Otto Forster

Analysis 3

vieweg studium

Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von
Prof. Dr. Gerd Fischer

Wolfgang Fischer / Ingo Lieb
Funktionentheorie

Otto Forster
Analysis 3

Ernst Kunz
Einführung in die kommutative Algebra
und algebraische Geometrie

Grundkurs Mathematik

Gerd Fischer
Lineare Algebra

Gerd Fischer
Analytische Geometrie

Otto Forster
Analysis 1

Otto Forster
Analysis 2

Ernst Kunz
Ebene Geometrie

Joseph Maurer
Mathemecum

R. Mennicken / E. Wagenführer
Numerische Mathematik 1

R. Mennicken / E. Wagenführer
Numerische Mathematik 2

Otto Forster

Analysis 3

Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$
mit Anwendungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

vieweg studium Band 52
Aufbaukurs Mathematik

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Forster, Otto:
Analysis/Otto Forster. – Braunschweig;
Wiesbaden: Vieweg
Früher in d. Verl. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg u. Vieweg, Braunschweig. – Teilw. Verl. Vieweg mit Erscheinungsort: Braunschweig

3. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen. – 1981.
(Vieweg-Studium; 52: Aufbaukurs Mathematik)

NE: GT

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1981.

ISBN 978-3-528-07252-0 ISBN 978-3-663-14081-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-14081-8

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Buch stellt den dritten Teil eines Analysis-Kurses für Studenten der Mathematik und Physik dar und umfaßt die Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen.

Die mehrdimensionale Integration ist wahrscheinlich innerhalb der mathematischen Grundvorlesungen das unangenehmste Stoffgebiet. Das hat verschiedene Gründe. Einerseits bleibt die Integrationstheorie unbefriedigend, wenn nicht das Lebesguesche Integral eingeführt wird. Dessen Einführung verbraucht aber meist soviel Zeit, daß am Schluß der Vorlesung der Student nicht in der Lage ist, die Oberfläche einer Kugel auszurechnen, ganz zu schweigen von der Kenntnis der Integralsätze. Will man aber andererseits die Integralsätze in ihrer heutigen eleganten Form darstellen, so muß der ganze Differentialformenkalkül auf Mannigfaltigkeiten eingeführt werden, was wiederum kaum Zeit für die maßtheoretische Seite der Integrationstheorie und für Anwendungen läßt, von denen es vor allem in der klassischen Analysis so viele gibt und die heute immer mehr in Vergessenheit geraten.

Für dieses Dilemma konnte auch im vorliegenden Buch keine Ideal-Lösung gefunden werden. Es wurde aber versucht, zu einem vernünftigen Kompromiß zu kommen. Insbesondere wird der ermüdende systematische Aufbau der Theorie immer wieder durch Paragraphen unterbrochen, in denen Beispielmaterial bereitgestellt oder Anwendungen besprochen werden.

Das Buch beginnt mit der Einführung des Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger im $\mathbb{R}^n$ durch sukzessive Integration. Dieses Integral wird dann als das bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Haarsche Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ charakterisiert. In § 2 wird die Transformationsformel für mehrfache Integrale bewiesen. In § 3 erfolgt die erste Unterbrechung, wo die partielle Integration dazu benützt wird, die Adjunktion von linearen Differentialoperatoren zu definieren, und wo mit Hilfe der Integral-Transformationsformel die Darstellung des Laplace-Operators in krummlinigen Koordinaten abgeleitet wird. In § 4 erfolgt dann die erste Erweiterung des Integralbegriffs auf halbstetige Funktionen. Da die charakteristische Funktion eines Kompaktums von oben halbstetig ist, kann damit bereits das Volumen von kompakten Körpern definiert werden, und in § 5 berechnen wir die Volumina verschiedener Körper, wie Zylinder, Kegel und Kugel. In den §§ 6–10 wird dann das Wichtigste aus der Lebesgueschen Integrationstheorie abgehandelt, unterbrochen von einem Paragraphen über die Integration rotationssymmetrischer Funktionen. Die Konvergenzsätze werden in § 11 auf parameterabhängige Integrale angewandt, und in § 12 erfolgt als Anwendung davon ein kurzer Abriß der Theorie der Fourier-Integrale.

Der nächste Teil des Buches ist dem Gaußschen Integralsatz und seinen Anwendungen gewidmet. Dabei haben wir aus didaktischen Gründen zunächst darauf verzichtet, diesen Satz im Differentialformenkalkül zu formulieren, sondern beweisen ihn in seiner klassischen Form, daß das Integral der Divergenz eines Vektorfelds über ein Gebiet gleich dem Randintegral des Skalarprodukts des Vektorfeldes mit dem Einheits-Normalenfeld ist. In dieser

Form kann er auch gleich in § 16 zur Behandlung der Potentialgleichung benützt werden. Wir leiten dabei insbesondere die Poissonsche Integralformel zur Lösung des Dirichletproblems für die Kugel ab. In § 17 erfolgt eine kurze Einführung in die Theorie der Distributionen, in deren Rahmen wir die Fundamental-Lösungen für die Potentialgleichung, die Helmholtzsche Schwingungsgleichung und die Wärmeleitungsgleichung bestimmen.

Die letzten vier Paragraphen (§§ 18–21) führen schließlich in den Differentialformenkalkül ein, mit deren Hilfe der allgemeine Stokessche Integralsatz bewiesen wird. Dabei haben wir uns, um die Abstraktion in Grenzen zu halten, auf den $\mathbb{R}^n$ und seine Untermannigfaltigkeiten beschränkt. Neben dem Stokesschen Integralsatz werden als Anwendungen u.a. die Cauchysche Integralformel sowie die Bochner-Martinellische Integralformel für holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen bewiesen.

Der Umfang des dargestellten Stoffes ist zuviel für eine einsemestrige Vorlesung. So muß der Dozent eine Auswahl treffen. Als eine Möglichkeit bietet sich an, die Integrationstheorie ohne den Differentialformenkalkül bis zum Gaußschen Integralsatz mit seinen Anwendungen zu bringen (§§ 1–16), wobei noch der eine oder andere nicht zum systematischen Aufbau gehörende Gegenstand weggelassen werden kann (in der Hoffnung, daß der Student ihn aus eigenem Antrieb studiert). Eine andere Möglichkeit ist, auf die Lebesguesche Integrationstheorie zu verzichten und nach den §§ 1–3 direkt zu den Differentialformen (§§ 18, 19) überzugehen. Dann kann unter Benützung von Teilen des § 4 der Integralbegriff für stetige Funktionen auf kompakten Mengen wie im Anhang zu § 20 eingeführt werden. Für den § 20 (Integration von Differentialformen) werden Teile von § 14 benötigt. Nach dem Stokesschen Integralsatz (§ 21) sollte dann noch die Rückübersetzung in die klassische Form des Gaußschen Integralsatzes erfolgen (§§ 14, 15) und möglichst noch seine Anwendung auf die Potentialgleichung (§ 16) besprochen werden.

Ich danke den vielen Kollegen, die mich immer wieder dazu angespornt haben, das Buch endlich fertigzustellen, sowie Frau G. Marschalleck für das Tippen des Manuskripts. Ich hoffe, daß das Buch dazu beitragen kann, diesen wichtigen Teil der Analysis, wie ihn die mehrdimensionale Integration darstellt, für Vorlesungen wieder populärer zu machen.

Otto Forster

Münster, Juli 1981