

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann

und

Dr. A. Witting

Direktor der Oberrealschule zu Göttingen

Oberstudienr., Gymnasialpr. i. Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 5.—

Die Sammlung bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/21)

- Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung.** Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)
- Ziffern und Ziffernsysteme.** Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)
- Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen.** Von H. Wieleitner 2. Aufl. (Bd. 7.)
- Einführung in die Infinitesimalrechnung.** Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41.)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung.** V. O. Meißner. 2. Auflage I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)
- Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie.** Von A. Leman. (Bd. 19.)
- Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem.** Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
- Darstellende Geometrie d. Gelände- u. verw. Anwend. d. Method. d. kodiert. Projektionen.** Von R. Rothe 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36.)
- Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben.** Von B. Kerst. (Bd. 26.)
- Einführung in die projektive Geometrie.** Von M. Zacharias. (Bd. 6.)
- Konstruktionen in begrenzter Ebene.** Von P. Zühlke. (Bd. 11.)
- Nichteuklidische Geometrie in der Kugelfläche.** Von W. Dieck. (Bd. 31.)
- Einführung in die Trigonometrie.** Von A. Witting (Bd. 43)
- Einführung i. d. Nomographie.** V. P. Luckey. I. Die Funktionsleiter (28.) II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. (37.)
- Abgekürzte Rechnung nebst einer Einführ. i. d. Rechnung m. Funktionstaf. insb. i. d. Rechnng. mit Logarithmen.** Von A. Witting. (Bd. 42.)
- In Vorbereitung: Doehlemann, Mathem. u. Architektur. Schips, Mathem. u. Biologie. Winkelmann, Der Kreis. Wolff, Feldmessen u. Höhenmessen.**
- Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers.** Von A. Rohrberg. 2. Aufl. (Bd. 23.)
- Die Anfertigung mathemat. Modelle.** (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
- Karte und Krok. Von H. Wolff. (Bd. 27.)**
- Die Grundlagen unserer Zeitrechnung.** Von A. Baruch. (Bd. 29.)
- Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre.** Von P. Rieschell. (24.)
- Mathematik und Materiel.** 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff. (Bd. 20/21.)
- Der Goldene Schnitt.** Von H. E. Timerding. (Bd. 32.)
- Beispiele zur Geschichte der Mathematik.** Von A. Witting und M. Gebhard. (Bd. 15.)
- Mathematiker-Anekdoten.** Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)
- Die Quadraur d. Kreises.** Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)
- Wo steckt der Fehler?** Von W. Lietzmann und V. Trier. 2. Aufl. (Bd. 10.)
- Geheimnisse der Rechenkünstler.** Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
- Riesen und Zwerge im Zahlenreiche.** Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
- Was ist Geld?** Von W. Lietzmann. (Bd. 30.)
- Die Fallgesetze.** Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)
- Ionentheorie.** Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
- Das Relativitätsprinzip.** Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)
- Dreht sich die Erde?** Von W. Brunner. (17.)
- Theorie der Planetenbewegung.** Von P. Meth. 2., umg. Aufl. (Bd. 8.)
- Beobachtung d. Himmels mit einfach. Instrumenten.** Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
- Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie.** Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Preisänderung vorbehalten

Das Bild auf dem Titel stellt Johannes Müller aus Königsberg in Franken, John Regiomontanus genannt, dar. Er lebte vom 6. Juni 1436 bis 6. Juli 1476. Man verdankt ihm eine erhebliche Förderung der Trigonometrie.

**MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE
BIBLIOTHEK**

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

43

EINFÜHRUNG IN DIE TRIGONOMETRIE

**EINE ELEMENTARE DARSTELLUNG
OHNE LOGARITHMEN**

MIT 26 FIGUREN UND ZAHLREICHEN AUFGABEN

VON

PROF. DR. ALEXANDER WITTING
OBERSTUDIENRAT AM GYMNASIUM Z. HEIL. KREUZ ZU DRESDEN



1921

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

INHALT

	Seite
Vorwort	III.
Vorbemerkungen	1
I. DER SINUS	
§ 1. Das gleichschenklige Dreieck	2
§ 2. Das rechtwinklige Dreieck. Der Sinus	4
§ 3. Die Sinustafel	8
§ 4. Einschaltung	9
§ 5. Berechnung des Winkels aus dem Sinus	12
II. ANWENDUNGEN DES SINUS	
§ 6. Das rechtwinklige Dreieck	13
§ 7. Das beliebige Dreieck	17
§ 8. Der Sinus eines stumpfen Winkels	19
§ 9. Der Sinussatz	20
§ 10. Eine Seite und zwei Winkel	21
§ 11. Zwei Seiten und ein Gegenwinkel	23
§ 12. Der Umkreis	26
III. DER KOSINUS	
§ 13. Das rechtwinklige Dreieck	28
§ 14. Die Kosinustafel und deren Verwendung	30
§ 15. Die Beziehung zwischen Sinus und Kosinus eines Winkels	31
§ 16. Das beliebige Dreieck. Der Kosinus stumpfer Winkel	32
§ 17. Der Kosinussatz	34
§ 18. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel	36
§ 19. Die drei Seiten	39
IV. TANGENS UND KOTANGENS	
§ 20. Die Definitionen	40
§ 21. Die Tangententafel	42
§ 22. Anwendungen	44
Anhang: Zwei Tafeln	47

VORBEMERKUNGEN

1. In der Geometrie ist es üblich, eine Strecke außer durch ihre beiden Endpunkte (große lateinische Buchstaben, z. B. AB) mit einem kleinen lateinischen Buchstaben zu bezeichnen, z. B. a . Dieser Buchstabe hat eine doppelte Bedeutung; erstens ist a der Name, die Bezeichnung der Strecke, zweitens aber versteht man nach den Grundregeln der *allgemeinen Arithmetik*¹⁾ unter a auch die Maßzahl der Strecke. Zeichne ich ein Rechteck mit den beiden Seiten a und b , so ist sein Flächeninhalt ab , d. h. wenn die Seiten mit derselben Einheit (z. B. cm) gemessen die Maßzahlen a und b haben, so hat der Flächeninhalt des Rechtecks $a b$ Flächeneinheiten, z. B. Quadratcentimeter = qcm = cm^2 . Das Quadrat mit der Seite a hat die Fläche a^2 usw.
2. Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bezeichnet, die ebenfalls nicht nur die Namen der Winkel, sondern auch ihre z. B. in Grad ausgedrückten Maßzahlen bedeuten.
3. Im Dreieck ist die Summe der drei Winkel gleich zwei rechten Winkeln: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
4. Ein Dreieck kann höchstens einen rechten oder einen stumpfen Winkel haben, mindestens zwei Winkel müssen spitz sein.
5. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden spitzen Winkel gleich einem Rechten, d. h. wenn $\gamma = 90^\circ$, so ist $\alpha + \beta = 90^\circ$. Man nennt zwei Winkel, die sich zu 90° ergänzen, wie hier α und β , *komplementär*.
6. *Supplementär* heißen zwei Winkel, deren Summe ein gestreckter Winkel (180°) ist.
7. Die grundsätzliche Bezeichnung der Ecken, Seiten und Winkel eines Dreiecks ist A, B, C für die Ecken, ihnen gegenüberliegend die Seiten $BC = a, CA = b, AB = c$ und an den Ecken die Winkel $\alpha = \sphericalangle A, \beta = \sphericalangle B, \gamma = \sphericalangle C$. Es sind dann a und α, b und β, c und γ gegenüberliegende Stücke.
8. Um jedes Dreieck ABC läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Radius r heißt. Die Winkel α, β, γ des Dreiecks sind *Umfangswinkel* dieses Kreises über den Sehnen a, b, c .
9. Auf einem Bogen eines Kreises stehen ein Mittelpunktswinkel und unzählig viele Umfangswinkel; diese Umfangswinkel sind alle einander gleich und zwar halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.
10. Ist der Mittelpunktswinkel ein gestreckter Winkel, die zugehörige Sehne demnach ein Durchmesser des Kreises, so ist der Umfangswinkel ein Rechter, oder anders ausgedrückt: der Umfangswinkel im Halbkreis ist ein Rechter.

1) Die *allgemeine Arithmetik* wird häufig fälschlicherweise *Algebra* genannt.

ISBN 978-3-663-15468-6 ISBN 978-3-663-16039-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-16039-7

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA :

COPYRIGHT 1921 BY SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1921.

**ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.**

VORWORT

Im vorliegenden Bändchen sind langjährige Unterrichtserfahrungen, vor allem aber Erfahrungen aus dem Felde mit benutzt worden. Verfasser hat sich während des Krieges davon überzeugt, daß man Trigonometrie vielfach mit ausreichendem praktischem Erfolge ohne Logarithmen verwenden kann und daß dazu zweistellige Tafeln meist genügen, mindestens aber zu *Überschlagsrechnungen* dienen können. Das Bändchen stellt nur sehr geringe Anforderungen an die Vorbildung des Lesers und geht so behutsam und gründlich vor, daß die Kenntnisse eines geweckten Volksschülers genügen dürften. Daher glaubt der Verfasser, daß der hier eingeschlagene Weg zum Selbstunterricht, ferner aber auch für allerhand Fachschulen gangbar sein wird.

Wenn man sich einmal überlegt, wie klein ein Winkel von einem Grad ist, und wenn man sich von den Anforderungen an Genauigkeit, wie sie für einen Geodäten oder Astronomen nötig sind, freimacht, so wird man wohl nicht umhin können, dem Verfasser zuzustimmen. Möchte der Erfolg des Bändchens die Mühe lohnen.

Pfingsten 1921.

A. Witting.

11. Schneidet man die Schenkel des Winkels α mit Scheitel A durch die Parallelen $BC, B'C, B''C'', \dots$ so entstehen die ähnlichen Dreiecke

$$ABC \sim AB'C' \sim AB''C'' \sim \dots,$$

die in den Winkeln übereinstimmen und deren Seiten einander proportional sind:

$$AB : BC : CA = AB' : B'C' : C'A = AB'' : B''C'' : C''A = \dots$$

Auch ist $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A}, \frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''} = \frac{CA}{C''A}$ usw.

12. Im rechtwinkligen Dreieck bestehen zwischen den Katheten a, b , der Hypotenuse c , der Höhe h auf der Hypotenuse und den Hypotenusenabschnitten p, q die Gleichungen

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad a^2 = pc, \quad b^2 = qc; \quad h^2 = pq,$$

die man *Pythagoreischen Satz* ¹⁾, *Kathetensatz* und *Höhensatz* nennt.

13. Im Quadrat mit der Seite a ist die Diagonale $d = a\sqrt{2}$.

14. Im gleichseitigen Dreieck mit der Seite a ist die Höhe $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2} = 1,4142 \dots \approx \frac{17}{12} \left(\text{weniger genau} \approx \frac{7}{5} \right) \\ \sqrt{3} = 1,7321 \dots \approx \frac{26}{15} \left(\dots \dots \dots \approx \frac{7}{4} \right) \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Das Zeichen } \approx \\ \text{bedeutet an-} \\ \text{genähert gleich} \end{array}$$

DAS KLEINE GRIECHISCHE ALPHABET

$\alpha = a$, alpha	$\iota = i$, iōta	$\rho = r$, rho
$\beta = b$, bēta	$\kappa = k$, kappa	$\sigma = s$, sigma
$\gamma = g$, gamma	$\lambda = l$, lambda	$\tau = t$, tau
$\delta = d$, delta	$\mu = m$, my	$\upsilon = y$, ypsilon
$\epsilon = \text{ē}$, ēpsilon	$\nu = n$, ny	$\phi = \text{ph}$, phi
$\zeta = z$, zēta	$\xi = x$, xi	$\chi = \text{ch}$, chi
$\eta = \text{ē}$, ēta	$\omicron = \text{ō}$, ōmikron	$\psi = \text{ps}$, psi
$\theta = \text{th}$, thēta	$\pi = p$, pi	$\omega = \text{ō}$, ōmēga

I. DER SINUS

§ 1. Das gleichschenklige Dreieck. In der Planimetrie lernt man sehr früh als Grundkonstruktion, wie man einen gegebenen Winkel in einem Punkte an eine gegebene Gerade anträgt. Soll der Winkel α (Fig. 1), dessen Scheitel P

1) Wir werden im folgenden meist P. L. für Pythagoreischen Lehrsatz schreiben.