Christian Blatter

Wavelets – Eine Einführung

Advanced Lectures in Mathematics

Introduction to Markov Chains
Ehrhard Behrends

Einführung in die Symplektische Geometrie
Rolf Berndt

Wavelets – Eine Einführung
Christian Blatter

Lattices and Codes
Wolfgang Ebeling

Local Analytic Geometry
Theo de Jong, Gerhard Pfister

Ruled Varieties
Gerd Fischer, Jens Piontkowski

Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie
Thomas Friedrich

Hypergeometric Summation
Wolfram Koepf

The Steiner Tree Problem
Hans Jürgen Prömel, Angelika Steger

The Basic Theory of Power Series
Jesús M. Ruiz

vieweg

Christian Blatter

Wavelets – Eine Einführung

2., durchgesehene Auflage

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Christian Blatter
Department Mathematik
ETH Zentrum
CH-8092 Zürich

E-Mail: christian.blatter@math.ethz.ch

1. Auflage Februar 1998
2., durchgesehene Auflage Februar 2003

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

ISBN 978-3-528-16947-3 ISBN 978-3-663-11817-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-11817-6
ISSN 0932-7134

Vorwort

Dieses Buch ist weder die „große Retrospektive" eines Protagonisten noch eine enzyklopädische Forschungsmonographie, sondern die Annäherung eines mathematischen Normalverbrauchers an ein Thema, das wie kein anderes seit der Erfindung der Schnellen Fourier-Transformation die Approximationstheorie stimuliert und die Anwender beflügelt hat. Ich hatte eigentlich nur im Sinn, für Studenten der ETH Zürich eine einsemestrige Vorlesung zusammenzustellen, die sie *ab ovo* in die Welt der Wavelets einführen sollte (einen derartigen Kurs hatte es hier noch nicht gegeben). Dank der Zusprache von Kollegen ist nun aus dieser Vorlesung das vorliegende Buch geworden.

Mein Zielpublikum hatte ich mir so vorgestellt: MathematikstudentInnen mit der üblichen Grundausbildung, mit einem Rucksack voller Konvergenzsätze, aber ohne praktische Erfahrung, sagen wir, mit Fourier-Analysis. Im stillen hatte ich mir auch Zuhörer aus der Ingenieurswelt gewünscht; erst im Nachhinein habe ich erfahren, daß gerade letztere aus dem Kurs den größten Gewinn gezogen hatten.

Inhaltlich habe ich mir folgendes vorgenommen: Im ersten Kapitel gibt es einen Tour d'horizon über verschiedene Weisen der Signaldarstellung, und schon hier tritt zum ersten Mal das Haar-Wavelet auf den Plan. Das zweite Kapitel bringt ein Repetitorium der Fourier-Analysis (ohne Beweise), ergänzt durch zwei Theoreme, die „letztgültige" Grenzen der Signaltheorie abstecken: die Heisenbergsche Unschärferelation und das Abtast-Theorem von Shannon. In Kapitel 3 beginnt es dann richtig mit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation, und Kapitel 4: „Frames" beschreibt einen allgemeinen Rahmen (was sonst ...), in dem sowohl die kontinuierliche wie die diskrete Wavelet-Transformation begriffen werden können. Damit kommen wir endlich zur Hauptsache: der Multiskalen-Analyse mit ihren schnellen Algorithmen in Kapitel 5, und zur Konstruktion von orthonormierten Wavelets mit kompaktem Träger in Kapitel 6. Auch Spline-Wavelets werden kurz noch behandelt.

Was bei dem gegebenen Umfang fehlt, sind Biorthogonalsysteme, mehrdimensionale Wavelets und eine ins Einzelne gehende Behandlung von Anwendungen. Ferner sollte es ohne Einsatz von Distributionen abgehen. Es gibt also keine Sobolev-Räume und damit auch keine Diskussion der punktweisen Konvergenz usw. von Wavelet-Approximationen, und das Paley-Wiener-Theorem steht ebenfalls nicht zur Verfügung. Glücklicherweise läßt sich auch mit Hilfe eines elementaren Arguments beweisen, daß die Daubechies-Wavelets kompakten Träger besitzen.

Beim Aufarbeiten des Stoffes habe ich mich großzügig bei anderen Autoren bedient, in erster Linie natürlich bei den unvergleichlichen „Ten lectures on wavelets" von Ingrid Daubechies [D], in geringerem Maß bei [L], dem einzigen anderen mir bekannten Wavelet-Buch in deutscher Sprache, und im „Friendly guide to wavelets" von Kaiser [K]. Für weitere Quellen der Inspiration verweise ich auf das Literaturverzeichnis. Ich habe dieses Verzeichnis bewußt sehr knapp gehalten und darauf verzichtet, die sehr umfangreichen, aber nicht bis 1997 nachgeführten Literaturangaben in [D] oder [L] einfach nachzudrucken.

Noch ein Wort zu den Figuren: Die meisten Graphen von mathematisch definierten Funktionen wurden zunächst mit Hilfe von Mathematica® berechnet, als `Plot` ausgegeben und hierauf in der Graphik-Umgebung „Canvas" weiterbearbeitet. Einige der Figuren, zum Beispiel die Bilder 3.7 und 6.1, wurden mit „Think Pascal" als Bitmap erzeugt, im A4-Format ausgedruckt und anschließend photographisch verkleinert.

Ich danke allen, die mich zu diesem Unternehmen ermutigt und mir dabei geholfen haben, in erster Linie den Herausgebern der Reihe „Advanced Lectures in Mathematics" und dem Vieweg-Verlag für die Aufnahme dieser „Einführung" in ihr Programm.

Zürich, Ende November 1997

Christian Blatter

Für den vorliegenden Nachdruck dieser „Einführung" sind die bis dahin gefundenen Druckfehler eliminiert worden. Die wichtigste Änderung betrifft das Literaturverzeichnis: Es wurde ergänzt durch das seither erschienene Werk [Bu]. Dieses Buch ist im *approach* mit dem unsrigen vergleichbar; darüber hinaus enthält es insbesondere eine ausführliche und bis 1998 nachgeführte Liste von Literaturangaben.

Zürich, im November 2002

Christian Blatter

Inhaltsverzeichnis

Hinweise und besondere Bezeichnungen

Dieses Buch ist eingeteilt in sechs Kapitel, und jedes Kapitel ist weiter unterteilt in Abschnitte. Formeln, die später nocheinmal benötigt werden, sind abschnittweise mit mageren Ziffern nummeriert. Innerhalb eines Abschnitts wird ohne Angabe der Abschnittnummer auf Formel (1) zurückverwiesen; 3.4.(2) hingegen bezeichnet die Formel (2) des Abschnitts 3.4.

Neu eingeführte Begriffe sind am Ort ihrer Definition *schräg* gesetzt; eine weitergehende Warnung („Achtung, jetzt kommt eine Definition") erfolgt nicht. Definitionen lassen sich vom Sachverzeichnis her jederzeit wieder auffinden.

Sätze (Theoreme) sind kapitelweise nummeriert; die halbfette Signatur **(4.3)** bezeichnet den dritten Satz in Kapitel 4. Sätze werden im allgemeinen angesagt; jedenfalls sind sie erkenntlich an der vorangestellten Signatur und am *durchlaufenden Schrägdruck* des Textes. Die beiden Winkel ⌜ und ⌟ bezeichnen den Beginn und das Ende eines Beweises.

Eingekreiste Ziffern numerieren abschnittweise die erläuternden Beispiele; der leere Kreis ◯ markiert das Ende eines Beispiels.

Eine Familie von Objekten c_α über der Indexmenge I (ein „Datensatz") wird bezeichnet mit

$$\left(c_\alpha \,|\, \alpha \in I\right) \;=:\; c_\bullet \quad .$$

1_A bezeichnet die charakteristische Funktion der Menge A und $\mathbf{1}_X$ die identische Abbildung des Vektorraums X.

Sind e bzw. $a_1, \ldots, a_r$ gegebene Vektoren eines Vektorraums X, so bezeichnen $<e>$ bzw. $\operatorname{span}(a_1, \ldots, a_r)$ den von e bzw. von den a_k aufgespannten Unterraum.

$\mathbb{R}^* \;:=\; \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen.

$\mathbb{R}^2_- \;:=\; \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ist die „zersägte (a,b)-Ebene", wobei in Figuren die a-Achse vertikal, die b-Achse horizontal angelegt ist.

Das Zeichen $\int$ ohne Angabe von Integrationsgrenzen bezeichnet immer das über die ganze reelle Achse erstreckte Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes:

$$\int f(t)\,dt \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \;.$$

Analog: Summen $\sum_k$ ohne Angaben von Summationsgrenzen erstrecken sich über ganz $\mathbb{Z}$:

$$\sum_k a_k \;:=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \;.$$

Fourier-Transformation:

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt .$$

Umkehrformel, gelegentlich als Fourier$^\vee$-Transformation bezeichnet:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi .$$

Mit $j_a^N f$ bezeichnen wir den N-Jet (das Taylor-Polynom der Ordnung N) von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, in Formeln:

$$j_a^N f(t) := \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k .$$

Das Symbol $\mathbf{e}_\alpha$ bezeichnet die Funktion

$$\mathbf{e}_\alpha\colon \quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto e^{i\alpha t} .$$

Für Funktionen $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$, bezeichnen $a(f)$ und $b(f)$ das linke und das rechte Ende des Trägers von f:

$$a(f) := \inf\{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \neq 0\}, \qquad b(f) := \sup\{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \neq 0\} .$$

Ein *Zeitsignal* ist ganz einfach eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.