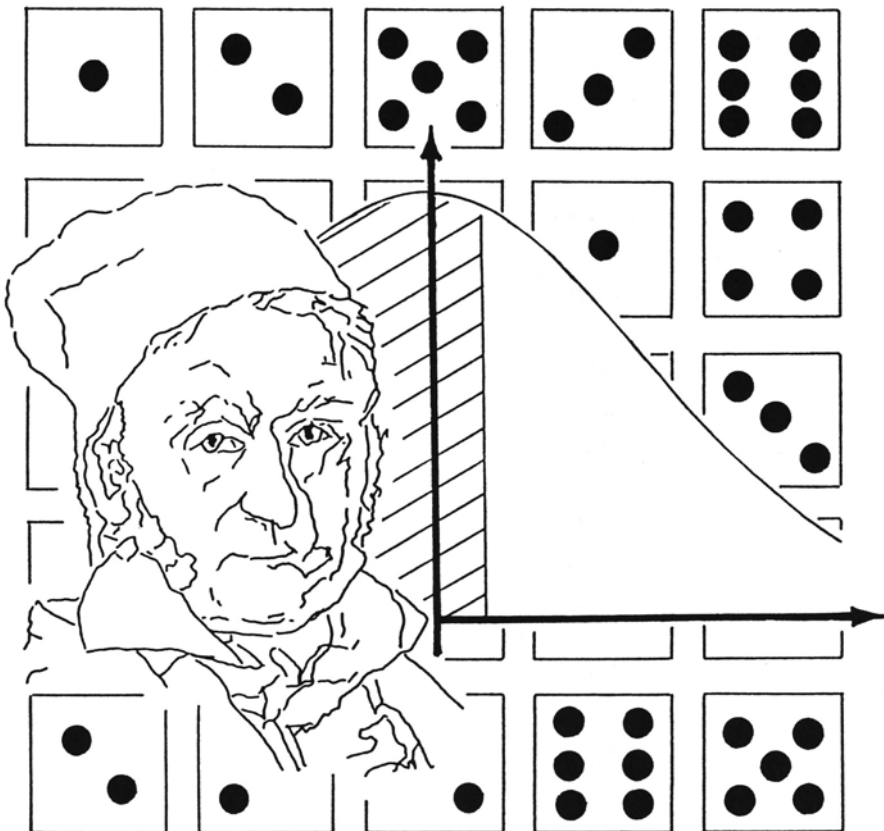


Ulrich Krengel

**Einführung in die Wahrscheinlichkeits-  
theorie und Statistik**



# vieweg studium

## Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von Martin Aigner, Peter Gritzmann, Volker Mehrmann  
und Gisbert Wüstholz

Martin Aigner

**Diskrete Mathematik**

Walter Alt

**Nichtlineare Optimierung**

Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum

**Projektive Geometrie**

Gerd Fischer

**Ebene algebraische Kurven**

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb

**Funktionentheorie**

Otto Forster

**Analysis 3**

Klaus Hulek

**Elementare Algebraische Geometrie**

Helmut Koch

**Zahlentheorie**

Ulrich Krenzel

**Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**

Wolfgang Kühnel

**Differentialgeometrie**

Ernst Kunz

**Einführung in die algebraische Geometrie**

Wolfgang Lück

**Algebraische Topologie**

Werner Lütkebohmert

**Codierungstheorie**

Reinhold Meise und Dietmar Vogt

**Einführung in die Funktionsanalysis**

Erich Ossa

**Topologie**

Jürgen Wolfart

**Einführung in die Zahlentheorie und Algebra**

Gisbert Wüstholz

**Algebra**

Ulrich Krenzel

# **Einführung in die Wahrscheinlichkeits- theorie und Statistik**

8., erweiterte Auflage



Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

**Prof. Dr. Ulrich Krengel**

Institut für Mathematische Stochastik

Universität Göttingen

Maschmühlenweg 8 - 10

37073 Göttingen

E-Mail: [krengel@math.uni-goettingen.de](mailto:krengel@math.uni-goettingen.de)

1. Auflage September 1988
- 2., verbesserte Auflage 1990
- 3., erweiterte Auflage 1991
- 4., erweiterte Auflage 1998
- 5., neubearbeitete und erweiterte Auflage 2000
- 6., verbesserte Auflage Februar 2002
- 7., überarbeitete Auflage August 2003
- 8., erweiterte Auflage Oktober 2005

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2005

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH,  
Wiesbaden 2005

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch / Petra Rußkamp

[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-8348-0063-3    ISBN 978-3-663-09885-0 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-09885-0

## Vorwort

Stochastik ist die Mathematik des Zufalls. Sie ist von größter Bedeutung für die Berufspraxis der Mathematiker. An vielen Schulen hat sie ihren festen Platz gefunden.

Die beiden Hauptgebiete der Stochastik sind Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. In der Wahrscheinlichkeitstheorie untersucht man zufällige Prozesse mit festen und bekannt angenommenen steuernden Wahrscheinlichkeiten. Dies ist theoretisch und praktisch von eigenständigem Interesse. Darüber hinaus liefert die Wahrscheinlichkeitstheorie Grundlagen für die Statistik, in der aus beobachteten Daten Schlüsse über unbekannte Wahrscheinlichkeiten und über zweckmäßiges Verhalten gezogen werden sollen.

Stochastische Fragen treten in den unterschiedlichsten Problemkreisen auf. Hier einige Beispiele:

- Was sind gute Strategien bei Glücksspielen und anderen Entscheidungsprozessen unter Unsicherheit?
- Welche Wahrscheinlichkeitsaussagen lassen sich über das Wachstum von Populationen und über die Vererbung von Eigenschaften machen?
- Wie übermittelt man ökonomisch Nachrichten?
- Wie vergleicht man mit vorgegebener Sicherheit die Qualität von Heilmitteln oder Produktionsverfahren?
- Was lässt sich über die Genauigkeit von Messungen aussagen?

Dies sind Fragen, die sich nicht ohne Zusatzüberlegungen nur durch den Beweis mathematischer Sätze beantworten lassen. Ein wesentlicher Teil der Schwierigkeit besteht bereits darin, die passenden mathematischen Begriffe zu entwickeln, die es erlauben, diese „realen“ Fragen angemessen mathematisch auszudrücken. Die für Berufspraxis und Schule gleichermaßen wichtige Umsetzung von realen Problemen in eine adäquate theoretische Form kann man wohl nirgends besser üben als in der Stochastik. Die Übungsaufgaben, die oft von der „eingekleideten“ Art sind, sind dabei äußerst wichtig. Der Leser sollte so viele wie möglich lösen.

Ich habe versucht, ein wenig von der Faszination zu vermitteln, die Stochastik ausüben kann. Dies war mir wichtiger als eine möglichst vollständige Abhandlung der praktisch gebräuchlichen Verfahren. Ist das Interesse geweckt, kann ja der Leser weitere Literatur heranziehen. Immerhin wird aber ein gewisser Fundus der Methodenlehre vermittelt, und ich denke, dass der Leser, der hier die Grundideen verstanden hat, sich schnell in systematischere Darstellungen und Handbücher hineinfinden wird.

Das Buch wendet sich an Studenten der Mathematik, der Physik und der Informatik vom dritten Semester an. Es setzt nur Grundkenntnisse aus der Analysis und der linearen Algebra voraus. Nur in einigen späteren Abschnitten würde man eigentlich ein wenig Maßtheorie brauchen. Die Aussagen lassen sich aber auch ohne solche weiter gehenden Vorkenntnisse verstehen, wenn man bereit ist, auf einzelne Beweise (vor allem von Existenzsätzen) zu verzichten. Diese sind in vertiefenden Vorlesungen leicht nachzuholen.

Das Buch enthält mehr Stoff als man bei angemessenem Tempo in einer vierstündigen Vorlesung vermitteln kann. Dies gibt Wahlmöglichkeiten. Die relativ zahlreichen mit einem Stern versehenen Abschnitte, Sätze und Beispiele und die Anhänge können am leichtesten weggelassen werden. Jedenfalls werden sie später nicht unbedingt benötigt.

Allerdings sind darunter viele Rosinen, so dass vieles dafür spricht, lieber einen Teil des Kuchens nicht zu essen.

Vieles aus den ersten Paragraphen ist Schulstoff. Weil Anfänger mit der mathematischen Modellierung realer Experimente oft Schwierigkeiten haben, scheint mir eine ausführliche Darstellung nicht nur für die zukünftigen Lehrer sinnvoll.

Man kann im Prinzip den gesamten Statistikeil auf eine spätere Lehrveranstaltung verschieben, aber Mathematikstudenten mit anderen Studienschwerpunkten und Physikstudenten fehlt oft die Zeit, eine solche zu besuchen.

Wie bei Lehrbüchern üblich habe ich die Quellen in der Regel nicht genannt. Es gibt aber historische Hinweise und Hinweise zum Weiterlesen.

Ich möchte den vielen Mitarbeitern und Freunden herzlich danken, die bei der Entstehung dieses Buches geholfen haben. Petra Küster hat schon bei der Ausarbeitung des Skripts mitgewirkt, das als Grundlage diente. Aus Vorlesungsnotizen von Götz Kersting habe ich manche Anregung geschöpft. Erich Berger, Wolfgang Stadje, Götz Kersting, Uwe Rösler, Hans-Jürgen Döring, Ulrich Wacker, Catherine Pallenberg, Norbert Neumann, Herold Dehling und Heinrich Hering haben Teile des Manuskripts gelesen, und ihre Vorschläge haben zu wesentlichen Verbesserungen geführt. Michael Krawczak hat das schöne Titelbild beigetragen. Das Manuskript haben Frau Schrörs, Frau Zimmer, Frau Graupner, Frau Giesecking und Frau Steffen sehr einwandfrei getippt. Dem Vieweg-Verlag, insb. Frau Schmickler-Hirzebruch, danke ich für die gute Zusammenarbeit. Meiner Frau danke ich für ihr Verständnis dafür, dass ich oft selbst sonntags so schwer vom Schreibtisch wegzukriegen war.

Die fünfte Auflage enthält u.a. einen zusätzlichen Paragraphen über Laufzeitanalysen für rekursive Algorithmen. Ich danke Herrn Uwe Rösler und Herrn Ludger Rüschemann für wertvolle Hinweise zu diesem aktuellen Thema. Der Abschnitt über nichtparametrische Tests wurde deutlich erweitert.

Herrn Erich Berger danke ich für die sorgfältige Herstellung der neuen Druckvorlage mit LATEX und für unzählige Verbesserungsvorschläge, die ich gerne aufgegriffen habe.

Ich widme dieses Buch meinem Lehrer Konrad Jacobs, der mein Interesse an Stochastik geweckt hat und dem ich viel verdanke.

Göttingen, im Oktober 1999.

*Ulrich Krengel*

## Zur achten Auflage

Die achte Auflage enthält erweiterte historische Anmerkungen.

Göttingen, im Juli 2005.

*Ulrich Krengel*

# Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel I</i>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>1</b>
§ 1	Modelle für Zufallsexperimente, Abzählmethoden . . . . .	1
1.1	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	2
1.2	Einfache Urnenmodelle . . . . .	6
1.3	Anwendungsbeispiele . . . . .	10
1.4	Die hypergeometrische Verteilung . . . . .	12
1.5	Vereinigungen von Ereignissen . . . . .	12
1.6	Multinomialkoeffizienten . . . . .	14
1.7	Runs* . . . . .	14
1.8	Einfache Identitäten für Binomialkoeffizienten . . . . .	15
	Anhang* . . . . .	17
	Aufgaben . . . . .	19
§ 2	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit . . . . .	21
2.1	Definition und Eigenschaften bedingter Wahrscheinlichkeiten . . . . .	21
2.2	Unabhängigkeit . . . . .	25
2.3	Produktexperimente . . . . .	27
2.4	Einige Verteilungen für Produktexperimente . . . . .	29
2.5	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	31
2.6	Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsräumen aus bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . . .	32
2.7	Austauschbare Verteilungen* . . . . .	34
2.8	Genetische Modelle* . . . . .	35
2.9	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Scheinkorrelation* . . . . .	37
	Anmerkungen* . . . . .	39
	Aufgaben . . . . .	40
§ 3	Zufallsvariable, Erwartungswert, Varianz . . . . .	42
3.1	Verteilungen von Zufallsvariablen . . . . .	42
3.2	Unabhängigkeit . . . . .	45
3.3	Erwartungswerte . . . . .	46
3.4	Das Rechnen mit Indikatorfunktionen . . . . .	49
3.5	Varianz und Kovarianz . . . . .	52
3.6	Das schwache Gesetz der großen Zahlen . . . . .	56
	Aufgaben . . . . .	58
§ 4	Grundbegriffe der Schätztheorie . . . . .	60
4.1	Der allgemeine Rahmen von Schätzproblemen . . . . .	61
4.2	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	62
4.3	Erwartungstreue . . . . .	63
4.4	Der mittlere quadratische Fehler . . . . .	65

4.5	Die Informationsungleichung*	66
4.6	Konsistenz*	68
4.7	Konfidenzintervalle	69
	Aufgaben	74
§ 5	Approximationen der Binomialverteilung	76
5.1	Approximation von $n!$ und $b_{n,p}(k)$	76
5.2	Der Satz von de Moivre-Laplace	80
5.3	Anwendungen	83
5.4	Die Poisson-Approximation	85
	Anhang	89
	Aufgaben	90
§ 6	Tests	92
6.1	Beispiel der „tea tasting Lady“	92
6.2	Grundbegriffe der Testtheorie	94
6.3	Mehr zur „tea tasting Lady“	95
6.4	Ein verfeinertes Modell für den Tee-Test*	97
6.5	Beispiel des Testens der Existenz von außersinnlicher Wahrnehmung*	99
6.6	Eine Erweiterung des Testbegriffs: Randomisierte Tests	100
6.7	Tests einfacher Hypothesen gegen einfache Alternativen	101
6.8	Anwendung auf zusammengesetzte Alternativen	103
6.9	Allgemeine Hinweise zur Testtheorie	103
6.10	$p$ -Werte*	104
	Aufgaben	105
§ 7	Erzeugende Funktionen*	107
	Verzweigungsprozesse	111
	Aufgaben	113
§ 8	Entropie und Codierung*	114
8.1	Der Quellen-Codierungssatz	114
8.2	Anwendung auf mehrstufige Zufallsexperimente	117
	Aufgaben	118
§ 9	Laufzeitanalysen von rekursiven Algorithmen*	120
	Aufgaben	126
<b>Kapitel II Allgemeine Modelle</b>		<b>127</b>
§ 10	Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten	127
10.1	$\sigma$ -Algebren und allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße	127
10.2	Beispiele von Verteilungen mit Dichten	130
	Anhang*	135
	Aufgaben	137



§ 11	Zufallsvariable und ihre Momente . . . . .	139
11.1	Messbare Funktionen . . . . .	139
11.2	Verteilungen von Zufallsvariablen . . . . .	141
11.3	Unabhängigkeit . . . . .	142
11.4	Erwartungswerte . . . . .	144
11.5	Mehrdimensionale Dichtetransformation und Normalverteilung* . . . . .	146
	Aufgaben . . . . .	150
§ 12	Grenzwertsätze* . . . . .	152
12.1	Das starke Gesetz der großen Zahlen . . . . .	152
12.2	Normale Zahlen* . . . . .	156
12.3	Der Zentrale Grenzwertsatz . . . . .	157
	Anhang . . . . .	161
	Aufgaben . . . . .	162
§ 13	Schätzverfahren und Fehlerrechnung . . . . .	163
13.1	Maximum-Likelihood-Schätzungen bei Dichten . . . . .	163
13.2	Konfidenzintervalle . . . . .	165
13.3	Das Fehlerfortpflanzungsgesetz* . . . . .	166
13.4	Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	167
13.5	Median, Ausreißer und Robuste Schätzer* . . . . .	169
	Anhang* . . . . .	171
	Aufgaben . . . . .	173
§ 14	Einige wichtige Testverfahren . . . . .	174
14.1	Der $t$ -Test . . . . .	174
14.2	Einfache Varianzanalyse* . . . . .	179
14.3	$\chi^2$ -Tests . . . . .	181
14.4	Nichtparametrische Tests . . . . .	186
	Anhang . . . . .	191
	Aufgaben . . . . .	193
<b>Kapitel III Markowsche Ketten</b>		<b>194</b>
§ 15	Die markowsche Eigenschaft . . . . .	194
15.1	Definition und Beispiele . . . . .	194
15.2	Einfache Folgerungen aus der markowschen Eigenschaft . . . . .	196
15.3	Stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten . . . . .	197
15.4	Absorptionswahrscheinlichkeiten . . . . .	199
15.5	Absorptionsverteilungen* . . . . .	200
	Aufgaben . . . . .	202
§ 16	Das Verhalten markowscher Ketten in langen Zeiträumen . . . . .	204
16.1	Ketten mit endlich vielen Zuständen . . . . .	204
16.2	Kommunizierende Zustände und Periodizität . . . . .	207

---

16.3	Rekurrenz und Transienz . . . . .	209
	Anhang . . . . .	214
	Aufgaben . . . . .	215
§ 17	Der Erneuerungssatz . . . . .	217
17.1	Die Erneuerungsgleichung . . . . .	217
17.2	Anwendung auf Übergangswahrscheinlichkeiten . . . . .	220
17.3	Bestimmung der $m_{ii}$ . . . . .	222
	Aufgaben . . . . .	225
§ 18	Der Poisson-Prozess . . . . .	226
18.1	Charakterisierung des Poisson-Prozesses . . . . .	226
18.2	Sprungzeiten beim Poisson-Prozess* . . . . .	229
	Aufgaben . . . . .	231
	<b>Hinweise zum Weiterlesen</b>	<b>233</b>
	<b>Lösungen der mit (L) gekennzeichneten Aufgaben</b>	<b>235</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>242</b>
	<b>Tabellen</b>	<b>246</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>251</b>
	<b>Namen- und Sachwortverzeichnis</b>	<b>252</b>