

vieweg studium

Basiswissen

Diese Reihe wendet sich an Studierende der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer. Ihnen – und auch den Schülern und Schülerinnen der Sekundarstufe II – soll die Vorbereitung auf Vorlesungen und Prüfungen erleichtert und gleichzeitig ein Einblick in die Nachbarfächer geboten werden. Die Reihe wendet sich aber auch an den Mathematiker, Naturwissenschaftler und an die Lehrer dieser Fächer.

Zu der Reihe vieweg studium gehören folgende Abteilungen:

Basiswissen, Grundkurs und Aufbaukurs,
Mathematik, Physik, Chemie, Biologie.

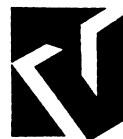
Karl Bosch

Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeits- rechnung

6., durchgesehene Auflage

Mit 82 Beispielen
und 73 Übungsaufgaben mit
vollständigem Lösungsweg

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH



Dr. rer. nat. Karl Bosch ist o. Professor am
Institut für Angewandte Mathematik und Statistik
der Universität Stuttgart-Hohenheim

(Eine Kurzbiographie des Autors steht auf Seite 190)

1.– 5. Tausend März 1976
6.– 9. Tausend März 1979
10.–12. Tausend September 1982
13.–15. Tausend Juni 1984
16.–18. Tausend Januar 1986
19.–21. Tausend August 1987
22.–24. Tausend August 1989
25.–27. Tausend Mai 1991
28.–30. Tausend Juni 1993
31.–32. Tausend April 1995

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1995

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/
Wiesbaden in 1995



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-57225-9

ISBN 978-3-663-14140-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-14140-2

Vorwort zur ersten Auflage 1976

Dieser Band ist aus dem ersten Teil einer zweisemestrigen Vorlesung entstanden, die der Autor wiederholt für Studenten der Fachrichtungen Biologie, Pädagogik, Psychologie und Betriebs- und Wirtschaftswissenschaften an der Technischen Universität Braunschweig gehalten hat. In ihm sollen möglichst anschaulich die wichtigsten Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt werden, die für ein sinnvolles Studium der Statistik unentbehrlich sind.

Da die Statistik bei immer mehr Wissenschaftszweigen benötigt wird, ist der Aufbau und die Darstellung so gewählt, daß ein möglichst breiter Leserkreis angesprochen werden kann. So wird bei den Zufallsvariablen zunächst der „diskrete“ Fall behandelt, weil zu deren Verständnis nur wenig mathematische Vorkenntnisse benötigt werden. Erst anschließend werden „stetige“ Zufallsvariable betrachtet. Häufig werden neue Begriffe über ein Beispiel anschaulich eingeführt, bevor sie allgemein definiert werden. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben, deren Lösungswege im Anhang vollständig angegeben werden, sollen zum besseren Verständnis beitragen.

Die mit * versehenen Stellen erfordern einige mathematische Vorkenntnisse. Sie können jedoch überlesen werden, ohne daß dadurch eine Lücke entsteht. Entsprechend sind etwas schwierige Übungsaufgaben mit einem * gekennzeichnet. Das Ende eines Beweises wird mit dem Zeichen ■, das Ende eines Beispiels mit ♦ gekennzeichnet.

Auf Mengensysteme und auf den Begriff der Meßbarkeit soll in diesem Rahmen nicht eingegangen werden. Dazu sei auf die weiterführende Literatur verwiesen. Als Fortsetzung dieses Bandes ist die Angewandte Mathematische Statistik gedacht. Das Manuskript wurde von Herrn Prof. Dr. E. Henze und Herrn Akad. Direktor Dr. H. Wolff durchgesehen. Beiden bin ich für wertvolle Hinweise und Ratschläge sowie für das Überlassen zahlreicher Übungsaufgaben zu großem Dank verpflichtet. Den Herren Kruse, Möller, Scholz und Stegen danke ich für die Mithilfe beim Korrekturlesen.

Schließlich sei dem Verlag für die vorbildliche Zusammenarbeit gedankt. In einer sehr kurzen Zeit wurde dieser Band in einer ansprechenden Form von ihm herausgebracht. Jedem Leser bin ich für Verbesserungsvorschläge dankbar.

Braunschweig, im Januar 1976

Karl Bosch

Vorwort zur sechsten Auflage

Wegen des erfolgreichen Einsatzes des Buches in mehreren Lehrveranstaltungen wurde bei den Neuauflagen die Grundkonzeption des Buches nicht verändert. Neben der Beseitigung von Fehlern im Text und in den Aufgaben wurde das Literaturverzeichnis aktualisiert. Den Kollegen und Studenten, die mich auf Fehler aufmerksam gemacht haben, danke ich recht herzlich.

Stuttgart-Hohenheim, im Januar 1995

Karl Bosch

IV

Inhalt

1.	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	1
1.1.	Zufällige Ereignisse	1
1.2.	Die relative Häufigkeit	5
1.3.	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff	8
1.4.	Der Begriff der Wahrscheinlichkeit nach Laplace und kombinatorische Methoden zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	12
1.5.	Geometrische Wahrscheinlichkeiten	25
1.6.	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und unabhängige Ereignisse	29
1.7.	Bernoulli-Experimente und klassische Wahrscheinlichkeitsverteilungen	36
1.7.1.	Die Binomialverteilung	37
1.7.2.	Die Polynomverteilung	39
1.7.3.	Die geometrische Verteilung	40
1.8.	Der Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit und die Bayessche Formel	42
1.9.	Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen	45
1.10.	Übungsaufgaben	49
2.	Zufallsvariable	55
2.1.	Definition einer Zufallsvariablen	55
2.2.	Diskrete Zufallsvariable	56
2.2.1.	Definition einer diskreten Zufallsvariablen	56
2.2.2.	Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen	58
2.2.3.	Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen	61
2.2.4.	Varianz und Streuung einer diskreten Zufallsvariablen	69
2.2.5.	Paare diskreter Zufallsvariablen	72
2.2.6.	Summen und Produkte diskreter Zufallsvariablen	74
2.2.7.	Erzeugende Funktionen	80
2.3.	Spezielle diskrete Verteilungen	82
2.3.1.	Die geometrische Verteilung	82
2.3.2.	Die hypergeometrische Verteilung	83
2.3.3.	Die Binomialverteilung	86
2.3.4.	Vergleich der hypergeometrischen- und der Binomialverteilung	90
2.3.5.	Die Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung	92
2.3.6.	Übungsaufgaben über diskrete Zufallsvariable	96
2.4.	Stetige Zufallsvariable	98
2.4.1.	Definition einer stetigen Zufallsvariablen	98
2.4.2.	Erwartungswert und Varianz einer stetigen Zufallsvariablen	104
2.4.3.	Stetige zweidimensionale Zufallsvariable	113
2.4.4.	Summen und Produkte stetiger Zufallsvariablen	120
2.5.	Spezielle stetige Verteilungen	128
2.5.1.	Die gleichmäßige Verteilung	128
2.5.2.	Die $N(0;1)$ -Normalverteilung als Grenzwert standardisierter Binomialverteilungen	129
2.5.3.	Die allgemeine Normalverteilung	134
2.5.4.	Die Exponentialverteilung	138
2.5.5.	Übungsaufgaben über stetige Zufallsvariable	141
2.6.	Allgemeine Zufallsvariable	143
2.6.1.	Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz einer beliebigen Zufallsvariablen	144
2.6.2.	Median und Quantile einer Zufallsvariablen	146
2.6.3.	Übungsaufgaben über allgemeine Zufallsvariable	148

3.	Gesetze der großen Zahlen	149
3.1.	Die Tschebyscheffsche Ungleichung	149
3.2.	Das schwache Gesetz der großen Zahlen	150
3.3.	Der zentrale Grenzwertsatz	151
3.4.	Übungsaufgaben	153
4.	Testverteilungen	154
4.1.	Die Chi-Quadrat-Verteilung	154
4.2.	Die Studentsche t-Verteilung	155
4.3.	Die F-Verteilung von Fisher	156
5.	Ausblick	158
6.	Anhang	159
6.1.	Lösungen der Übungsaufgaben	159
6.2.	Tafel der Verteilungsfunktion Φ der $N(0;1)$ -Verteilung	188
6.3.	Weiterführende Literatur	190
6.4.	Namens- und Sachregister	191