

Dr. Heidemarie Borgwadt

Finanzmathematik

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1994

Ursprünglich erschienen bei Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler GmbH, Wiesbaden 1994.

Lektorat: Annegret Dorn

Satz: SATZPUNKT Ursula Ewert, Braunschweig

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

ISBN 978-3-409-92162-6 ISBN 978-3-663-13408-4 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-13408-4

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Borgwadt, Heidemarie
Finanzmathematik / Dr. Heidemarie Borgwadt.
– 1. Aufl. Wiesbaden : Gabler, 1994
(Gabler-Studientexte)
ISBN 978-3-409-92162-6

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Rechenoperationen und Symbole

1.	Arithmetische Zahlenfolgen und arithmetische Reihen	1
1.1	Der Begriff der reellen Zahlenfolge	1
1.2	Die arithmetische Zahlenfolge	4
1.3	Die arithmetische Reihe	6
1.4	Die lineare und arithmetisch-degressive Abschreibung	9
2.	Geometrische Zahlenfolgen und geometrische Reihen	14
2.1	Die geometrische Zahlenfolge	14
2.2	Die geometrische Reihe	17
2.3	Die geometrisch-degressive Abschreibung	20
3.	Finanzmathematik	23
3.1	Die Zinseszinsrechnung	23
3.1.1	Der einfache Zins	23
3.1.2	Der Zinseszins	24
3.2	Rentenrechnung	33
3.2.1	Begründung eines Anspruchs auf Versicherungsleistung	34
3.2.2	Verrentung und Kapitalisierung von Versicherungsleistungen	37
3.3	Ratenzahlungen, um Kapital zu bilden	40
3.4	Ratenzahlungen, um bestehendes Kapital zu vermehren	41
3.5	Tilgungsrechnung	42
3.5.1	Annuitätentilgung	42
3.5.2	Darlehen mit Laufzeitzinssatz (Ratentilgung)	47
3.6	Beurteilung von Investitionen mit Hilfe finanzmathematischer Methoden	50
3.6.1	Die Kapitalwertmethode (Diskontierungsmethode)	50
3.6.2	Die Annuitätenmethode	53
3.6.3	Die interne Zinsfußmethode	54
	Lösungen der Aufgaben zur Selbstüberprüfung	57
	Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen	64
	Literaturverzeichnis	65
	Stichwortverzeichnis	67

Verzeichnis der Rechenoperationen und Symbole

+	: Addition, gelesen „plus“
-	: Subtraktion, gelesen „minus“
×	: Multiplikation, gelesen „mal“
/ oder \div	: Division, gelesen „durch“
$\sqrt{\quad}$: Radizieren mit dem Wurzelexponenten 2, gelesen: „Quadratwurzel aus“, „Wurzel aus“
a^2	: Potenzieren mit dem Exponenten 2, Quadrieren, gelesen: „Basis a hoch Exponent 2“
$\sqrt[n]{\quad}$: Radizieren mit dem Wurzelexponenten $n \in \mathbb{N}^*$, gelesen: „n-te Wurzel aus“
a^n	: Potenzieren mit dem Exponenten $n \in \mathbb{R}$, gelesen: „a hoch n“
$x \in X$: x ist Element der Menge X
$x \notin Y$: x ist nicht Element der Menge Y
$a \in \{b, c, a\}$: a ist Element der Menge mit den Elementen b, c, a
$+\infty$: plus Unendlich
$-\infty$: minus Unendlich
a_k	: Abschreibungsbetrag im Zeitpunkt k
G_0	: Anschaffungswert
G_k	: Restbuchwert im Zeitpunkt k
K_0	: Kapital im Zeitpunkt Null (Anfangskapital)
K_n	: Kapital im Zeitpunkt n
p. a.	: per annum (pro Jahr)
p	: Nomineller Zinssatz
p'	: Effektiver Zinssatz
m	: Anzahl der Abrechnungszeiträume pro Jahr
\mathbb{N}	: Zahlenbereich der natürlichen Zahlen (ohne Null)
v^n	: Abzinsungsfaktor
q^n	: Aufzinsungsfaktor, Kalkulationszinsfuß
n	: Anzahl der Jahre
r_{int}	: interner Zinsfuß
R	: Rente
\mathbb{R}	: Zahlenbereich der reellen Zahlen
S_n^{nach}	: Endwert einer nachschüssigen Rente
S_n^{vor}	: Endwert einer vorschüssigen Rente
S_0	: Barwert einer Rente (Rentenbarwert)
Z_n	: Zinsen im Jahr n

Hausarbeit des Studententextes Borgwadt, Finanzmathematik (100 Punkte)

92162 MG

So ↑ kennzeichnen Sie
bitte Ihre Lösungen

1. Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind die folgenden Größen gegeben:
 $a_{10} = 20$ und $a_{30} = 100$.
Ermitteln Sie die Bildungsvorschrift der Zahlenfolge. Geben Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge an und charakterisieren Sie das Monotonieverhalten.
(6 Punkte)
2. Nehmen Sie an, daß Sie ein Sparkonto mit einer einjährigen Kündigungsfrist eröffnen. Ihr Anfangsguthaben zu Beginn des Jahres 01 betrage $G_0 = 1\,000,-$ DM. Während eines Jahres dürfen keine Einzahlungen und keine Auszahlungen vorgenommen werden. Ihre Spareinlagen werden jährlich mit $p = 7,4\%$ verzinst. Am Ende eines jeden Jahres heben Sie den Zinsbetrag ab und legen ihn in Ihr Sparschwein. Das Restguthaben verbleibt auf dem Sparkonto und wird wiederum zu den gleichen Bedingungen angelegt. Wie groß ist Ihr Gesamtguthaben nach Ablauf von 5 Jahren?
(6 Punkte)
3. Stellen Sie sich vor, Sie führen folgendes Sparprogramm durch: Am 1. 1. des Jahres 01 legen Sie ein Anfangsguthaben $G_0 = 1\,000,-$ DM auf einem Sparbuch mit einjähriger Kündigungsfrist für ein Jahr fest an. Ihr Guthaben wird mit $7,4\%$ per annum verzinst. Nach Ablauf eines Jahres zahlen Sie den Betrag $G_0 = 1\,000,-$ DM erneut ein, heben den für das abgelaufene Jahr gutgeschriebenen Zinsbetrag ab und legen ihn in Ihren Tresor. Den beschriebenen Vorgang wiederholen Sie beliebig oft. Wie hoch ist Ihr Gesamtguthaben nach Ablauf von 5 Jahren, also am 1. 1. des Jahres 06?
(8 Punkte)
4. Ein Unternehmen nimmt am 1. 1. des Jahres 01 eine Maschine mit einem Neuwert von $G_0 = 150\,000,-$ DM in Betrieb. Es wird eine Nutzungsdauer von 20 Jahren und eine lineare Abschreibung festgelegt.
 - a) Wie hoch ist der Abschreibungsbetrag pro Jahr? (4 Punkte)
 - b) Entwickeln Sie eine Bildungsvorschrift für die Zeitwerte der Anlage am Ende des 1., 2., 3., ..., n-ten Jahres. (4 Punkte)
5. Ein Sparguthaben mit einem Anfangsbetrag von $12\,000$ DM werde mit $7,25\%$ p. a. verzinst. Es werden weder Einzahlungen noch Abhebungen vorgenommen. Wie groß ist das Guthaben nach Ablauf von 10 Jahren?
(8 Punkte)
6. Ein Unternehmen nimmt am Ende des Jahres 00 eine Anlage mit einem Neuwert von $G_0 = 120\,000$ DM in Betrieb. Pro Jahr (am Ende) werden stets 12% des Zeitwertes der Anlage abgeschrieben, so daß ein neuer Zeitwert gebildet wird. Berechnen Sie den Zeitwert der Anlage nach Ablauf von 7 Jahren.
(8 Punkte)
7. Zu welchem Zinssatz wurde ein Kapital von $5\,000$ DM angelegt, wenn es nach Ablauf von 5 Jahren auf $7\,000$ DM angewachsen ist?
(8 Punkte)
8. Stellen Sie sich vor, Sie bekommen $12\,000$ DM geschenkt. Sie entschließen sich, dieses Geld ein Jahr lang fest anzulegen. Ein Finanzberater unterbreitet Ihnen die folgenden Vorschläge:

(Bitte wenden)

- a) Festanlage zu einem nominellen Zinssatz von 8 % p. a. und einmalige Zinsabrechnung am Ende des Jahres.
- b) Festanlage zu einem nominellen Zinssatz von 7,9 % p. a. und viermalige nachschüssige Abrechnung im Jahr.

Für welche Variante sollten Sie sich aus finanzmathematischer Sicht entscheiden?
(8 Punkte)

9. Sie nehmen sich vor, jährlich nachschüssig einen Rentenbeitrag in Höhe von 12 000 DM für eine Rentenversicherung zu zahlen. Diese Rentenbeiträge zahlen Sie zwanzig Jahre lang, wobei die Einlagen mit 5,5 % p. a. nachschüssig verzinst werden. Wie hoch ist Ihr Versicherungsanspruch nach Ablauf von 20 Jahren?
(10 Punkte)
10. Frau Schulze hat einen Versicherungsanspruch in Höhe von 180 000 DM erworben. Diesen Anspruch will sie in eine Zeitrente mit einer Laufzeit von 10 Jahren umwandeln. Welche nachschüssige Rente kann sie jährlich beanspruchen, wenn die Versicherungsanstalt mit einem Zinssatz von 5,5 % p. a. rechnet? (9 Punkte)
11. Ein Ehepaar schließt zu Beginn eines Jahres einen Bausparvertrag ab. Der Arbeitgeber der Ehefrau zahlt monatlich einen Beitrag von 78 DM und der Arbeitgeber vom Ehemann zahlt monatlich einen Beitrag von 26 DM auf das Bausparkonto ein. Jährlich nachschüssig werden von der Bausparkasse Zinsen in Höhe von 3,5 % p. a. berechnet und dem Konto zugeschlagen. Außerdem erhält das Ehepaar eine Bausparprämie in Höhe von 10 % der pro Jahr eingezahlten Beträge. Berechnen Sie den Kontostand nach Ablauf von 5 Jahren. (9 Punkte)
12. Frau Leopold nimmt zum Erwerb einer Eigentumswohnung ein Hypothekendarlehen in Höhe von 200 000 DM auf. Dieses Darlehen wird mit 8 % p. a. nachschüssig verzinst. Es wird eine nachschüssige Tilgung von 1 % p. a. zuzüglich ersparter Zinsen vereinbart. Die Zinsfestschreibung beläuft sich auf 5 Jahre. Stellen Sie für Frau Leopold einen Tilgungsplan auf. (12 Punkte)