

Gottlieb Strassacker, Roland Süsse

Rotation, Divergenz und Gradient

**Leicht verständliche Einführung in die
elektromagnetische Feldtheorie**

Gottlieb Strassacker, Roland Süsse

Rotation, Divergenz und Gradient

**Leicht verständliche Einführung
in die elektromagnetische
Feldtheorie**

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 151 Abbildungen, 17 Tabellen und 70 Beispielen



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Akad. Direktor. i. R. Dr.-Ing. Gottlieb Strassacker, Universität Karlsruhe (TH)
Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Roland Süsse, TU Ilmenau, Institut für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik

1. Aufl. 1984
2. Aufl. 1986
3. Aufl. 1992
4. Aufl. 1999
- 5., überarbeitete und erweiterte Auflage März 2003

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2003

Ursprünglich erschienen bei B. G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2003

www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

ISBN 978-3-519-40101-8 ISBN 978-3-663-12349-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-12349-1

Vorwort zur ersten Auflage

Den hier bearbeiteten Lehrstoff habe ich didaktisch so aufbereitet, daß er bei bekannter Differential-, Integral- und Vektorrechnung auch von solchen Studierenden verstanden werden kann, die noch nicht über die Kenntnisse der Vektoranalysis verfügen oder diese gerade erst erlernen.

Bei der Abfassung des Manuskriptes kam es mir weder auf eine umfassende, noch auf eine redundanzfreie Darstellung der elektromagnetischen Feldtheorie an. Vielmehr wollte ich eine möglichst verständliche Einführung geben. Denn aus meiner langjährigen Vorlesungserfahrung an der Universität Karlsruhe weiß ich, wie schwer sich viele Studenten mit dem Erlernen dieses nach wie vor unverzichtbaren Stoffes tun. Deswegen wurden Grundbegriffe wie: Skalarfeld, Vektorfeld, Feldlinienbild, Feldröhren und Fluß, Begriffe des Quellenfeldes wie: Ergiebigkeit, Divergenz und Gauß'scher Satz, sowie Begriffe des Wirbelfeldes wie: Zirkulation, Rotation und Stokes'scher Satz in einleitenden Kapiteln besonders ausführlich dargestellt, jedoch in enger Verbindung mit vorgezogenen Beispielen des elektromagnetischen Feldes.

Zur Verdeutlichung der Theorie und zur Vertiefung des Verständnisses habe ich bewußt Wiederholungen verwendet. Damit wird den Studierenden der Zugang zu den Fragestellungen und Lösungen der Feldtheorie sehr erleichtert. Das vorliegende Studienskript ist somit nicht für eine elitäre Auslese, sondern für den Durchschnittsstudenten geschrieben.

Im Hauptteil werden die Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie sowie das Zusammenwirken von Feldgrößen und Feldgleichungen bei differentiellen und integralen Herleitungen behandelt. Letztere führen zu den für die spätere Praxis wichtigen Anwendungen: Durchflutungs- und Induktionsgesetz, Vektorpotential mit Biot-Savartschen Regeln, Induktivitätsberechnungen, Energieströmungsvektoren, Stromverdrängung, Wellen- und Telegraphengleichung sowie deren Lösungen für ebene Wellen, u.a.m.

Die Hörer dieser Vorlesung waren stets Studenten des dritten Fachsemesters, vor der Diplom-Vorprüfung. Diese frühe Einführung von elektromagnetischer Feldtheorie bei der wissenschaftlichen Ausbildung künftiger Elektroingenieure hat den Vorteil, daß die integralen Aussagen aus den feldtheoretischen Grundlagen abgeleitet werden und dadurch wohlfundiert sind. Dagegen ist es andernorts meist üblich, zunächst integrale Ergebnisse zu lehren und deren feldtheoretische Begründung erst zu einem späteren Zeitpunkt zu geben.

Danken möchte ich Herrn Professor Mlynski und Herrn Professor Reiß für ihr Interesse an diesem Studienskript und für ihre Anregungen.

Karlsruhe, im Mai 1984

G. Strassacker

Vorwort zur fünften Auflage

Der Autor der vorangegangenen Auflagen, Herr Dr.-Ing. Gottlieb Strassacker, und der Teubner Verlag haben mich gebeten, die Überarbeitung und Erweiterung der fünften Auflage zu übernehmen. Diesem Wunsch komme ich gern nach. Da die Wahl auf mich gefallen ist, oblag nicht dem Zufall. An der Universität Karlsruhe und der Technischen Universität Ilmenau werden seit ihrem Bestehen Studierende in Elektrotechnik ausgebildet. Zu dieser Ausbildung gehört die "Theoretische Elektrotechnik" mit einer Einführung in die Theorie des elektromagnetischen Feldes.

An der Technischen Universität Ilmenau besteht die Besonderheit, daß innerhalb der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik in der Studienrichtung "Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik" Studierende ein Hochschuldiplom erwerben können. Der wissenschaftlich Nachwuchs kann im Fachgebiet "Theoretische Elektrotechnik" promovieren und im Anschluß daran habilitieren. Damit besteht hier eine einzigartige Tradition zur Qualifikation über das Diplom hinaus, was wiederum positiv auf die Diplomausbildung zurückwirkt.

Vergleicht man in Karlsruhe und in Ilmenau die Art und Weise der Ausbildung auf dem Gebiete der Theorie des elektromagnetischen Feldes, so bestehen weitgehende Übereinstimmungen, in Teilen ist sie methodisch gleich. Aus diesen Gründen bleibt der Aufbau der fünften Auflage dieses gelungenen, von den Studierenden vielseitig genutzten Buches erhalten. Hinzugefügt sind im Anschluß an die konformen Abbildungen die Herleitung nebst Anwendungen des Abbildungssatzes von Schwarz-Christoffel und Übungsaufgaben mit Lösungen zu den Kapiteln 4 bis 7.

Bei der Einteilung der elektromagnetischen Feldtheorie werden die gängigen Kapitel Statik, streng stationäres, quasistationäres und schließlich instationäres Strömungsfeld beibehalten, obwohl gelegentlich die Meinung vertreten wird, man sollte sich von diesen ortsbezogenen Begriffen trennen zu Gunsten eines Zeitbezuges.

Bei streng physikalischer Einteilung gibt es in der Tat nur zwei Feldtypen, einerseits Felder mit streng zeitlicher (und damit auch ortsgebundener) Konstanz, andererseits Wechselfelder, die bei ausreichenden Leitungslängen auch schon bei Niederfrequenz Abstrahlung aufweisen können und damit den instationären Feldern zuzurechnen sind.

Betrachtet man aber den in der Elektrotechnik wichtigen Fall, zeitlich langsam veränderlicher Felder mit Leitungslängen, die viel kleiner sind als die Wellenlängen, so tritt bei diesen noch keine Antennenwirkung auf. Es handelt sich hier um fast ortsfeste (quasistationäre) Felder. Es ist daher angemessen, die elektromagnetischen Vorgänge quasistationärer Felder nach wie vor getrennt zu besprechen.

Elektromagnetische Felder werden auch nach Quellen- und Wirbelfeldern unterschieden. Beispiele: Elektrische Ladungen und Polflächen können Quellen elektrischer Felder, Leitungs- und Verschiebungsstromdichten können Wirbel magnetischer Felder sein. Aber schon die Elektrostatik zeigt, daß das kapazitive Feld eines Kondensators in seinem Verlauf, zwischen den Kondensatorplatten, ein quellenfreies Quellenfeld ist. Ebenso nennt man das magnetische \vec{H} -Feld, das an den Polen z.B. eines Permanentmagneten seine Normalkomponente sprunghaft ändert, ein Quellenfeld, obgleich auch dieses \vec{H} -Feld ansonsten, bei homogener Magnetisierung, quellenfrei ist.

Analog dazu gibt es Beispiele für wirbelfreie Wirbelfelder. Elektrostatik bzw. Magnetostatik: Die Mantel- oder Seitenflächen eines Körpers mit $\epsilon_r > 1$ bzw. $\mu_r > 1$ sind Orte mit Wirbeln durch sprunghaft übergehende Tangentialkomponenten eines \vec{D} - bzw. eines \vec{B} -Feldes. Diese Felder werden daher als Wirbelfelder bezeichnet, obgleich sie ansonsten, bei homogener Polarisation, völlig wirbelfrei sind.

Das Magnetfeld \vec{H} außerhalb stromdurchflossener Leiter ist ein wirbelfreies Wirbelfeld. Modellhaft kann es aber durch Einführen einer Sperrfläche mit geeigneten Ersatzladungen als Quellenfeld erscheinen und mathematisch durch Gradientenbildung aus einem Skalarpotential dargestellt werden.

Es gibt also wirbelhafte und wirbelfreie Wirbelfelder. Ebenso gibt es quellenhafte und quellenfreie Quellenfelder. Man fragt sich mit Recht, wieso ein quellenfreies Quellenfeld noch als "Quellenfeld" und wieso ein wirbelfreies Wirbelfeld noch als "Wirbelfeld" bezeichnet wird. Offenbar ausschließlich durch die Art am Ort des Entstehens! Besser wäre, man vermiede den Begriff "Quellenfeld" beim quellenfreien und den Begriff "Wirbelfeld" beim wirbelfreien Feld

und beschränkte sich auf die Eigenschaften eines Feldes, das "quellenfrei" oder "quellenhaft" und "wirbelfrei" oder "wirbelhaft" sein kann.

Auch der Schluß, es handele sich bei $div \dots = 0$ um ein Wirbelfeld oder bei $rot \dots = 0$ um ein Quellenfeld kann richtig oder auch falsch sein. Denn $div \dots$ und $rot \dots$ sind lokale Aussagen. Das betrachtete Feld kann andernorts durch Quellen, aber auch durch Wirbelursachen erzeugt worden sein.

Wenn in diesem Buch dennoch die Bezeichnungen "Quellenfeld" und "Wirbelfeld" häufig auch bei Quellen- und Wirbelfreiheit wie bisher beibehalten werden, so ausschließlich, um dadurch den Lernenden das Verstandnis auf Grund der Entstehung des jeweiligen Feldes zu erleichtern.

Ich bedanke mich bei Herrn Dr.- Ing. G. Strassacker und beim Verlag für das Entgegenkommen zur Herausgabe der fünften Auflage.

Herrn Dr.-Ing. T. Ströhla danke ich für das Schreiben des Manuskriptes.

Ilmenau, im Dezember 2002

R. Süße

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Der Feldbegriff, Historisches	1
1.2	Das Skalarfeld	2
1.3	Vektorfeld und Feldlinienbild	4
1.4	Der Begriff Fluß	6
2	Quellen und Senken als Feldursachen	11
2.1	Quellenfelder qualitativ	11
2.2	Quellenfelder quantitativ	14
2.2.1	Ergiebigkeit oder Quellenstärke	14
2.2.2	Divergenz oder Quellendichte	17
2.2.3	Der Satz von Gauß	22
2.2.4	Sprungdivergenz	26
2.2.5	Quellenfelder durch Gradientenbildung	30
3	Wirbelfelder	35
3.1	Qualitative Aussagen	35
3.2	Zirkulation bei Wirbelfeldern	37
3.3	Wirbeldichte oder Rotation	40
3.4	Der Satz von Stokes	44
3.5	Sprungrotation	46
3.6	Wirbelfreiheit oder Quellenfreiheit?	50
3.7	Wegunabhängigkeit wirbelfreier Felder	51

4	Statik	55
4.1	Elektrostatik	56
4.1.1	Einheiten und Definitionen	56
4.1.2	Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke	58
4.1.3	Quellen der Elektrostatik	59
4.1.4	Spannung und Potential in der Elektrostatik	63
4.1.5	Arbeit des elektrostatischen Feldes	68
4.1.6	Die Laplace- und die Poissongleichung	69
4.1.7	Lösung der Poissonschen Differentialgleichung	72
4.2	Magnetostatik	76
4.2.1	Definitionen für magnetische Feldstärke und Flußdichte .	76
4.2.2	Magnetostatik und Permanentmagnete	79
4.2.3	Magnetisches Feld an Trenn- oder Grenzflächen	81
4.2.4	Magnetisches Skalarpotential und magnetische Spannung	83
5	Das streng stationäre Strömungsfeld	87
5.1	Das Durchflutungsgesetz	90
5.2	Übergang zu flächenhaftem Strombelag	98
5.3	Feldstärke \vec{H} bei beliebigem Leiterquerschnitt	102
5.4	Darstellung von Wirbelfeldern aus dem Vektorpotential	104
5.4.1	Die Differentialgleichung des Vektorpotentials	107
5.4.2	Lösung der Differentialgleichung des Vektorpotentials . .	109
5.4.3	Weitere Anwendungen des Vektorpotentials	112
5.5	Komplexes Potential und konforme Abbildung	118
5.6	Der Abbildungssatz von Schwarz-Christoffel	120
5.6.1	Herleitung des Abbildungssatzes	120

5.6.2	Berechnung von konformen Abbildungsfunktionen für elektrostatische Anordnungen	127
5.7	Magnetischer Dipol und magnetisches Moment	133
5.8	Magnetische Kreise mit Luftspalt	135
5.8.1	Abschätzung der magnetischen Feldstärken	135
5.8.2	Ohmsches Gesetz magnetischer Kreise	136
5.8.3	Scherung magnetischer Kreise	139
6	Das quasistationäre Feld	143
6.1	Die erste Maxwellgleichung im quasistationären Feld	146
6.2	Das erweiterte Durchflutungsgesetz	150
6.3	Selbst- und Gegeninduktivität	154
6.3.1	Selbstinduktivität und magnetische Energie	154
6.3.2	Selbstinduktivität und magnetischer Fluß	159
6.3.3	Selbstinduktivität und Fluß bei Ferromagnetika	161
6.3.4	Innere Induktivität kreisrunder Drähte	164
6.3.5	Gegeninduktivität	169
6.3.6	Metalle, Ferrite und Pulververbundwerkstoffe	173
6.4	Induktionsgesetz und zweite Maxwellgleichung	174
6.4.1	Das Induktionsgesetz für ruhende Randkurven	174
6.4.2	Induktionsgesetz für langsam bewegte Körper	186
6.4.3	Induktionsgesetz und Vektorpotential	192
6.5	Energieströmung und Energieströmungsvektoren	194
6.5.1	Der reelle Poyntingvektor	195
6.5.2	Energieströmung und komplexer Poyntingvektor	206
6.6	Stromverdrängung	211
6.6.1	Einseitige Stromverdrängung in Ankerstäben	213
6.6.2	Allseitige Stromverdrängung	222
6.6.3	Lösung der Besselschen Differentialgleichungen	226
6.6.4	Wechselstromwiderstand bei Stromverdrängung	231
6.6.5	Abschirmungen	235

7	Das instationäre elektromagnetische Feld	237
7.1	Elektromagnetische Wellen im Nichtleiter	237
7.1.1	Eine anschauliche Darstellung ebener Wellen	237
7.1.2	Die Wellengleichung	242
7.1.3	Lösung der Wellengleichung für eine ebene Welle	244
7.1.4	Linkswelle und Rechtswelle	247
7.1.5	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei Dispersion	249
7.1.6	Energiedichte und Wellenwiderstand des Nichtleiters	250
7.1.7	Erweiterung auf ungleiche Energiedichten	252
7.2	Die Telegraphengleichung	254
7.2.1	Lösung der Telegraphengleichung einer harmonischen Welle	256
7.2.2	Einige Grenzwerte	263
A	Zusammenstellung von Formeln	267
A.1	Formeln der Vektoranalysis	267
A.1.1	Gesetzmäßigkeiten	267
A.1.2	Skalarprodukte	267
A.1.3	Spatprodukt	268
A.1.4	Vektorprodukt aus dem Vektor \vec{a} und dem Vektor $\vec{b} \times \vec{c}$	268
A.1.5	Produkte mit ∇ , der Skalarfunktion $\phi(x, y, z)$ und dem Vektor \vec{a} :	269
A.1.6	Formeln zur Berechnung von <i>grad</i> , <i>div</i> , <i>rot</i>	269
A.1.7	Partielle Differentiation nach der Zeit	270
A.1.8	Formeln in kartesischen Koordinaten	271
A.1.9	Formeln in Zylinderkoordinaten	272
A.1.10	Formeln in Kugelkoordinaten	273
A.1.11	Einige wichtige Konstanten der Elektrotechnik	274
B	Literatur	277
C	Index	280