                         | 126   |
| 1. Die Dimensionsteile . . . . .   | 126   |
| 2. Das erste Fundamentaltheorem . . . . .  | 127   |
| 3. Das zweite Fundamentaltheorem . . . . .   | 135   |
| 4. Über schwach $n$ -dimensionale Räume . . . . .                                    | 139   |
| 5. Ein Korollar über die Dichtigkeitseigenschaften der Dimensionsteile . . . . .     | 149   |
| 6. Das dritte Fundamentaltheorem . . . . .   | 150   |
| 7. Das vierte Fundamentaltheorem . . . . .   | 152   |
| <b>V. Der Zerlegungssatz</b> . . . . .   | 155   |
| 1. Problemstellung . . . . .   | 155   |
| 2. Der letzte Teil des Zerlegungssatzes . . . . .                                    | 158   |
| 3. Erster Beweis des allgemeinen Zerlegungssatzes . . . . .                          | 161   |
| 4. Zweiter Beweis des allgemeinen Zerlegungssatzes . . . . .                         | 170   |
| 5. Die Umkehrung des letzten Teiles des Zerlegungssatzes . . . . .                   | 174   |
| 6. Die Umkehrung des allgemeinen Zerlegungssatzes . . . . .                          | 180   |
| 7. Über die Definition kompakter Räume durch Komplexe . . . . .                      | 182   |
| 8. Ein Additionssatz . . . . .   | 193   |

|  | Seite      |
|--|------------|
| <b>VI. Die Zusammenhangseigenschaften der Räume . . . . .</b>                                | <b>197</b> |
| 1. Der Zusammenhangsbegriff . . . . .  | 197        |
| 2. Die verstreuten Mengen . . . . .  | 202        |
| 3. Eine Kontinuitätseigenschaft der Dimensionsteile kompakter Räume . . . . .                | 209        |
| 4. Über höherstufigen Zusammenhang . . . . .   | 214        |
| <b>VII. Über stetige Abbildungen . . . . .</b>   | <b>222</b> |
| 1. Allgemeine Eigenschaften stetiger Abbildungen . . . . .                                   | 222        |
| 2. Die stetigen Bilder der Strecke . . . . .   | 227        |
| 3. Die dimensionerniedrigenden stetigen Abbildungen . . . . .                                | 234        |
| 4. Die dimensionserhöhenden stetigen Abbildungen . . . . .                                   | 237        |
| 5. Über topologische Abbildungen . . . . .   | 241        |
| <b>VIII. Die Dimensionsverhältnisse in Cartesischen Räumen . . . . .</b>                     | <b>244</b> |
| 1. Problemstellung . . . . .   | 244        |
| 2. Drei Beweise der ersten Hälfte des Satzes von den offenen Mengen des $R_n$ . . . . .      | 245        |
| 3. Zwei Beweise der zweiten Hälfte des Satzes von den offenen Teilmengen des $R_n$ . . . . . | 251        |
| 4. Zwei Beweise des Satzes von den $n$ -dimensionalen Teilmengen des $R_n$ . . . . .         | 258        |
| 5. Korollare . . . . .   | 266        |
| 6. Über die Deformierbarkeit abgeschlossener Mengen in gleichdimensionale Komplexe . . . . . | 271        |
| <b>IX. Endlichdimensionale Räume und Cartesische Räume . . . . .</b>                         | <b>280</b> |
| 1. Über das Verhältnis separabler und kompakter Räume . . . . .                              | 280        |
| 2. Die nulldimensionalen Räume . . . . .   | 285        |
| 3. Der Fundamentalsatz . . . . .   | 287        |
| 4. Der Beweis . . . . .  | 296        |
| <b>X. Zusammenfassungen und Ausblicke . . . . .</b>  | <b>304</b> |
| 1. Die Hauptsätze der Dimensionstheorie . . . . .  | 304        |
| 2. Ungelöste Probleme . . . . .  | 308        |
| Verzeichnis der zitierten Autoren . . . . .  | 319        |