

Jon M. Smith

**Numerische Probleme
und ihre Lösung
mit Taschenrechnern**

Jon M. Smith

Numerische Probleme und ihre Lösung mit Taschenrechnern



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Smith, Jon M.:

Numerische Probleme und ihre Lösung mit
Taschenrechnern / Jon M. Smith. [Übers.: Hubert
Scholz; Reinhard Scholz].

Einheitssacht.: Scientific analysis on the pocket
calculator (dt.)

ISBN 978-3-528-08380-9 ISBN 978-3-663-14002-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-14002-3

Titel der Originalausgabe:

Jon M. Smith

Scientific Analysis on the Pocket Calculator

Second Edition

Übersetzung: *Hubert Scholz, Reinhard Scholz*

Verlagsredaktion: *Alfred Schubert*

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1981

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1981

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

Satz: Vieweg, Braunschweig

Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich

ISBN 978-3-528-08380-9

Vorwort

Dieses Buch ist für alle geschrieben, die einen modernen elektronischen Taschen- oder Tischrechner besitzen, besonders für Studenten, Ingenieure, Statistiker, Physiker, Chemiker, Systemanalytiker und Lehrer.

Bei Verwendung der richtigen numerischen Methode wird der elektronische Taschenrechner zu einem wesentlichen Rechenhilfsmittel. Es werden „mikronnumerische Methoden“ diskutiert, die dem Leser helfen, den Taschenrechner optimal zu nutzen. Die meisten der aufgeführten Methoden lassen sich auf jedem Taschenrechner ausführen. Sind spezielle Methoden nur für bestimmte Rechnertypen geeignet, wird dies – falls notwendig – besonders hervorgehoben. Tastendruckfolgen werden sowohl für Rechner mit algebraischer als auch für solche mit umgekehrter polnischer Notation dargestellt. Es werden die Tastenfelder und Rechenmöglichkeiten praktisch aller Rechner berücksichtigt, um sicherzustellen, daß die dargestellten numerischen Methoden bei allgemeinen Rechnungen mit dem Taschenrechner universell anwendbar sind.

Jeder Teil des Buches behandelt zusammenhängend und sorgfältig die Methoden und tabellierten Formeln für den Taschenrechner. Der Leser soll mit vielen numerischen Techniken, numerischen Approximationen, Tabellen, nützlichen graphischen Darstellungen und Flußdiagrammen bekanntgemacht werden, um schnelle und genaue Rechnungen auf dem Taschenrechner durchführen zu können.

Ebenso werden numerische Methoden für bestimmte Arten der Datenverarbeitung, wie zum Beispiel die harmonische- und statistische Analyse, besprochen und so dargestellt, daß sie für Ingenieure, Wissenschaftler und Programmierer unmittelbar anwendbar sind.

Dieses Buch geht davon aus, daß der Taschenrechner dem wissenschaftlich Arbeitenden neue Möglichkeiten, Berechnungen durchzuführen, eröffnet. Der Taschenrechner ist offensichtlich für beides, numerische Funktionsauswertung und Datenverarbeitung, nützlich. Zusätzlich ermöglicht er dem Leser, schnell detaillierte und genaue Kenntnisse jeder technischen Disziplin (seiner eigenen oder einer anderen) zu erlangen, indem er die zugehörigen mathematischen Modelle durch Anwenden und eigenes Experimentieren mit dem Taschenrechner „erlernt“. Der Taschenrechner wird also – kurz gesagt – zu einem „Lehrmittel“. Der damit Arbeitende muß nun nicht mehr zuerst ein mathematisches Modell für einen komplexen Prozeß oder ein zu untersuchendes System entwickeln und dann zur Berechnung an den Programmierer abgeben. Statt dessen kann er komplizierte Funktionen zuhause oder im Büro numerisch auswerten (und somit komplexe Probleme analysieren).

Schließlich, überall dort, wo mit dem Taschenrechner gearbeitet wird, werden eigene numerische Methoden zur Berechnung von Problemen in den jeweiligen Wissensgebieten gefunden. So betrachtet, ist der Taschenrechner ein Forschungshilfsmittel, das der Wissenschaftler zur Entwicklung seiner eigenen numerischen Methode für sein spezielles Problem benutzen kann.

Im gesamten Buch werden die den Praktiker interessierenden Dinge mehr hervorgehoben als die den Theoretiker interessierenden. Obwohl es sich um einen mathematischen Stoff handelt, habe ich mich nicht um mehr Kürze und Strenge bemüht, als zur Analyse auf dem Taschenrechner erforderlich ist. Zahlreiche Beispiele jeder Technik bzw. Methode sind gegeben; die jeweilige Durchführung wird bis in alle Einzelheiten diskutiert.

Das Buch besteht aus vier Kapiteln, die in 13 Abschnitte unterteilt sind, wobei sich jeder dieser Abschnitte mit Themen der numerischen Analysis, die für die praktische Arbeit nützlich sind, beschäftigt. Ich habe versucht, eine überzogene allgemeine Darstellung dieser Themen zu vermeiden, da die numerische Analysis ebenso eine Kunst wie eine Wissenschaft ist.

Das Kapitel 1 des Buches stellt das Spektrum der Taschenrechner (einschließlich ihrer Rechenfertigkeiten und Grenzen), die Ingenieuren und Wissenschaftlern zur Verfügung stehen, vor. Besondere Aufmerksamkeit gilt den Recheneigenschaften, die für den wissenschaftlichen Analytiker von Interesse sind. Außerdem werden mathematische Voraussetzungen und Material zur Wiederholung bereitgestellt und bestimmte elementare numerische Methoden, die sich besonders zur Analyse auf dem Taschenrechner eignen, entwickelt. Inhalte aus der Arithmetik bis zur Algebra und der Analysis komplexer Variablen werden angesprochen.

Das Kapitel 2 beschäftigt sich mit numerischen Methoden und Formeln zur numerischen Auswertung höherer mathematischer Funktionen. Ebenso wird die geschachtelte Klammerschreibweise der in der fortgeschrittenen Ingenieurmathematik am meisten benutzten Funktionen behandelt. Das Klammern einer Folge arithmetischer Operationen in geschachtelter Form ist die Grundlage zur Durchführung komplizierter Berechnungen. Um zum Beispiel die Funktion $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ auf einem Vier-Funktionen-Rechner derart auszuwerten, daß zuerst die einzelnen Glieder getrennt berechnet und danach aufsummiert werden, so sind neben „Hilfsspeicherungen“ 77 Tastendrucke erforderlich, wenn eine Dateneingabe 10 Tastendrucke erfordert. Für die Auswertung von $f(x) = a_0 + x(a_1 + a_2 x)$ werden aber nur noch 55 Tastendrucke und keine „Hilfsspeicherungen“ benötigt. Dieses Beispiel zeigt, daß viele komplizierte Formeln, deren Berechnung im allgemeinen Speicherkapazität erfordert, in geklammerter Form geschrieben, keine Speicherplätze benötigen und somit sogar auf dem einfachsten Vier-Funktionen-Rechner bequem berechnet werden können.

Es wird weiter gezeigt, daß die geschachtelte Klammerschreibweise eine effektive Darstellung zur numerischen Berechnung ist, d.h., Funktionsterme, die in geschachtelter Klammerschreibweise angegeben sind, erfordern zu ihrer numerischen Auswertung weniger Operationen als die gleichen Funktionsterme in ihrer einfachsten algebraischen Darstellung. Die geschachtelten Darstellungen lassen sich daher schneller berechnen und bieten weniger Fehlermöglichkeiten als die entsprechenden nicht geschachtelten Darstellungen.

Im Kapitel 2 werden auch rekursive Formeln zur numerischen Berechnung höherer Funktionen betrachtet, wie zum Beispiel die Bessel-Funktionen, die Legendresche-Polynome und noch viele mehr, die auch nicht auf dem anspruchvollsten Rechnern vorgesehen sind. Rekursive Formeln sind einzigartig darin, daß sie sich als unbegrenzte Speichermöglichkeiten von Rechnungen auffassen lassen, die sonst endliche Speicherkapazität benötigen. Diese Formeln verleihen dem Taschenrechner tatsächlich ein unbegrenztes Speicher-

vermögen für Daten. Viele nützliche numerische Methoden der Datenverarbeitung können in rekursiver Form für die Berechnung mit dem Taschenrechner geschrieben werden. Hier zeigt es sich wiederum, daß sogar der einfachste Vier-Funktionen-Rechner anspruchsvolle Berechnungen ermöglicht, ohne ausgedehnte Speicherkapazität zu benötigen. Solche Mittel wie geschachtelte Klammerdarstellung und rekursive Formeln bewirken bei der numerischen Berechnung der meisten komplizierten Funktionen Flexibilität und Genauigkeit, wenn sie gemeinsam mit der Chebyshev-Ökonomisierung und rationalen Polynomapproximationen verwendet werden – sogar auf dem einfachsten Vier-Funktionen-Rechner.

Das Kapitel 3 untersucht Methoden und Formeln zur Durchführung fortschrittlicher Berechnungen. Berücksichtigt sind solche Themen wie die numerische Berechnung bestimmter Integrale und Methoden zur numerischen Behandlung von Datenmengen, das Lösen von Differentialgleichungen, die Simulation linearer Prozesse und die Ausführung statistischer und harmonischer Analysen.

Das Kapitel 4 beschäftigt sich ausführlich mit dem höheren programmierbaren Taschenrechner. Es illustriert überzeugend den Zuwachs an Rechenfertigkeit, den der Rechner liefert. Hier fließt viel persönliche Erfahrung ein, die durch das Lösen zahlreicher Probleme auf den programmierbaren Taschenrechnern unterschiedlichster Fabrikate gewonnen wurde. Die Darstellung ist jedoch allgemein gehalten, in der Erkenntnis, daß noch weitere programmierbare Taschenrechnermodelle entwickelt werden.

Das Buch ist aus elfjährigen Studien numerischer Methoden für Analysen auf digitalen Computern hervorgegangen. Diese Methoden sind drei Jahre lang überarbeitet worden, um sie für Tischrechner und schließlich für Taschenrechner brauchbar zu machen. Viele Methoden konnte der Leser in der zerstreuten Literatur schon nachschlagen, wie zum Beispiel in den Gebrauchsanweisungen und Handbüchern von Tisch- und Taschenrechnern, in Fachzeitschriften und in einigen Lehrbüchern. Ein großer Teil des Materials wurde von mir entwickelt oder stammt von meinen Kollegen in der Industrie. Ich bin besonders meinen Kollegen der Software Research Corporation und McDonell Douglas Corporation zu Dank verpflichtet. Sie ließen mich großzügig an den „Rechenkniffen ihrer Branche“ teilhaben und regten interessante Probleme dieses Buches an. Meine aufrichtige Anerkennung gilt einem großen numerischen Analytiker unserer Zeit, Dr. Richard Hamming von den Bell Laboratories für seine Durchsicht und Verbesserungen des Manuskriptes.

Vielen Dank all jenen von Hewlett-Packard, die das Manuskript durchsahen und kritisch begutachteten, insbesondere dem Chefsingenieur des HP-65, Mr. Chung Tung.

Ich möchte Joseph und Sarah Goldstein danken, die mir den Goldstein-Algorithmus – „one at a time“ – zeigten.

Meiner Frau Laurie gilt besondere Anerkennung dafür, daß sie bereit war, an vier Vormittagen Formulare auszufüllen.

Ebenso bin ich Mrs. Florence Piaget zu Dank verpflichtet, die das Manuskript herstellte und mir bei der Vorbereitung der Publikation behilflich war.

Schließlich gilt mein Dank den Lesern der ersten Auflage, die Änderungen, Korrekturen und Zusätze zur Verbesserung des Buches empfohlen haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in den Aufbau des Taschenrechners	1
1.1	Der Taschenrechner	1
1.1.1	Einführung	1
1.1.2	Mathematische Unterschiede bei Taschenrechnern	2
1.1.3	Befehls- und Daten-Eingabemethoden	4
1.1.4	Speicher	6
1.1.5	Der Befehlssatz	7
1.1.6	Der programmierbare Taschenrechner	10
1.1.7	Die in diesem Buch behandelten Rechner	10
1.1.8	Arithmetische Berechnungen und Notationen	13
1.1.9	Entwicklungstendenzen technisch-wissenschaftlicher Taschenrechner	22
1.1.10	Die zahlenmäßige Auswertung der Funktionen im Tastenfeld eines technisch-wissenschaftlichen Taschenrechners	23
1.1.11	Genauigkeit bei Funktionsberechnungen	33
1.1.12	Simultane Gleichungen	40
1.1.13	Beispiele	43
1.2	Differenzentafeln, Datenanalyse und Berechnung von Funktionen	47
1.2.1	Einführung	47
1.2.2	Differenzentafeln von Daten gleicher Abstände	48
1.2.3	Dateninterpolation	51
1.2.4	Datenextrapolation	57
1.2.5	Lokalisierung und Korrektur von Datenfehlern	60
1.2.6	Fehlende Dateneingänge	62
1.2.7	Lagrangesche Interpolationsformeln	65
1.2.8	Dividierte Differenzentabellen	66
1.2.9	Inverse Interpolation	67
1.2.10	Genauigkeit auf dreizehn Stellen aus zweiziffrigen Tabellen	67
1.2.11	Beispiele	69
2	Numerische Funktionsauswertung mit einem Taschenrechner	70
2.1	Elementare Untersuchungen mit einem Taschenrechner	70
2.1.1	Einführung	70
2.1.2	Numerische Auswertung von Reihen	70
2.1.3	Die Definition des absoluten und des relativen Fehlers	76
2.1.4	Unendliche Reihen	78
2.1.5	Auflösen von Polynomen	83

2.1.6	Sukzessive Approximationsmethoden	87
2.1.7	Elementare transzendente Funktionen	89
2.1.8	Komplexe Variablen und Funktionen	94
2.2	Numerische Auswertung höherer Funktionen	98
2.2.1	Einführung	98
2.2.2	Das Exponentialintegral, der Integralsinus und der Integralkosinus . . .	100
2.2.3	Numerische Auswertung der Gammafunktion und verwandter Funktionen	105
2.2.4	Die Fehlerfunktion und die Fresnelschen Integrale	108
2.2.5	Legendresche Funktionen	110
2.2.6	Bessel-Funktionen	112
2.2.7	Die konfluente hypergeometrische Funktion	115
2.2.8	Chebyshev-, Hermitesche und Laguerresche Polynome	116

3	Lösung von Problemen der höheren Mathematik mit dem Taschenrechner	118
3.1	Fourier-Analyse	118
3.1.1	Einführung	118
3.1.2	Die Fourier-Reihe stetiger Funktionen	118
3.1.3	Die Fourier-Reihe diskreter Funktionen	120
3.1.4	Beziehungen zwischen der Fourier-Reihenentwicklung diskreter und stetiger Funktionen	121
3.1.5	Die numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten	122
3.1.6	Zusammenfassung	125
3.1.7	Beispiele	125
3.2	Numerische Integration	131
3.2.1	Einführung	131
3.2.2	Bestimmte Integration	131
3.2.3	Fehlerabschätzung für die Trapezintegration	133
3.2.4	Die Mittelpunktintegration (Tangententrapezregel)	135
3.2.5	Unbestimmte numerische Integration	139
3.2.6	Die modifizierte Eulersche Formel	142
3.2.7	Startwerte	143
3.2.8	Fehlerabschätzungen und Modifizierung des Praedikator-Korrektor-Verfahrens	144
3.2.9	Andere brauchbare Formeln zur unbestimmten numerischen Integration	145
3.2.10	T -Integration	152
3.3	Die Simulation linearer Systeme	153
3.3.1	Einführung	153
3.3.2	Herleitung von Differenzgleichungen durch Substitution numerischer Integrationsformeln	153

3.3.3	Stabile Differenzgleichungen	161
3.3.4	Die Varianz Ausbreitung	165
3.4	Chebyshevsche und rationale Polynom-Approximation zur analytischen Substitution	168
3.4.1	Einführung	168
3.4.2	Die Definition der Chebyshevschen Polynome	169
3.4.3	Approximation durch rationale Polynome	180
3.4.4	Beispiele	185
3.5	Die Bestimmung der Nullstellen einer Funktion	190
3.5.1	Einführung	190
3.5.2	Die reellen Nullstellen stetiger Funktionen	191
3.5.3	Die modifizierte Regula falsi	194
3.5.4	Das Newtonsche Verfahren	194
3.5.5	Komplexe Nullstellen	196
3.5.6	Eine verbesserte Suchmethode	204
3.5.7	Probleme bei der Bestimmung der Nullstellen von Polynomen	204
3.6	Statistik und Wahrscheinlichkeit	206
3.6.1	Einführung	206
3.6.2	Häufigkeitsverteilungen	206
3.6.3	Lagemaßzahlen	208
3.6.4	Maße für die Dispersion	211
3.6.5	Maß für die Gestalt einer Verteilungskurve	213
3.6.6	Wahrscheinlichkeit	214
3.6.7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	216
3.6.8	Stichprobenerhebung	220
3.6.9	Statistische Schätzmethoden	223
3.6.10	Stichproben mit kleinem Umfang	225
3.6.11	Die Chi-Quadrat-Verteilung	226
3.6.12	Der Chi-Quadrat-Test	227
3.6.13	Statistische Voraussagetechniken	231
3.6.14	Beispiele	236
4	Der programmierbare Taschenrechner	244
4.1	Eine Einführung in die Rechnerprogrammierung	244
4.1.1	Einführung	244
4.1.2	Die Grundbestandteile eines programmierbaren Rechners	244
4.1.3	Programmspeicher	245
4.1.4	Der Tastencode	248
4.1.5	Programmierung eines Rechners	248
4.1.6	Erstellen eines Flußdiagramms	250
4.1.7	Programmverzweigungen	252

4.2	Der programmierbare Taschenrechner	253
4.2.1	Einführung	253
4.2.2	Hardware-Betrachtungen	256
4.2.3	Firmware	257
4.2.4	Software	258
4.2.5	Methoden zur Programmierung des Taschenrechners	259
4.2.6	Auswertungsmethoden auf dem programmierbaren Taschenrechner	265
4.3	Optimierung	268
4.3.1	Einführung	268
4.3.2	Maxima und Minima	268
4.3.3	Parameteroptimierung ohne Nebenbedingungen	271
4.3.4	Parameteroptimierung mit Nebenbedingungen in Form von Gleichungen	271
4.3.5	Die Gradientenmethode	274
4.3.6	Courants Penalty-Funktionsmethode	275
4.3.7	Beispiele	277
Anhang		288
A.1	Einige Rechenkniffe auf dem Taschenrechner	288
A.1.1	Ermittlung von π und e auf einem Vier-Funktionen-Rechner	288
A.1.2	Ermittlung des ganzzahligen Anteils einer Zahl auf einem Rechner ohne wissenschaftliche Notation	290
A.1.3	Der Algorithmus von Lukasiewicz zur Berechnung eines Funktionsterms auf einem Rechner mit umgekehrter polnischer Notation und Stack-Registern	291
A.1.4	Schnelle Polynom-Approximation zur analytischen Substitution	292
A.1.5	Eine Methode zur Berechnung des Reziprokwertes einer Zahl auf einem Vier-Funktionen-Rechner	295
A.2	Matrizenrechnung auf dem Taschenrechner	295
A.3	Komplexe Zahlen und Funktionen	298
A.4	Formelsammlung	301
A.4.1	Trigonometrie	301
A.4.2	Berechnung von Längen, Flächen und Rauminhalten	307
A.4.3	Analytische Geometrie	314
Sachwortverzeichnis		329