

Wilfried Gawehn

**FINITE-
ELEMENTE-
METHODE**

**Aus dem Programm
Maschinenbau/Informatik**

FINITE-ELEMENTE-METHODE

Lehrbuch

Grundbegriffe der Energiemethoden und
FEM in der linearen Elastostatik
von Wilfried Gawehn

FINITE-ELEMENTE-METHODE

FORTRAN-Programm für die Elemente
Stab, Balken und Scheibendreieck,

von Wilfried Gawehn

Elemente der Mechanik,
Band 2: Elastostatik,
von Theodor Lehmann

Stabtragwerke

Matrizenmethoden der Statik und Dynamik,
Teil 1: Statik,
von Michael Lawo und Georg Thierauf

Einführung in die Methoden der
Numerischen Mathematik
von Wolfgang Böhm und Günther Gose

CAD-Systeme

Grundlagen und Anwendungen der
geometrischen Datenverarbeitung,
von Erwin Lacher

Vieweg

Wilfried Gawehn

FINITE-ELEMENTE-METHODE

Lehrbuch

**Grundbegriffe der Energiemethoden und
FEM in der linearen Elastostatik**

Mit 105 Abbildungen
und 63 Beispielen



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

1985

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1985

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1985

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

Umschlaggestaltung: Peter Neitzke, Köln

ISBN 978-3-528-03354-5 ISBN 978-3-663-14122-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-14122-8

VORWORT

Die Finite-Element-Methode hat sich in den letzten 2 Jahrzehnten zu einem der wichtigsten Näherungsverfahren einer Reihe von Feldproblemen wie der Festigkeitslehre, Strömungslehre, Elektrotechnik usw. entwickelt. Die Auswahl deutschsprachiger Literatur ist momentan relativ klein, während es eine große Auswahl englischsprachiger Lehrbücher gibt. Der Verfasser formuliert hier die FEM innerhalb der linearen Elastizitätstheorie. Mit diesem Buch soll dem Interessierten ein erster Einstieg in die FEM ermöglicht werden. Es ist geeignet sowohl für Studenten der technischen Studiengänge, die sich erstmalig mit der Methode beschäftigen als auch für praktisch tätige Ingenieure, die sich zu ihrer Anwendung in der FEM ein gewisses Hintergrundwissen aneignen wollen.

Das Buch ist aus einer Vorlesung entstanden, die der Verfasser seit 1981 an der FH Osnabrück für Studenten des Fachbereichs Maschinenbau hält. Die FEM als Anwendung auf die Festigkeitslehre kann nur entwickelt werden, wenn die mathematischen Grundlagen sowohl der linearen Elastizitätstheorie als auch der FEM bekannt sind. Deshalb werden einerseits die notwendigen Sachverhalte der Matrizenrechnung, linearer Gleichungssysteme, der Integralsätze und der Variationsrechnung wie andererseits Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie, z.B. der Energiesatz und das Prinzip vom Minimum der totalen potentiellen Energie, ausführlich vorgetragen. Dem Leser stehen damit alle notwendigen Grundbegriffe zur Verfügung. Vorausgesetzt werden nur Grundelemente der Analysis und Vektorrechnung.

Das Verfahren der FEM wird auf die Verschiebungsmethode beschränkt. Hat der Anfänger das Prinzip der FEM verstanden, kann er leicht auf andere Anwendungsbereiche wechseln.

Zur linearen Elastizitätstheorie ist anzumerken, daß es sich um eine zweifach lineare Theorie handelt. Erstens wird angenommen, daß bei der geringen Größe der Verzerrungen ein linearisierter Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen ausreicht. Zweitens werden die physikalischen Eigenschaften des Werkstoffs durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben, das einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen herstellt.

In einem Folgeband wird ein in FORTRAN IV erstelltes FEM-Programm vorgestellt, das die Elemente Stab (2D,3D), Balken (2D,3D) und Scheibendreieck realisiert.

Osnabrück, Sept. 1984

Wilfried Gawehn

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1.1 GRUNDBEGRIFFE DER MATRIZENRECHNUNG	1
1.1.1 Matrizen	1
1.1.2 Rechenoperationen	4
1.1.3 Koordinatentransformationen	13
1.2 LÖSUNGSVERFAHREN FÜR LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	19
1.2.1 Der Gauß'sche Algorithmus	19
1.2.2 Berechnung der inversen Matrix	26
1.2.3 Der verkettete oder LR-Algorithmus	28
1.2.4 LR-Zerlegung für symmetrische Matrizen (Cholesky-Verfahren)	31
2 SPANNUNGEN	34
2.1 Der Spannungsbegriff	34
2.2 Der dreiachsige Spannungszustand	37
2.3 Der ebene Spannungszustand	44
3.1 DIE DEFORMATION DES BELASTETEN KÖRPERS	48
3.1.1 Die Taylorentwicklung	48
3.1.2 Die Bewegung eines Körpers unter Belastung	50
3.2 DIE STOFFGESETZE	55
3.3 DIE GLEICHGEWICHTSBEDINGUNGEN AM BELASTETEN KÖRPER	60
3.4 DIE GLEICHUNGEN DES BELASTETEN DREIDIMENSIONALEN KÖRPERS	62
3.4.1 Der gelagerte Körper	62
3.4.2 Lösungsansätze	65
4.1 INTEGRALSÄTZE	73
4.1.1 Kurvenintegrale	73
4.1.2 Mehrfachintegrale	78
4.2 DER ENERGIESATZ DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE	84
4.2.1 Die innere Energie oder Formänderungsenergie	84
4.2.2 Der Energiesatz	89
4.2.3 Die Einheitslastmethode	92
4.2.4 Der erste Satz von Castiglano	93
4.2.5 Die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix	97

	Seite	
5	DIE MATRIXSTEIFIGKEITSMETHODE	100
5.1	Die Verschiebungsmethode für Stabwerke	101
5.2	Die Verschiebungsmethode für Balkensysteme	109
5.3	Allgemeine Beschreibung der FE-Methode	115
5.4	Ersatzlasten	126
6.1	VARIATIONSMETHODEN	132
6.1.1	Variationsprobleme für Funktionen einer Veränderlichen	132
6.1.2	Variationsprobleme für Funktionen zweier Veränderlicher	139
6.1.3	Variationsmethoden in der linearen Elastizitätstheorie	144
6.2	DIE FORMULIERUNG DER FEM ÜBER DAS PRINZIP VOM MINIMUM DER TOTALEN POTENTIELLEN ENERGIE	151
6.2.1	Die Konstruktion am Beispiel des ebenen Stabelements	151
6.2.2	Ein Verschiebungsansatz für das ebene Scheibendreieck	163
6.2.3	Konstruktion der ES-Matrix und Aufbau der GS-Matrix für den allgemeinen Fall	174
6.2.4	Darstellung von stetig verteilten Volumen- und Flächenlasten	184
6.2.5	Auswahlkriterien für Verschiebungsansätze	187
	VERZEICHNIS DER BEISPIELE	190
	VERWENDETE FORMELZEICHEN	193
	LITERATURVERZEICHNIS	196
	SACHVERZEICHNIS	198