

Heilig

Kontrolle chaotischen Verhaltens auf Finanzmärkten

GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Kontrolle chaotischen Verhaltens auf Finanzmärkten

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

vorgelegt von

Stephan Heilig
aus Reutlingen

2000

Dekan:	Professor Dr. rer. pol. Manfred Stadler
Erstberichterstatter:	Professor Dr.-Ing. Rainer Schöbel
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. oec. publ. Gerd Ronning
Tag der mündlichen Prüfung:	12. Januar 2001

Stephan Heilig

Kontrolle chaotischen Verhaltens auf Finanzmärkten

Methoden zur Stabilisierung des
Preisverhaltens

Mit einem Geleitwort
von Prof. Dr.-Ing. Rainer Schöbel

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Heilig, Stephan:

Kontrolle chaotischen Verhaltens auf Finanzmärkten : Methoden zur Stabilisierung des Preisverhaltens / Stephan Heilig. Mit einem Geleitw. von Rainer Schöbel - 1. Aufl..

(Gabler Edition Wissenschaft)

Zugl.: Tübingen, Univ., Diss., 2000

ISBN 978-3-8244-7397-7

ISBN 978-3-663-08074-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-08074-9

1. Auflage Juli 2001

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2001

Ursprünglich erschienen bei Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler GmbH, Wiesbaden, und Deutscher Universitäts-Verlag GmbH, Wiesbaden, 2001

Lektorat: Brigitte Siegel / Jutta Hinrichsen

www.gabler.de

www.duv.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-8244-7397-7

Meinen Eltern

Geleitwort

Längst hat die Chaostheorie Eingang in die ökonomische Modellbildung gefunden. Seit Richard Day vor zwanzig Jahren zeigen konnte, dass chaotisches Verhalten endogen aus klassischen deterministischen Wachstumsprozessen entstehen kann, wird deterministisches Chaos als Ursache nichtzyklischer Schwankungen des Wirtschaftsgeschehens neben der herkömmlichen Erklärung aus der Stochastik der Systemvariablen kontrovers diskutiert. Auch wenn es empirisch bis heute nicht gelungen ist, deterministisches Chaos in ökonomischen Datenreihen zweifelsfrei nachzuweisen, befruchtet dieser Denkansatz nach wie vor die theoretische Diskussion. Lag der Schwerpunkt zunächst auf der Rezeption der unliebsamen Botschaften der Chaostheorie, etwa der Botschaft der grundsätzlich langfristigen Unvorhersagbarkeit deterministischer Trajektorien, so wendet sich ein Teil der neueren Arbeiten einer eher konstruktiven Frage zu: Wie lassen sich typische Eigenschaften des deterministischen Chaos zur effizienten Kontrolle von Wirtschaftsprozessen nutzen?

Dieser Frage ist die Dissertation von Heilig gewidmet. Er setzt sich das Ziel, die Kontrollmöglichkeiten chaotischen Verhaltens sowohl in zeitdiskreten als auch in zeitstetigen Zusammenhängen systematisch aufzuzeigen und an zwei prominenten chaotischen Kapitalmarktmodellen zu erproben.

Die Arbeit gliedert sich in drei Hauptabschnitte. Der erste Teil führt in die Thematik ein und informiert über unterschiedliche Methoden der Chaoskontrolle. Der zweite Teil untersucht, nach einem kurzen Exkurs über Chaos in Finanzzeitreihen, die Möglichkeiten der Kontrolle chaotischer Entwicklungen in einem dynamischen Zinsmodell von Tice und Webber. Der dritte Teil ist der Kontrolle eines chaotischen Asset Pricing Modells von Brock und Hommes gewidmet. Das Ende der Arbeit bilden ein Exkurs zur praktischen Implementierung der Chaoskontrolle in ökonomischen Systemen und eine Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse. Diverse Anhänge komplettieren die Monografie.

Die Arbeit von Heilig zeichnet sich durch eine sehr sorgfältige und präzise Umsetzung der teilweise selbst weiterentwickelten Kontrollkonzepte auf nichtlineare Kapitalmarktmodelle aus. Bemerkenswerte Fortschritte werden auf zwei Ebenen erzielt: Methodisch gelingt es ihm den Ansatz von Ott, Grebogi und Yorke auch auf Gleichgewichte ohne Sattelpunkte zu erweitern. Konkret ergeben sich daraus wichtige Erkenntnisse zum Systemverhalten der beiden untersuchten Modelle sowohl im zeitstetigen als auch im zeitdiskreten Kontext. Darüberhinaus korrigiert er die in der Originalarbeit fehlerhafte Modellherleitung bei Tice und Webber.

VIII

Die Ergebnisse der Untersuchung stellen eine wertvolle Bereicherung unseres Wissens über Chaoskontrolle in ökonomischen Modellen dar. Insgesamt handelt es sich bei der von Heilig vorgelegten Arbeit um einen wichtigen theoretischen Beitrag auf hohem technischen Niveau.

Das Chaos mit begrenzten ökonomischen Mitteln kontrollieren! Welcher Manager würde seine Tätigkeit nicht hin und wieder so definieren wollen? Deshalb sollte die Arbeit auch dem theoretisch interessierten Praktiker, der sich über Fortschritte der Chaoskontrolle in ökonomischen Modellzusammenhängen informieren will, eine interessante Lektüre bieten.

Rainer Schöbel

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde von der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen im Wintersemester 2000/2001 als Dissertation angenommen. Sie entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere betriebliche Finanzwirtschaft.

Mein besonderer Dank gilt meinem akademischen Lehrer und Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Rainer Schöbel für seine Unterstützung bei der Entstehung der Arbeit sowie für die angenehme Arbeitsatmosphäre am Lehrstuhl.

Des Weiteren danke ich Vera Klöckner, meiner Kollegin Dr. Ariane Reiß, meinen Kollegen Dr. Hartmut Nagel, Philipp Kellerhals, Detlef Replinger, Jochen Veith, Dr. Jianwei Zhu und Freunden an der Fakultät für die gemeinsame schöne Zeit in Tübingen.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie für ihre ununterbrochene Unterstützung.

Stephan Heilig

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	XV
Tabellenverzeichnis	XIX
Verzeichnis der wichtigsten Symbole	XXI
1 Einleitung	1
I Dynamische Systeme und Chaostheorie	5
2 Grundlagen dynamischer Systeme	7
2.1 Differential- und Differenzgleichungen	7
2.2 Trajektorien und Attraktoren	9
2.3 Konservative und dissipative Systeme	10
2.4 Stabilitätsanalyse	11
2.4.1 Stabilitätsanalyse in stetigen Systemen	11
2.4.2 Stabilitätsanalyse in diskreten Systemen	16
3 Wichtige Begriffe aus der Chaostheorie	21
3.1 Sensitivität	22
3.2 Topologische Transitivität	22
3.3 Periodische Punkte liegen dicht	23
3.4 Äquivalenz der Eigenschaften	23
3.5 Seltsamer Attraktor	24
3.6 Bifurkation, ein Weg ins Chaos	28
II Kontrolle von Chaos	31
4 Problemstellung und Überblick	33

5	Kontrolle ohne Rückkopplung	37
5.1	Die Kontrollmethode von Hübler	37
5.1.1	Stetiger Ansatz	37
5.1.2	Diskreter Ansatz	39
5.2	Die ökonomische Relevanz der Kontrollmethode	42
6	Kontrolle mit Rückkopplung	49
6.1	Kontrolle eines Sattelpunktes im \mathbb{R}^2 : Der Kontrollansatz von Ott, Grebogi und Yorke	49
6.2	Erweiterung des Kontrollansatzes im \mathbb{R}^n	54
6.2.1	Fall 1: Der Fixpunkt besitzt keine stabile Mannigfaltigkeit	55
6.2.2	Fall 2: Der Fixpunkt besitzt eine stabile Mannigfaltigkeit	57
6.3	Beschleunigung der Kontrolle durch Targeting	60
6.4	Kontrolle stetiger Systeme	64
6.5	Kontrolle durch Polvorgabe	66
6.5.1	Stetige Systeme	66
6.5.2	Diskrete Systeme	72
6.6	Kostenoptimierender Kontrollansatz	72
6.6.1	Minimale Kontrolldauer	73
6.6.2	Minimale Kontrolleingriffe	74
6.6.3	Minimierung der Kostenfunktion	74
7	Zusammenfassung der Kontrollmethoden	81
 III Kontrolle finanzwirtschaftlicher Modelle		85
8	Chaos in Finanzdatenreihen	87
9	Chaotisches Zinsmodell von Tice und Webber	93
9.1	Das Modell	94
9.2	Die Stabilitätseigenschaften des Modells	103
9.2.1	Die Stabilität des Fixpunktes \mathbf{x}_1^*	103
9.2.2	Die Stabilität der symmetrischen Fixpunkte $\mathbf{x}_{2,3}^*$	105
9.2.3	Der Lorenz-Attraktor	110
9.2.4	Das stochastische Modell	112
9.3	Die Kontrolle des Modells	113
9.3.1	Bestimmung möglicher Kontrollvariablen	115
9.3.2	Kontrolle der symmetrischen Fixpunkte $\mathbf{x}_{2,3}^*$	116

9.3.3	Kontrolle des Fixpunktes \mathbf{x}_1^*	126
9.3.4	Kontrolle des stochastischen Modells	133
9.4	Zusammenfassung	137
10	Asset Pricing Modell von Brock und Hommes (1998)	139
10.1	Das Modell	139
10.2	Dynamik und Kontrolle des Modells	146
10.2.1	Fundamentalisten versus Contrarians	147
10.2.2	4 Investorengruppen	156
10.3	Zusammenfassung	160
11	Praktische Implementierung der Chaoskontrolle	163
11.1	Empirische Bestimmung des Kontrollansatzes	163
11.2	Heterogene Akteure	165
11.3	Nichtstationäre und offene Systeme	166
12	Zusammenfassung und Ausblick	169
	Anhang	172
A	Kontravariante und kovariante Basisvektoren	173
A.1	Definition	173
A.2	Darstellung der Vektorkoordinaten	174
B	Kostenminimierende Kontrolle	177
B.1	Berechnung des Integrals \mathbf{P}	177
B.2	Minimierung von $J(\Delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{p})$	178
C	Zinsmodell von Tice und Webber (1997)	183
C.1	Das stochastische Differentialgleichungssystem	183
C.2	Herleitung der Gleichung (9.17)	185
C.3	Kontrollergebnisse	187
D	Asset Pricing Modell von Brock und Hommes (1998)	205
D.1	Lösung der stochastischen Differenzgleichung	205
	Literaturverzeichnis	207

Abbildungsverzeichnis

3.1	Bifurkationsdiagramm der logistischen Gleichung.	29
5.1	Kontrolle der logistischen Gleichung durch den Ansatz von Hübler.	41
5.2	Chaotischer Verlauf der Produktionsmenge y_t	44
5.3	Kontrolle der chaotischen Produktionsmenge durch den Ansatz von Hübler.	46
6.1	Die Kontrollidee von Ott, Grebogi und Yorke (1990): Durch den Eingriff δp_t wird in $t + 1$ ein Zustand erreicht, der auf der stabilen Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes \mathbf{x}_p^* liegt.	52
6.2	Zeitdauer bis die Kontrolleingriffe einsetzen in Abhängigkeit vom Startwert x_0 : a) ohne Targeting; b) mit Targeting.	63
6.3	Zeitdauer bis die Kontrolleingriffe einsetzen in Abhängigkeit vom Startwert x_0 unter Einfluss einer normalverteilten Störgröße: a) ohne Targeting; b) mit Targeting.	64
9.1	IS-LM-Diagramm.	95
9.2	Zinsverlauf im Modell von Tice und Webber für $\delta = 0,8$	105
9.3	Untersuchung der Eigenwerte von $\mathbf{x}_{2,3}^*$ für unterschiedliche Parameterwerte.	107
9.4	Zinsverlauf im Modell von Tice und Weber für a) $\delta = 1,05$ und b) $\delta = 2,0$	108
9.5	Homokliner Orbit für $\delta = \delta_S$ und Trajektorienverlauf für $\delta \leq \delta_S$	109
9.6	Der chaotische Lorenz-Attraktor im Modell von Tice und Webber für die Parameter $\alpha = 5,0$, $\beta = 0,5$, $\gamma = \frac{5}{12}$, $\delta = 23$, $\mu = 0,1$ und $\phi = 22000$	110
9.7	Sensitive Abhängigkeit des Trajektorienverlaufs im chaotischen Lorenz-Attraktor für die Parameter $\alpha = 5,0$, $\beta = 0,5$, $\gamma = \frac{5}{12}$, $\delta = 23$, $\mu = 0,1$ und $\phi = 22000$. Die eine Trajektorien besitzen die Startwert $r(0) = 0,06$, $x(0) = 0,085$, $p(0) = 5,0$ und die andere weicht davon geringfügig in der Koordinate r um $\Delta r(0) = 0,001$ ab.	111
9.8	Zinsverlauf mit den Modellparametern: a) $\alpha = 5,0$, $\beta = 0,5$, $\gamma = \frac{5}{12}$, $\delta = 23$ und $\phi = 22000$. b) Verdopplung der Frequenz durch Änderung von $\alpha = 10,0$, $\beta = 1,0$ und $\gamma = \frac{10}{12}$	112

9.9	a) Zinsverlauf mit stochastischem Term und den Parametern $\alpha = 5, 0, \beta = 0, 5, \gamma = \frac{5}{12}, \delta = 23, \phi = 22000, \sigma_r = 0, 14$ und $\sigma_x = \sigma_p = 0$. b) Zinsverlauf des Vasicek-Modells mit den Parametern $\alpha = 3, 0, \mu = 0, 1$ und $\sigma = 0, 1$	113
9.10	Chaotischer Zinsverlauf	120
9.11	a) Kontrolle des chaotischen Zinsverlaufs. b) Kontrolleingriffe $\delta\mu$	121
9.12	Der Zinsverlauf mit ein- und ausgeschalteter Kontrolle.	122
9.13	a) Kontrollierter Zinsverlauf; ab $t = 8$ erfolgen die Kontrolleingriffe periodisch. b) Kontrolleingriffe $\delta\mu$	123
9.14	a) Stabilisierung des chaotischen Zinses im Gleichgewicht r_1^* . b) Kontrolleingriffe $\delta\mu$ und $\delta\delta$	130
9.15	a) Stabilisierung des chaotischen Zinses im Gleichgewicht r_1^* . b) Kontrolleingriffe $\delta\mu$ und $\delta\delta$ bei einer Gewichtungsmatrix $\mathbf{S} = \text{diag}(1 \ 3)$	131
9.16	Zinsverlauf bei Kontrolle von r_2^* : a) mit stochastischer und b) ohne stochastischer Störgröße.	134
9.17	Kontrolleingriffe a) unter Einfluss stochastischer Störungen und b) ohne Einfluss stochastischer Störungen.	134
9.18	Zinsverlauf bei Wechsel des zu kontrollierenden Gleichgewichtszinses.	135
9.19	a) Zinsverlauf des deterministischen Modells bei Wechsel des zu kontrollierenden Gleichgewichtszins. b) Die Kontrolleingriffe $\delta\mu$. c) Die Kontrolleingriffe $\delta\delta$	136
10.1	Bifurkationsdiagramm des Asset Pricing Modells von Brock und Hommes in Abhängigkeit von β bei zwei Investorengruppen: Fundamentalisten und Contrarians.	148
10.2	Attraktoren des Asset Pricing Modells bei zwei Investorengruppen (Fundamentalisten und Contrarians): a) zwei invariante Kreise für $\beta = 3, 8$; b) chaotischer Attraktor für $\beta = 15$	149
10.3	a) chaotischer Verlauf des Aktienkurses. b) Entwicklung der Marktanteile n_1 und n_2	149
10.4	a) Verlauf der kontrollierten und unkontrollierten Trajektorie mit einem Startwert $\mathbf{x}_0 = (-0, 1 \ 0, 1 \ 0)'$. b) Kontrolleingriffe ($0 \leq \delta n_{c,t} \leq 0, 01$).	153
10.5	Kontrolldauer der Trajektorien in Abhängigkeit vom Startwert bei zwei Investorengruppen (Fundamentalisten und Contrarians).	154
10.6	a) Verlauf der kontrollierten Trajektorie mit dem Startwert $\mathbf{x}_0 = (-0, 1 \ 0, 1 \ 0)'$. b) Kontrolleingriffe mit Unter- und Obergrenze ($0, 001 \leq \delta n_{c,t} \leq 0, 01$).	155

10.7 Bifurkationsdiagramm des Asset Pricing Modells von Brock und Hommes in Abhängigkeit von β bei vier Investorengruppen ($g_1 = 0, g_{2,3} = 0,9, g_4 = 1,01, b_{1,4} = 0$ und $b_{2,3} = \pm 0,2$). 156

10.8 Attraktoren des Asset Pricing Modells bei vier Investorengruppen: a) invarianter Kreis für $\beta = 60$; b) chaotischer Attraktor für $\beta = 95$ 157

10.9 a) Verlauf der kontrollierten und unkontrollierten Trajektorie mit dem Startwert $\mathbf{x}_0 = (-0,2 \ 0,2 \ 0)^T$. b) Kontrolleingriffe ($|\delta n_{c,t}| \leq 0,01$). 159

10.10 Kontrolldauer der Trajektorien in Abhängigkeit vom Startwert bei vier Investorengruppen. 161

Tabellenverzeichnis

2.1	Charakterisierung von Fixpunkten in zweidimensionalen stetigen Systemen.	15
2.2	Charakterisierung von Fixpunkten in zweidimensionalen diskreten Systemen.	18
5.1	Stabilität des Kontrollansatzes nach Hübler.	40
5.2	Stabilitätsüberprüfung der Kontrolle nach Hübler.	42
5.3	Stabilitätsüberprüfung der Kontrolle des Modells von Kopel (1996) bei Anwendung des Kontrollansatzes von Hübler.	45
7.1	Systematisierung der Kontrollansätze.	82
7.2	Zusammenfassung der Kontrollregeln aus Abschnitt 6.1 und 6.2.	83
9.1	Stabilität des Fixpunktes \mathbf{x}_1^*	104
9.2	Durchschnittlicher Kontrollerfolg bei Variation des Gewichtungsfaktors s und der Höhe der maximal erlaubten Kontrolleingriffe.	124
9.3	Verteilung der kürzesten Kontrollzeiten auf die verschiedenen maximalen Eingriffshöhen.	132

Verzeichnis der wichtigsten Symbole

\propto	proportional im Limes
∞	Unendlich
\in	ist Element
\subset	Teilmenge
\forall	für alle
\exists	es gibt
\prod	Produktoperator
\sum	Summenoperator
$[\delta \mathbf{p}]_i$	i -te Element des Vektors $\delta \mathbf{p}$
$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right _{x^*}$	Ableitung von f nach \mathbf{a} an der Stelle x^*
\mathbf{A}^{-1}	Inverse der Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}', \mathbf{a}'	Transponierte der Matrix \mathbf{A} (des Zeilenvektors \mathbf{a})
\triangleright	aus Sarkovskii Theorem
$\ \cdot \ $	eine Norm des Vektorraums
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{W}^s	stabile invariante Mannigfaltigkeit
\mathbb{W}^u	instabile invariante Mannigfaltigkeit
\mathbb{W}^c	invariante Zentrumsmannigfaltigkeit
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
J, M, N	Mengen
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \phi$	Parameter im Zinsmodell von Tice und Webber (1997)
β	Reaktionsgeschwindigkeit im Modell von Brock und Hommes (1998)
κ	Anpassungsgeschwindigkeit im Model von Kopel (1996)
$\tilde{\varepsilon}$	stochastische Störgröße

λ	Eigenwert, Lyapunov-Exponent
λ	Diagonalmatrix mit Eigenwerten in der Diagonalen
Λ	Attraktormenge
μ	Erwartungswert
$\tilde{\nu}$	doppeltexponentiell verteilte Zufallsvariable
$\phi_t(\cdot)$	Phasenverlauf der Trajektorie
σ	Standardabweichung
Σ	Einfluss der Wiener Prozesse auf die Zustandsvariablen
τ	Zeitintervall
ξ	Zeitverzögerungsvektor
a	Parameter der logistischen Gleichung und im Model von Kopel (1996)
A	Diagonalmatrix im Modell von Tice und Webber (1997)
b	Parameter im Model von Kopel (1996)
c	Spaltenvektor
C	Konsum
$C(\cdot)$	Korrelationsintegral
dw	eindimensionaler Wiener Prozess
$d\mathbf{w}$	mehrdimensionaler Wiener Prozess
D_C	Kapazitätsdimension
D_K	Korrelationsdimension
$diag(\cdot)$	Diagonalmatrix
e	geplante Ausgaben im Modell von Tice und Webber (1997); Euler'sche Zahl (= 2,7182818...)
\mathbf{e}_i	Eigenvektor
\mathbf{e}_i^c	komplexer Eigenvektor
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
$E(\cdot)$	Erwartungswert
$E_{h,t}(\cdot)$	bedingter Erwartungswert der Investorengruppe h im Zeitpunkt t
f	Abbildungsvorschrift
\mathbf{f}_i	kontravarianter Basisvektor zum Basisvektor \mathbf{e}_i
$\mathbf{f}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot)$	vektorielle Abbildungsvorschriften
$F(\cdot)$	skalare Abbildungsvorschrift
F	Matrix mit den kontravarianten Basisvektoren \mathbf{f}_i als Spalten
F (\cdot)	mehrdimensionale Abbildungsvorschrift
$F_{\tilde{\nu}}(\nu)$	Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $\tilde{\nu}$
i	Zinssatz; komplexe Zahl $\sqrt{-1}$

\mathbf{i}_j	Einheitsvektor
I	Investitionen
\mathbf{I}	Identitätsmatrix
$\text{Im } \lambda_i$	Imaginärteil der komplexen Zahl λ_i
\inf	Infimum
J	Gütemaß (Inverse der Nutzenfunktion)
\mathbf{J}	Jakobimatrix
$\hat{\mathbf{J}}$	numerisch bestimmte Jakobimatrix
\mathbf{J}_R	Matrix des linearen Kontrollansatzes
\ln	natürlicher Logarithmus
m	Masse; Einbettungsdimension
m_d	reale Geldnachfrage
\mathbf{m}	Mengenvektor
$\bar{\mathbf{m}}$	Gleichgewichtsmengenvektor
n	Dimension; Parameter Model von Kopel (1996)
mod	Modulus
$O(\mathbf{x}^2)$	Taylorreihenglieder der Ordnung ≥ 2
p, r, x	Zustandsvariablen im Modell von Tice und Webber (1997)
p_i	Kontrollparameter
p_t	Preis des riskanten Wertpapiers im Modell von Brock und Hommes (1998)
\mathbf{p}	Vektor der Kontrollparameter
\mathbf{P}	Matrix im nutzenmaximierenden Kontrollansatz
\mathbf{Q}	Gewichtungsmatrix
\mathbf{Q}_R	Matrix im nutzenmaximierenden Kontrollansatz
\mathbf{Q}_S	Steuerbarkeitsmatrix
r	Zinssatz
\mathbf{r}	Kontrollvektor
\mathbf{R}	Kontrollmatrix
$\text{Rang } \mathbf{Q}_S$	Rang der Matrix \mathbf{Q}_S
$\text{Re } \lambda_i$	Realteil der komplexen Zahl λ_i
\mathbf{S}	Gewichtungsmatrix
$\text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$	linearer Raum, der durch die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ aufgespannt wird
t	Zeitindex
$\text{tr}[\cdot]$	Spur einer Matrix
$u(\cdot)$	Heaviside-Funktion

$U_{h,t}, u_{h,t}$	Gewinn des Investors Typ h
$V(\cdot)$	Potential eines Schwingers
$V_{h,t}(\cdot)$	bedingte Varianz der Investorengruppe h im Zeitpunkt t
\mathbf{w}	Ableitung der Abbildungsvorschrift nach einem Kontrollparameter
\mathbf{W}	Ableitung der Abbildungsvorschrift nach mehreren Kontrollparametern
W_t	Vermögen im Zeitpunkt t
$W(\varepsilon)$	Anzahl der Würfel mit der Kantenlänge ε
x, y	Zustandsvariable
x_t	Zustandsvariable zum Zeitpunkt t
\mathbf{x}, \mathbf{y}	Zustandsvektor
$[\mathbf{x}]_t$	Vektor mit der Zeitableitung von \mathbf{x}
$[\mathbf{x}]_y$	Matrix mit der Ableitung von \mathbf{x} nach y
$[x_i]_{yy}$	Matrix mit der 2. Ableitung von x_i nach y
y	Volkseinkommen im Modell von Tice und Webber (1997)
$z_{h,t}$	Aktiennachfrage der Investorengruppe h im Zeitpunkt t
$z_{s,t}$	Aktienangebot im Zeitpunkt t
Z_t	Parameter im Modell von Brock und Hommes (1998)