

## MATHEMATISCHE SCHÜLERBÜCHEREI

### **Belkner, Determinanten**

Nr. 33                      99 Seiten                      4,80 M                      665 100 1

### **Belkner, Matrizen**

Nr. 48                      96 Seiten                      4,30 M                      665 552 0

### **Deweß, Heureka heute/Kostproben praxiswirksamer Mathematik in Vorbereitung**

### **Deweß/Deweß, Summa summarum/Kostproben unterhaltsamer Mathematik**

Nr. 125                      92 Seiten                      15,- M                      666 317 6

### **Flachsmeyer/Feiste/Manteuffel, Mathematik und ornamentale Kunst- formen**

in Vorbereitung

### **Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode**

Nr. 41                      75 Seiten                      3,40 M                      665 107 9

### **Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und ihre graphische Darstellung**

Nr. 58                      127 Seiten                      7,- M                      665 600 5

### **Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik**

Nr. 2                      84 Seiten                      3,30 M                      665 084 2

### **Jaglom, Ungewöhnliche Algebra**

Nr. 83                      95 Seiten                      5,50 M                      665 789 2

### **Kadeřávek, Geometrie und Kunst in früherer Zeit**

in Vorbereitung

### **Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen**

Nr. 95                      156 Seiten                      9,- M                      665 871 3

### **Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht**

Nr. 107                      155 Seiten                      8,40 M                      666 138 1

### **Krysicki, Keine Angst vor x und y/Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme**

Nr. 119                      108 Seiten                      6,50 M                      666 186 7

### **Lang, Faszination Mathematik/Ein Wissenschaftler stellt sich der Öffentlichkeit**

Nr. 138                      141 Seiten                      10,- M                      666 457 4

EBERHARD SCHRÖDER

**Mathematik**  
**im**  
**Reich der Töne**

4. AUFLAGE

MIT 61 ABBILDUNGEN



LEIPZIG

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1990

**MATHEMATISCHE SCHÜLERBÜCHEREI • Nr. 106**

**Bildnachweis:**

Deutsche Fotothek Dresden (Abb. 11, 12, 13, 18, 19, 41, 47, 56)

Musikinstrumenten-Museum der Karl-Marx-Universität Leipzig (Abb. 9)

S. Stolpmann, Berlin (Abb. 20)

U. Pschewoschny, Berlin (Abb. 22, 23)

Den Umschlag gestaltete E. Kretschmer, Leipzig, unter Verwendung eines italienischen Holzschnittes aus dem 15. Jahrhundert.

Schröder, Eberhard:

Mathematik im Reich der Töne / Eberhard Schröder. – 4. Aufl. –

Leipzig: BSB Teubner, 1990. –

111 S. : 61 Abb.

(Mathematische Schülerbücherei; 106)

NE : GT

ISBN 978-3-322-00476-5      ISBN 978-3-663-10762-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-10762-0

Math. Sch.büch.

ISSN 0076-5449

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1982

Ursprünglich erschienen bei BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982.

4. Auflage

VLN 294-375/101/90 • LSV 1009

Lektor: Jürgen Weiß

Buchbinderei: Leipziger Großbuchbinderei GmbH

Bestell-Nr. 666 078 4

00700

# Vorwort

Zentrales Anliegen dieses Buches ist es, einen Überblick über den mathematischen Aufbau der Tonleitern nach dem pythagoreischen, dem diatonischen und dem temperierten Stimmungsprinzip zu geben. Die Tonleitern werden in der Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung behandelt.

Im Zusammenhang mit der pythagoreischen Tonleiter wird auf die philosophischen Lehrmeinungen der Pythagoreer eingegangen und die ideelle Krise aufgezeigt, die in dieser Philosophenschule als Folge der Widerlegung ihrer Lehren auftrat. Vorzüge und Nachteile der pythagoreischen und diatonischen Tonleitern werden gegeneinander abgewogen. In neuerer Zeit erwuchs aus den Forderungen der musikalischen Praxis nach Modulationsfähigkeit von Instrumenten mit fester Stimmlage das erstmalig von M. Mersenne ausgearbeitete Prinzip der temperierten Stimmung. Nach Durchsetzung der temperierten Tonskala wurde in der Mitte des 19. Jahrhunderts mit der Festlegung der absoluten Schwingungszahlen eine weitere Voraussetzung für die Internationalisierung des Musiklebens erfüllt.

Dieses Buch weist auf zahlreiche Querverbindungen zwischen dem mathematischen Aufbau der Tonleitern und der Gestaltung bzw. Konstruktion von Musikinstrumenten hin. Die Begriffe harmonische Schwingung, Resonanz, Schwebung und harmonische Analyse einer periodischen Schwingung sind gleichfalls Gegenstände der Betrachtung. Die geometrische Schallreflexion an einigen gekrümmten Flächen und die Resonanz werden im Hinblick auf die Raumakustik behandelt. Mit der Erläuterung sowohl des Weber-Fechnerschen Gesetzes als auch des Ohmschen Gesetzes an Hand von Beispielen und mit der Gegenüberstellung der Verhältniszahlen von Dur- und Moll-Akkord werden physikalisch-psychische Wechselbeziehungen in die Betrachtungen einbezogen. Die abschließende Behandlung des Doppler-Effektes in der Akustik sowie ein Ausblick auf Erscheinungen der elektromagnetischen Wellenausbreitung führen die Nützlichkeit aber auch die Grenzen von Modellbildungen aus der klassischen Mechanik vor Augen. Die Rolle der Mathematik

für das kompositorische Schaffen wird unter Beschränkung auf das vorliegende Thema bewußt ausgeklammert.

Das Kernstück dieses Buches ist aus einer Aufsatzreihe hervorgegangen, die ich für die Mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ Heft 6 (1972) und Heft 1 (1973) unter dem Titel „Mathematik im Reich der Töne“ verfaßt hatte. Herr J. Weiß vom Teubner-Verlag schlug mir vor, dieses Thema noch tiefergehend zu bearbeiten, damit es als Titel in die Reihe „Mathematische Schülerbücherei“ aufgenommen werden kann. Nach Abschluß des Manuskriptes scheint mir die Erwartung gerechtfertigt zu sein, daß dieses Buch mathematisch-physikalisch und musisch aufgeschlossene Schüler und Studenten anzusprechen vermag. Ebenso wie der interessierte Laie wird aber auch der durch seine musikalische Praxis mit dem Reich der Töne verbundene Künstler dieser Darstellung manche Anregung entnehmen können.

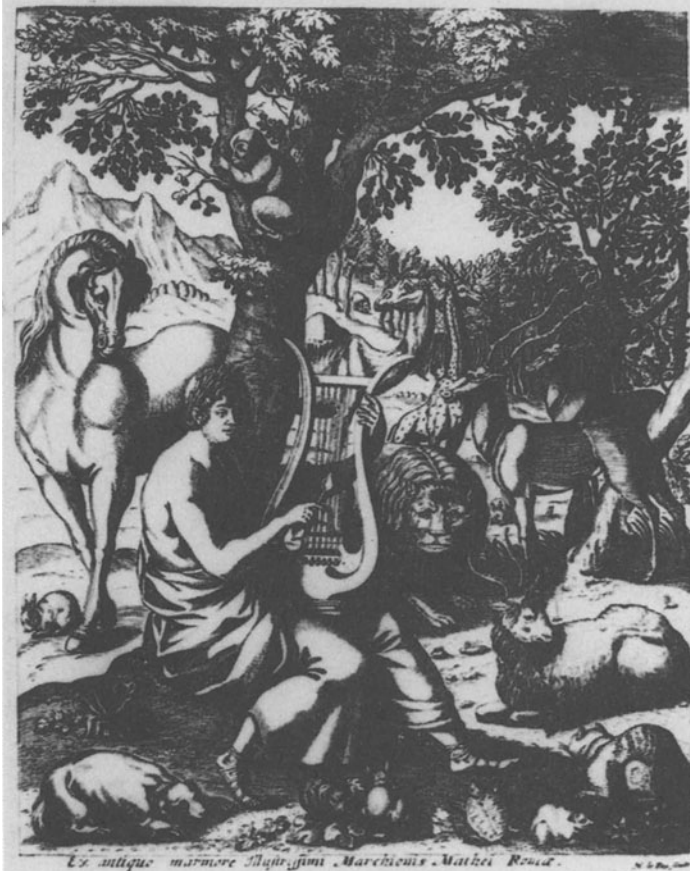
Zur Erstellung des Manuskriptes waren verschiedenartige technische Zuarbeiten erforderlich, wofür ich mich an dieser Stelle aufrichtig bedanke. Dieser Dank gilt Herrn Dr. R. Ortleb vom Wissenschaftsbereich MKR an der Sektion Mathematik der TU Dresden, der die Bilder zur harmonischen Analyse einer periodischen Funktion sowie graphische Darstellungen von Schwebungen und Superpositionen harmonischer Schwingungen rechentechnisch aufbereitete und aufzeichnen ließ. Frau I. Tittel steuerte Zeichnungen sehr guter Qualität bei. Die Deutsche Fotothek in Dresden unterstützte mich in entgegenkommender Weise bei der Beschaffung von geeignetem Bildmaterial.

Nicht zuletzt gilt mein Dank dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft für die Aufnahme dieses Buches in die „Mathematische Schülerbücherei“ und für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Dresden, im August 1981

E. Schröder

# HARMONIE VNIVERSELLE.



Laudate eum in Pfalterio & Cithara.  
Omnis spiritus laudet Dominum. *Pfalme 150.*

Abb. 1. Illustriertes Titelblatt des 1636 erschienenen Buches „Harmonie universelle“ von Marin Mersenne (vgl. dazu S. 65 ff.)

# Inhalt

<b>1. Licht als Wellenerscheinung</b> .....	<b>7</b>
<b>2. Töne als Schwingungen der Luft</b> .....	<b>10</b>
<b>3. Tonerzeugung in der belebten Natur</b> .....	<b>14</b>
<b>4. Instrumentelle Tonerzeugung</b> .....	<b>17</b>
<b>5. Freie Schwingung einer Punktmasse — Energiebetrachtung</b> .....	<b>34</b>
<b>6. Harmonische Analyse — Ohmsches Gesetz</b> .....	<b>38</b>
<b>7. Monochord — pythagoreisches Stimmungsprinzip</b> .....	<b>48</b>
<b>8. Diatonisches Stimmungsprinzip</b> .....	<b>54</b>
<b>9. Glanz und Verfall des Weltbildes der Pythagoreer</b> .....	<b>58</b>
<b>10. Temperierte Stimmung</b> .....	<b>64</b>
<b>11. Kammerton — Weber-Fechnersches Gesetz — Gesetze von Mersenne</b> .....	<b>74</b>
<b>12. Resonanz</b> .....	<b>79</b>
<b>13. Schallreflexion — Raumakustik</b> .....	<b>88</b>
<b>14. Doppler-Effekt</b> .....	<b>101</b>
<b>Biographischer Anhang</b> .....	<b>108</b>
<b>Sachverzeichnis</b> .....	<b>110</b>