

# TENSOREN UND DYADEN

IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

---

# TENSOREN UND DYADEN

IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

---

EIN LEHRBUCH

VON

**E. BUDDE**

---

MIT 10 TEXTFIGUREN



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-663-06416-9      ISBN 978-3-663-07329-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-07329-1

---

ISBN 978-3-663-06416-9      ISBN 978-3-663-07329-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-07329-1

**Alle Rechte,**  
namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

---

Copyright, 1914, by Springer Fachmedien Wiesbaden  
Originally published by Friedr. Vieweg & Sohn in 1914  
Braunschweig, Germany.

---

## VORREDE.

---

Dieses Buch verfolgt den Zweck, dem Leser, der mit den Elementen der Mechanik und der Vektorenlehre bekannt ist, die Theorie der Tensoren und der mit ihnen nächstverwandten Größen in leicht verständlicher Weise zugänglich zu machen, so daß er in den Stand gesetzt wird, die vorhandene Literatur mit Verständnis und mit der zuweilen erforderlichen Kritik zu lesen. Um von einer festen und eindeutigen Definition ausgehen zu können, wurden zunächst die Tensoren als symbolische Faktoren definiert. Bei der Durcharbeitung derselben stellte sich bald heraus, daß die Behandlung der von R. H. Weber eingeführten asymmetrischen Tensoren auf Resultate führte, die vollständig mit denjenigen übereinstimmen, welche von Gibbs mit Hilfe von Dyadentripeln erlangt wurden. Die nähere Untersuchung zeigte, daß die Gibbsschen Dyadentripel mit den asymmetrischen Tensoren sachlich identisch sind. Es schien also zweckmäßig, für beide eine gemeinschaftliche Bezeichnung zu haben, und da habe ich das Wort „Diatensoren“ vorgeschlagen, welches an die beiden ursprünglichen Namen anklingt. Herr R. H. Weber, dem ich den Vorschlag vorlegte, erklärte sich damit einverstanden; Herr W. Voigt legte hauptsächlich Wert darauf, daß der Name Tensor für die in seinen grundlegenden Arbeiten behandelten symmetrischen Gebilde erhalten bliebe; das ist geschehen. Auch zu der Mehrzahl der übrigen neu eingeführten Bezeichnungen habe ich die Zustimmung des Herrn R. H. Weber eingeholt — die tiefergehenden allgemeinen Untersuchungen von W. Voigt kommen in diesem Buche nicht zur Verwendung.

Die Diatensoren erweisen sich von selbst als das natürliche Mittel zur analytischen Behandlung deformativer Bewegungen. Sie werden also im ersten Teil im Zusammenhang mit der affinprojektivistischen Raumtransformation behandelt, in der Art, wie dies bereits von Gibbs-Wilson geschehen ist. Dabei mußten naturgemäß manche Sätze, die Gibbs unter Benutzung der dyadischen Form aufgestellt hat, in der tensoriellen Form reproduziert werden. Es versteht sich von selbst, daß ich, soweit dies geschehen ist, die Priorität von Gibbs anerkenne. Auf die komplizierteren Bildungen, wie die „double dot multiplication“ von Gibbs, bin ich nicht eingegangen; sie liegen außerhalb des vorgesteckten Rahmens, und die mit ihnen erzielten Ergebnisse lassen sich, soweit sie in den Bereich des Buches fallen, mit den einfacheren Mitteln der Diatensorenrechnung schneller erzielen.

Eine gewisse Breite der Darstellung schien mir mit Rücksicht auf das Maß der vorausgesetzten Vorkenntnisse erforderlich; ich hoffe, in dieser Beziehung annähernd das Richtige getroffen zu haben.

Eingehende Anwendungen der Theorie vorzuzeigen wäre sehr erwünscht gewesen, verbot sich aber durch die Rücksicht auf den Umfang des Buches und den Wunsch, das Erscheinen zu beschleunigen.

Herr R. H. Weber hat die Güte gehabt, eine Korrektur zu lesen, und ich habe ihm für mancherlei wertvolle kritische Winke zu danken.

Feldafing, im September 1913.

**E. Budde.**

## Benutzte Literatur.

---

- W. Voigt:** Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle. Leipzig 1898.  
Physikerkongreß, Paris 1900, S. 277.  
Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung. Ann. d. Phys. **5**, S. 241 (1901).
- R. H. Weber** in H. Weber und J. Wellstein: Encyclopädie der Elementarmathematik, Bd. III. Leipzig und Berlin 1910.  
Über symmetrische und asymmetrische Tensoren. Göttinger Nachrichten, 1909, S. 371.
- J. W. Gibbs-E. B. Wilson:** Vector Analysis. New York und London 1909.
- M. Abraham** in der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften IV<sub>2</sub>, Heft 1.
- R. Gans:** Einführung in die Vektoranalysis. Leipzig und Berlin 1909.
- G. Jaumann:** Die Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig 1905.
- W. Thomson** und **P. G. Tait:** Handbuch der theoretischen Physik. Deutsch von H. Helmholtz und G. Wertheim. Braunschweig 1871.
- A. Sommerfeld:** Zur Relativitätstheorie I und II. Ann. d. Phys., Vierte Folge, **32**, S. 749 und **33**, S. 649 (1910).
- M. Laue:** Das Relativitätsprinzip. Braunschweig 1911.
- A. Einstein** und **M. Grossmann:** Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie. Leipzig und Berlin 1913.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorrede . . . . .	V
Benutzte Literatur . . . . .	VII
Druckfehler . . . . .	XII

## Erster Teil.

### Skalare Tensoren und Diatensoren, speziell als Mittel zur analytischen Behandlung der affin-projektivischen Bewegung.

Vorbemerkung I über Schreibart . . . . .	1
Vorbemerkung II, Reziprokale Vektorensysteme nach Gibbs . . . . .	3

## Erster Abschnitt.

### Diatensoren in tensorieller Form.

#### Erstes Kapitel: Tensoren.

1. Homogene lineare Vektorfunktion; Einführung des Diatensors . . . . .	8
2. Einführung des Tensors . . . . .	9
3. Tensorellipsoid usw. . . . .	10
4. Änderungen des Koordinatensystems . . . . .	13
5. Hauptachsen, Konstituenten . . . . .	14
6. Transformation von den Hauptachsen auf irgend ein Koordinatensystem und umgekehrt. . . . .	15
7. Invarianten . . . . .	17
8. Freie Wählbarkeit von Tensorgliedern; Gleichheit von Tensoren . . . . .	18
9. Vorläufige Betrachtung der Wirkung eines Tensors; Dehnungsellipsoid . . . . .	19
10. Der inverse Tensor . . . . .	21
11. Additive Eigenschaften . . . . .	22
12. Produktenskalare zweier Tensoren . . . . .	23
13. <i>tens</i> $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ , <i>tens</i> $\mathfrak{A}^2$ . . . . .	24
14. Impuls- und Trägheitsmomente . . . . .	26

#### Zweites Kapitel: Der einzelne Diatensor.

15. Der Diatensor . . . . .	29
16. Transformation von den Achsen des Diatensors auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. . . . .	30
17. Beziehungen zwischen den Koeffizienten $\alpha_\nu$ , $\bar{\alpha}_\nu$ . . . . .	33
18. Transformation von einem rechtwinkligen System auf ein anderes . . . . .	34
19. Aufsuchung der Achsen . . . . .	35

	Seite
20. Diatensor mit zwei oder drei gleichen Konstituenten; Versagen der Winkelbestimmung für die Achsenlagen . . . . .	39
21. Invarianten . . . . .	41
22. Freie Wählbarkeit; Gleichheit von Diatensoren . . . . .	43
23. Konjugation, Symmetrie, Antimetrie . . . . .	44
24. Hamiltonsche Gleichung des Tensors . . . . .	46
25. Imaginäre Achsen des antimetrischen Diatensors . . . . .	47
26. Identität eines vektoriellen Produktes mit einem antimetrischen Diatensorvektorprodukt . . . . .	47
27. Ellipsoide . . . . .	49
28. Hilfsgrößen I; charakteristische Vektoren des Diatensors . . . . .	50
29. Bemerkung über die Tripelprodukte erster Art . . . . .	52
30. Hilfsgrößen II; der Kodiatensor . . . . .	52
31. Der Diatensor als Prä- und Postfaktor . . . . .	56
32. Produkt $\mathfrak{u}\Phi\mathfrak{v}$ . . . . .	57
33. Vollständige und unvollständige (planare und lineare) Diatensoren . . . . .	57

Drittes Kapitel: Additive Eigenschaften, additive Zerlegung des Diatensors und die auf dieselbe gegründete Transformation des Raumes.

34. Additive Eigenschaften . . . . .	60
35. Die erste fundamentale Zerlegung des Diatensors . . . . .	61
36. Die Wirkung des Diatensors auf ein einzelnes Argument (negative Konstituenten, Einheitstensor, unendlich kleine Antitensoren) . . . . .	64
37. Die affine Raumtransformation . . . . .	66
38. Die Rolle von $\Phi$ , $\Phi_2$ und $S_3$ bei der affinen Transformation . . . . .	68
39. Die endliche reine Deformation . . . . .	68
40. Der Zusatzfaktor für sich . . . . .	71
41. Versoren . . . . .	73
42. Der Diatensor der einfachen Schiebung . . . . .	76

Viertes Kapitel: Die Multiplikation der Diatensoren.

43. Operative Multiplikation . . . . .	78
44. Operative Multiplikation zweier Diatensoren . . . . .	79
45. Die charakteristischen Vektoren bei der Multiplikation . . . . .	82
46. Potenzen . . . . .	83
47. Konjugationsverhältnisse . . . . .	83
48. Hebung von Diatensoren . . . . .	84
49. Kodiatensor eines Produktes . . . . .	85
50. Einheitstensor oder Idemfaktor . . . . .	86
51. Inverse oder reziproke Diatensoren . . . . .	88
52. Vollständigkeit und Unvollständigkeit bei Produkten . . . . .	90

Fünftes Kapitel: Die Faktorenerlegung und die auf dieselbe gegründete Behandlung der Transformation des Raumes.

53. Faktorenerlegung . . . . .	91
54. Versoren in der Normalform . . . . .	92
55. Unendlich kleine Versoren . . . . .	98
56. Allgemeine Zerlegung und Normalform des Diatensors . . . . .	100



	Seite
57. Andere Zerlegung; Kriterien; Schieber . . . . .	106
58. Übersicht über die möglichen Arten der Raumtransformation . . . . .	110
59. Die allgemeine Bewegung eines kleinen Volumens . . . . .	114
60. Die Hamilton-Cayleysche Gleichung . . . . .	117

## Zweiter Abschnitt.

### Diatensoren in Form von Dyadentripeln.

#### Erstes Kapitel: Die einzelne Dyade.

61. Definition der Dyade . . . . .	120
62. Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	122
63. Gleichheit zweier Dyaden . . . . .	122
64. Dyaden aus Grundvektoren . . . . .	123
65. Freie Wählbarkeit des Dyadoproduktes . . . . .	123
66. Konjugierte Dyaden und Dyadoprodukte . . . . .	124
67. Addition bei Dyaden und Dyadoprodukten . . . . .	125
68. Symmetrische Dyaden . . . . .	126
69. Operative Multiplikation von Dyaden . . . . .	126

#### Zweites Kapitel: Dyadentripel.

70. Reduktion von Dyadensummen . . . . .	127
71. Dyadentripel . . . . .	129
72. Distributive Eigenschaften des Dyadentripels . . . . .	129
73. Konjugierte Dyadentripel, Symmetrie . . . . .	130
74. Operative Multiplikation von Dyadentripeln . . . . .	131
75. Gleichheit zweier Dyadentripel . . . . .	131
76. Der dritte Skalar des Dyadentripels . . . . .	132
77. Die Transformation des Dyadentripels I . . . . .	132
78. Transformation II . . . . .	137
79. Das Dyadentripel als Diatensor . . . . .	138
80. Vergleichung der Normalformen . . . . .	142
81. Einführung reziproker Vektorensysteme . . . . .	146
82. Einteilung der Transformationen . . . . .	157

#### Drittes Kapitel: Hinweise auf Begriffserweiterungen.

83. Pseudoskalare Diatensoren . . . . .	159
84. Jaumanns rotorische Dyaden . . . . .	160

#### Anhang zum ersten Teil.

Analytische Behandlung der einfachen Schiebung . . . . .	162
--	-----

## Zweiter Teil.

**Additvdiatensoren, derivative Beziehungen, Entwicklung des Tensorbegriffes aus Zerlegungs- und Transformationseigenschaften, selbständige Tensoren und Diatensoren.**

## Erster Abschnitt.

**Fortsetzung der Untersuchungen über den als symbolischen Faktor gedachten Diatensor.**

## Erstes Kapitel: Additive Diatensoren.

	Seite
85. Die Spezies der Diatensoren . . . . .	175
86. Algebra der Additvdiatensoren . . . . .	176
87. Dyadische Form des additiven Tensors und Diatensors . . . . .	180
88. Ellipsoide . . . . .	181
89. Kriterien . . . . .	182

## Zweites Kapitel: Derivative Operationen.

90. Operationen am ganzen Diatensor . . . . .	183
91. Erweiterungen des Gaußschen Satzes . . . . .	186

## Drittes Kapitel: Vektorfelder und Diatensoren.

92. Bildung von Diatensoren aus den Differentialquotienten eines Vektors	191
93. Der derivative Diatensor eines Vektorfeldes . . . . .	193
94. Dyadische Form des derivativen Diatensors . . . . .	198
95. Homogene Vektorfelder . . . . .	200
96. Ersatz eines Vektorfeldes durch ein Diatensorfeld . . . . .	203

## Viertes Kapitel: Orthogonale krummlinige Koordinaten.

97. Einführung . . . . .	205
98. Vektoren in krummlinigen Koordinaten . . . . .	211
99. Tensoren in krummlinigen Koordinaten . . . . .	213

## Zweiter Abschnitt.

**Die Voigtsche Ableitung des Tensorbegriffes und die selbständigen Tensoren.**

## Erstes Kapitel: Die Voigtsche Ableitung des Tensorbegriffes.

100. Der Einzeltensor . . . . .	216
101. Transformation des Einzeltensors . . . . .	218
102. Die Spezies des Einzeltensors . . . . .	220
103. Tensor . . . . .	221

Zweites Kapitel: Selbständige Tensoren und Diatensoren.	
	Seite
104. Der Voigtsche Spannungstensor für homogen verteilte, im Gleichgewicht befindliche Oberflächenkräfte . . . . .	223
105. Diatensor für nicht im Gleichgewicht befindliche Oberflächenkräfte	231
106. Ablösung des Spannungstensors von der speziellen Gestalt des angegriffenen Körpers . . . . .	232
107. Spezies und Klasse des Spannungstensors . . . . .	233
108. Verallgemeinerung auf beliebige Vektoren; Charakter . . . . .	234
109. Zur Algebra der vektoralen Tensoren . . . . .	236
110. Die Klasse der physikalischen Eigenschaften von Kristallen . . . .	241
111. Schlußkapitel; Hinweise auf fernere Begriffserweiterungen . . . .	245
Register der Definitionen . . . . .	247

## Druckfehler.

- Seite 24, Gleichung (2): statt *tens*  $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$  lies *tens*  $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ , ebenso in der folgenden Zeile.
- „ 31, Gleichung (6), in der neunten Gleichung: statt  $\gamma_3$  lies  $\bar{\gamma}_3$ .
- „ 34, Zeile 12 von unten: statt „Vorbemerkung  $\mathbf{d}$ “ lies „Vorbemerkung  $\mathbf{f}$ “.
- „ 38, „ 14 „ oben: statt  $t_\xi$  lies „ $t_{\xi\xi}$  in  $t_\xi$  abkürzt und  $t_\xi$ “.
- „ 43, „ 14 „ unten: statt  $(\tau), \mathfrak{A}$  lies  $(\tau)\mathfrak{A}$ .
- „ 72, Gleichung (7): statt  $h^2(r_y s + r_z s_y)$  lies  $h^2(r_y s_y + r_z s_z)$ .
- „ 84, Anmerkung, Zeile 4: statt  $(\Psi\Phi)_c$  lies  $(\Phi\Psi)_c$ .
- „ 105, Zeile 18 von unten: statt „Gleichung (14)“ lies „Gleichung (15)“.
- „ 115, „ 11 „ oben: statt  $d\mathbf{r}_0$  lies  $d\mathbf{r}_0 +$ .
- „ 123 u. 124, in der Seitenüberschrift: statt „Dyadenprodukten“ lies „Dyadoproducten“.
- „ 143, Gleichung (5): statt  $\mathcal{P}_{21}$  lies  $S_{21}$ .
- „ 177, Zeile 3 von oben: statt  $s_2$  lies  $s_{21}$ .
- „ 177, Gleichungen (1) und (2): Diese Gleichungen sind mit symmetrischen  $\Phi$  und  $\Psi$  gerechnet. Es fehlt der Hinweis darauf, daß die leicht vorzunehmende Rechnung mit asymmetrischen  $\Phi$  und  $\Psi$  auf dieselbe Gleichung (3) führt, welche im Text gegeben ist.