Teubner Studienbücher

Mechanik

Becker: **Technische Strömungslehre.** 6. Aufl. DM 24,80

Becker: **Technische Thermodynamik.** DM 29,80

Becker/Bürger: **Kontinuumsmechanik.** DM 36,– (LAMM)

Becker/Piltz: **Übungen zur Technischen Strömungslehre.** 3. Aufl. DM 21,80

Bishop: **Schwingungen in Natur und Technik.** DM 25,80

Böhme: **Strömungsmechanik nicht-newtonscher Fluide.** DM 36,– (LAMM)

Bremer: **Dynamik und Regelung mechanischer Systeme.** DM 36,– (LAMM)

Hagedorn: **Aufgabensammlung Technische Mechanik.** DM 22,80

Hahn: **Bruchmechanik.** DM 36,– (LAMM)

Magnus: **Schwingungen.** 4. Aufl. DM 32,– (LAMM)

Magnus/Müller: **Grundlagen der Technischen Mechanik.** 5. Aufl. DM 34,– (LAMM)

Müller/Magnus: **Übungen zur Technischen Mechanik.** 3. Aufl. DM 34,– (LAMM)

Pfeiffer/Reithmeier: **Roboterdynamik.** DM 34,–

Schiehlen: **Technische Dynamik.** DM 34,– (LAMM)

Unger: **Konvektionsströmungen.** DM 42,–

Teubner Studienbücher Mechanik

H. Bremer

Dynamik und Regelung mechanischer Systeme

Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM

Herausgegeben von
Prof. Dr. G. Hotz, Saarbrücken
Prof. Dr. P. Kall, Zürich
Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. K. Magnus, München
Prof. Dr. E. Meister, Darmstadt

Band 67

Die Lehrbücher dieser Reihe sind einerseits allen mathematischen Theorien und Methoden von grundsätzlicher Bedeutung für die Anwendung der Mathematik gewidmet; andererseits werden auch die Anwendungsgebiete selbst behandelt. Die Bände der Reihe sollen dem Ingenieur und Naturwissenschaftler die Kenntnis der mathematischen Methoden, dem Mathematiker die Kenntnisse der Anwendungsgebiete seiner Wissenschaft zugänglich machen. Die Werke sind für die angehenden Industrie- und Wirtschaftsmathematiker, Ingenieure und Naturwissenschaftler bestimmt, darüber hinaus aber sollen sie den im praktischen Beruf Tätigen zur Fortbildung im Zuge der fortschreitenden Wissenschaft dienen.

Dynamik und Regelung Mechanischer Systeme

Von Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Hartmut Bremer
Technische Universität München

Mit 101 Bildern

B. G. Teubner Stuttgart 1988

Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Hartmut Bremer

Geboren 1945 in Dobbertin/Mecklenburg. Von 1969 bis 1974 Studium des Maschinenbaus in München. Seit 1983 Privatdozent für Mechanik an der Technischen Universität München.

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bremer, Hartmut:
Dynamik und Regelung mechanischer Systeme / von Hartmut Bremer. – Stuttgart : Teubner, 1988
(Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik ; Bd. 67)
(Teubner-Studienbücher : Mechanik)
ISBN 978-3-519-02369-2 ISBN 978-3-663-05674-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-05674-4

NE: 1. GT

Gesamtherstellung: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstraße

VORWORT

Von *Mechanik* soll die Rede sein – oder zumindest einem Teilgebiet davon. Und zwar von der Mechanik, die durch GALILEI 1638 und NEWTON 1687 zum Durchbruch als exakte *Natur-Wissen-schaft*, von EULER 1750/75 zur Blüte und von LAGRANGE 1788 und HAMILTON 1835 zur Vollendung geführt wurde – um mit einigen Namen einen Rahmen zu stecken. Daß hierbei die Mechanik eine der ersten Naturwissenschaften war, ihr zumindest "eine Schrittmacherrolle zugefallen ist"[1], macht das Thema reizvoll, ist aber natürlich kein ausreichender Grund, zu den vorhandenen Abhandlungen eine weitere hinzuzufügen. Vielmehr liegt eine gewisse Berechtigung in dem Versuch, das vorhandene Material zu ordnen und aus einem Blickwinkel heraus zu betrachten, der den momentanen Anforderungen an die Mechanik gerecht wird.

Wo steht die Mechanik heute? "Die Mechanik der Rezepte – in früheren Jahrhunderten durchaus effektiv – hat ausgedient. Die weitgehenden Idealisierungen, in der als klassisch bezeichneten Periode noch als angemessen und zulässig akzeptiert, müssen jetzt mehr und mehr abgebaut und durch realistischere Annahmen ersetzt werden"[1]. Dies kennzeichnet einen Wandel von einer "Ideal-Mechanik zu einer Real-Mechanik"[1]. Als Realmechnik kann die Mechanik, die früher Vorbildcharakter für andere Wissenschaften hatte, "wieder beispielgebend sein oder werden. Wir sollten uns also nicht von dem gelegentlichen Geschwätz über die angeblich abgeschlossene und damit nicht mehr entwicklungsfähige Mechanik verwirren lassen. Mechanik, gerade die Technische Mechanik, wird auch weiterhin entwicklungsfähig, ja, in einzelnen Bereichen entwicklungsbedürftig bleiben. Allerdings sollten wir sie heraushalten aus dem Sog schnell wechselnder modischer Formalismen"[1]. Formalismen werden wesentlich mitgeprägt durch die Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechenmaschinen, aber auch die Realmechanik profitiert von ihnen, denn erst durch die Rechenmaschine wird die Möglichkeit eröffnet, Problemlösungen anzugehen, an die ohne die Maschine nicht im entferntesten zu denken wäre.

Welche Anforderungen werden an die Mechanik gestellt? – Mechanik gehört, wie alle Naturwissenschaften, auch in den Rahmen unserer Kulturgeschichte. Der Blick auf mancherlei Jahreszahlen, aus diesem Grund bewußt angefügt, läßt Querverbindungen zu anderen Ereignissen zu und kennzeichnet die historische Entwicklung der Mechanik. Diese Entwicklung ist längst nicht abgeschlossen, im Gegenteil, sie hält mit dem Stichwort "Realmechanik" an. Und diese Realmechanik muß sich an der HERTZschen Forderung messen lassen, mit der einfachst möglichen Vorgehensweise zum Ziel zu gelangen, ohne dabei den Blick auf die Zusammenhänge zu verstellen.

In diesem Sinne ist der Versuch, der HERTZschen Forderung gerecht zu werden, nichts anderes als die Darstellung des Vorhandenen aus dem Blickwinkel einer

[1] [MAG 86]

REALmechanik heraus. Dabei müssen die verwendeten Hilfsmittel deutlich und die Voraussetzungen klar abgegrenzt sein. Nimmt man als eines der wesentlichen Hilfsmittel – und das wird der eingeschlagene Weg sein – die "virtuelle Arbeit" zur Fundierung der mechanischen Prinzipien und Methoden, so wird gleichzeitig der Weg geöffnet zur Optimierung (Variationsrechnung), und die Frage optimaler Beeinflussung mechanischer Systeme durch geeignete Parameter oder Regelkräfte kann in Angriff genommen werden.

Das vorliegende Buch ist im Laufe der letzten fünf Jahre entstanden und spiegelt die Richtung wieder, die vor nunmehr zweiundzwanzig Jahren durch den Gründer des Lehrstuhls B für Mechanik der Technischen Universität München, Prof. Dr. Dr. Kurt Magnus, eingeschlagen wurde. Dabei versteht es sich von selbst, daß im Laufe dieser Zeit zahlreiche Wissenschaftler einen reichhaltigen Erfahrungsschatz zusammengetragen haben, auf dem aufgebaut und von dem ein Teil direkt übernommen werden konnte – das Anliegen "Darstellung des Vorhandenen" drückt dies bereits aus. Ihnen, besonders den Professoren J. Lückel, P.C. Müller, H. Pichert, K. Popp, W.O. Schiehlen und G. Schweitzer gebührt mein Dank für all die vermittelten Kenntnisse genauso wie meinen früheren und jetzigen Kollegen für die tatkräftige und moralische Unterstützung bei dem oft mühevollen Werdegang eines Buches. Ein solches – und insbesondere ein wissenschaftliches Buch – ist immer in gewissem Sinn eine Gemeinschaftsarbeit. Zu ihrem Gelingen trägt nicht zuletzt auch das Betriebsklima bei, für das – über die zahlreichen Fachdiskussionen hinaus! – dem Lehrstuhlinhaber, Prof. Dr. Friedrich Pfeiffer, herzlich gedankt sei, ebenso wie seiner "mitverantwortlichen Mannschaft", meinem Freund, Priv.-Doz. Dr. Heinz Ulbrich, und Herrn Dipl.-Ing., Dipl.-Math. Eduard Reithmeier für manchen mathematischen Rat. Es ist eine – wie ich glaube, gute – Sitte, das Vorwort dazu zu benutzen, sich bei allen zu bedanken, die in irgendeiner Form Hilfestellung geleistet haben. Die Liste der Danksagungen wird dabei immer unvollständig bleiben. Sie soll jedoch nicht abgeschlossen werden, ohne den Dank an Herrn Dr. P. Spuhler vom Teubner Verlag für die immer freundliche Zusammenarbeit und an Frau Monika Böhnisch für die Geduld und Nerven erfordernde Erstellung der druckreifen Buchvorlage auszudrücken. Und schließlich gilt mein besonders herzlicher Dank meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. Dr. Kurt Magnus, der wie kaum ein anderer in der Lage war und ist, bei seinen Schülern die Freude an der Materie zu wecken.

München, im Juli 1988 Hartmut Bremer

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung: Der Inhalt des vorliegenden Buches ist nach einzelnen Schwerpunkten so abgefaßt, daß ein direkter Einstieg in die einzelnen Kapitel – unabhängig von den anderen – möglich sein sollte. Hierfür mag die tabellarische Kurzzusammenfassung der Einzelkapitel, im Inhaltsverzeichnis durch Kursivschrift gekennzeichnet, hilfreich sein.

1 Einleitung **1**
1.1 Zum Inhalt 4
1.2 Voraussetzungen 6
1.3 Modellbildung 7

2 Kinematik **13**
2.1 Kinematik des starren Körpers 13
2.1.1 Transformationen 14
2.1.2 Geschwindigkeiten 15
2.1.3 Beschleunigungen 18
2.1.4 Relativbewegungen 20
2.1.5 Kleine Drehungen 20
2.2 Kinematik deformierbarer Körper 21
2.3 Kinematik von Mehrkörpersystemen 24
2.4 Zustand mechanischer Systeme 34

Zusammenfassung Kinematik 36

3 Prinzipien und Axiome **38**
3.1 Differentielle Prinzipien 38
3.1.1 Virtuelle Verschiebung, Variation und virtuelle Arbeit 38
3.1.2 Das Prinzip von d'ALEMBERT und das Prinzip von LAGRANGE 44
3.1.3 Das Prinzip von JOURDAIN und das Prinzip von GAUSS 44
3.1.4 Eine Zentralgleichung 46
3.1.5 Die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art 47
3.1.6 Die kanonischen HAMILTON-Gleichungen 48
3.1.7 Die Gleichungen von GIBBS und APPELL 49
3.1.8 Energieerhaltung, kinetische und potentielle Energie 50
3.1.8.1 Kinetische Energie 52
3.1.8.2 Potential 54

3.1.8.2.1 Federpotential 55
3.1.8.2.2 Potential deformierbarer Körper 56
3.1.8.2.3 Gravitationspotential 67
3.1.9 Virtuelle Arbeit über Impuls- und Drallsatz 67
3.2 Axiome der Dynamik 71
3.2.1 Der Impulssatz 72
3.2.2 Der Drallsatz 73
3.3 Minimalprinzipien 73
3.3.1 Das Prinzip der kleinsten Aktion von MAUPERTUIS, LEIBNIZ, EULER und LAGRANGE 74
3.3.2 Das Prinzip von JACOBI und das Prinzip von GAUSS 75
3.3.3 Das Prinzip von HAMILTON 77
3.4 Zusammenfassung – Prinzipien und Axiome 77

Methoden der Dynamik 80

4 Methoden der Dynamik **79**
4.1 Qualitative Aussagen über die Lösung 82
4.2 Quantitative Berechnung (Bewegungs-, Zustandsgleichungen) 98
4.2.1 Funktionalmatrizen 100
4.2.2 Einige Anmerkungen zu Rechnerformalismen 100
4.2.3 Subsysteme 102
4.2.4 Zustandsgleichungen 104

Ermittlung der Zustandsgleichungen 105

5 Optimale Systeme **107**
5.1 Grundaufgabe der Optimierung 108
5.1.1 Erste Integrale 110
5.1.2 Hinreichende Bedingungen 112
5.2 Nebenbedingungen 116
5.2.1 Variationsaufgaben mit festen Integrationsgrenzen – LAGRANGEsche Multiplikationsregel 116
5.2.2 Freie obere Grenze 120
5.3 Maximumprinzip und allgemeine Optimierungsaufgaben 122

Formulierung des Maximumprinzips 130

6 Lineare Systeme **131**
6.1 Begründung der Linearisierung 131
6.2 Linearisierung – Grundmodell 134
6.2.1 Allgemeine Bewegungsgleichungen 134
6.2.1.1 Minimalgeschwindigkeiten 140
6.2.1.2 Kongruenztransformation 142
6.2.2 Struktur der Bewegungsgleichungen 144
6.3 Allgemeine Lösung zeitinvarianter Schwingungssysteme 149
6.3.1 Eigenwerte, Eigenvektoren 149
6.3.2 Orthogonalität der Eigenvektoren 150
6.3.3 Mehrfache Eigenwerte 152
6.3.4 Fundamentalmatrix 156
6.3.5 Partikuläre Lösung 158
6.3.6 Der Satz von CAYLEY und HAMILTON 158
6.3.7 Berechnung der Fundamentalmatrix 160
6.4 Eigenwertproblem: Balken, Platten, kontinuierliche Systeme 163
6.4.1 Klassische Balkenschwingungstheorie 164
6.4.2 Das Verfahren von RITZ 172
6.4.2.1 Lokale Koordinatenfunktionen 175
6.4.2.2 Globale Koordinatenfunktionen 178
6.4.2.3 Globale und lokale Koordinatenfunktionen zur Berechnung von Plattenschwingungen, zusammengesetzte Strukturen 180
6.4.2.4 Finite Elemente 185
6.4.3 Lösung der homogenen Gleichung 188
6.4.4 Führungsbewegungen 190
6.4.5 Probleme der Linearisierung 194
6.5 Stabilität zeitinvarianter linearer Schwingungssysteme 202
6.5.1 Stabilitätsbegriff 202
6.5.2 LJAPUNOVsche Matrizengleichung 203
6.5.3 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit 204
6.5.4 Stabilitätssätze mechanischer Systeme 206
6.5.5 LIENARD-CHIPART-Kriterium 211
6.6 Beschränktheit der partikulären Lösung 213
6.7 Lineare zeitinvariante Systeme – Ausblick 217

Autonome lineare Schwingungssysteme 221

7 Systemsynthese **222**
7.1 Voraussetzungen: Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit 222
7.2 RICCATIsche Differentialgleichung: Adaptive optimale Regelung 225
7.2.1 RICCATI-Regler für zeitinvariante Systeme 227
7.2.2 Lösungsverfahren 228
7.3 LJAPUNOV-Gleichung 230
7.3.1 Polkonfiguration 231
7.3.2 Berechnung der Zustandsrückführung bei Polvorgabe für Eingrößenregelsysteme ($\mathbf{u} \in R^1$) 232
7.4 Realisierung 236
7.4.1 Diskretisierung 236
7.4.2 Stellgrößenbeschränkung 238
7.4.3 Parameterempfindlichkeit 242
7.4.4 Zustandsbestimmung 248
7.4.5 Störverhalten, Störgrößenaufschaltung 251

8 Anwendungsbeispiele **256**
8.1 Schwingungsanalyse von Planetengetrieben 256
8.1.1 Ersatzmodell 256
8.1.2 Bewegungsgleichungen 257
8.1.3 Numerische Simulation 261
8.1.4 Mehrstufengetriebe 264
8.1.5 Numerische Ergebnisse 268
8.2 Regelung eines elastischen Rotors 269
8.2.1 Bewegungsgleichungen/Zustandsgleichungen 269
8.2.2 Schwingungsformen – Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit 271
8.2.3 RICCATI-Regler 276
8.2.4 Ausgangsrückführung 279
8.3 Regelung einer Epitaxie-Zentrifuge 282
8.3.1 Bewegungsgleichungen/Zustandsgleichungen 282
8.3.2 Steuerbarkeit-Beobachtbarkeit 286
8.3.3 Festwertregler 287
8.3.4 Adaptive Regelung/Digitale Regelung 288
8.4 Regelung einer Magnetschwebebahn/unsichere Parameter 290
8.4.1 Bewegungsgleichungen/Zustandsgleichungen/Regelung 290
8.4.2 Parameterempfindlichkeit 293

8.5 Robotergelenkregelung mit Störgrößenaufschaltung 295
8.5.1 Dezentrale Regelungen 295
8.5.2 Ersatzmodell/Zustandsgleichung 296
8.5.3 Reglerauslegung/-realisierung 298
8.5.4 Störgrößenaufschaltung (Störbeobachter) 301
8.5.4.1 Minimalbeobachter 302
8.5.4.2 Minimales Störmodell 309

Anhang: Grundlagen der Matrizenrechnung 311

Literaturverzeichnis 319
Sachverzeichnis 323

SYMBOLVERZEICHNIS

$\mathbf{a}$	Absolutbeschleunigung ($\in R^3$), Zustandsgleichung ($\in R^n$)
$\mathbf{b}$	Stelleingriffsvektor ($\in R^n$), Störvektor ($\in R^n$)
$\mathbf{c}$	Koeffizientenvektor ($\in R^n$)
d	Abstand, Durchmesser
$\mathbf{e}$	Verzerrungsvektor ($\in R^6$) , Einheitsvektor (z.B. $\in R^3$)
$\mathbf{f}$	Kraft ($\in R^3$), Zahl der Lagefreiheitsgrade ($\in R^1$)
$\mathbf{g}$	Vektor der nichtlinearen Beschleunigungsanteile ($\in R^3$), Vektor der Nebenbedingungen ($\in R^q$: q Zahl der Nebenbedingungen), Zahl der Geschwindigkeitsfreiheitsgrade ($\in R^1$)
$\mathbf{h}$	Inhomogener Term der Bewegungsgleichung ($\in R^g$)
i	imaginäre Einheit, Zählindex
k	Zahl der Meßgrößen
$\mathbf{l}$	Moment ($\in R^3$)
m	Masse, Zahl der Steuergrößen
n	Zustandsdimension ($n = g + f$)
$\mathbf{p}$	Impuls ($\in R^3$), verallgemeinerter Impuls (Hamilton, $\in R^g$), Zahl der MKS-Körper ($\in R^1$)
$\mathbf{q}$	Koordinaten, beliebig
$\mathbf{r}$	Ortsvektor ($\in R^3$), Radius ($\in R^1$)
$\dot{\mathbf{s}}$	Minimalgeschwindigkeiten ($\in R^g$)
$\mathbf{u}$	Steuervektor ($\in R^m$), Verschiebungsfunktion ($\in R^1$)
$\mathbf{v}$	Absolutgeschwindigkeit ($\in R^3$), Verschiebungsfunktion ($\in R^1$)
w	Verschiebungsfunktion
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor ($\in R^n$)
$\bar{\mathbf{x}}$	(Rechts-) Eigenvektor ($\in R^n$)
$\mathbf{y}$	linearisierte Minimalkoordinaten ($\in R^g$)
$\bar{\mathbf{y}}$	(Links-) Eigenvektor ($\in R^n$, Zustandsraum), (Rechts-) Eigenvektor ($\in R^g$, Bewegungsgleichungen)
$\mathbf{z}$	Minimalkoordinaten $\left(\in R^f\right)$
$\bar{\mathbf{z}}$	Systemkoordinaten ($\in R^{6p}$)

$\mathbf{A}$	Systemmatrix ($\in R^{n,n}$), Transformationsmatrix ($\in R^{3,3}$), Fläche ($\in R^1$)
A	Trägheitsmoment ($\in R^1$)
$\mathbf{B}$	Stelleingriffsmatrix ($\in R^{n,m}$)
B	Trägheitsmoment ($\in R^1$)
$\mathbf{C}$	Meßmatrix $\left(\in R^{k,n}\right)$
C	Trägheitsmoment ($\in R^1$)
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix ($\in R^{g,g}$)

D	Deviationsmoment ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix (z.B. $\in \mathrm{R}^{3,3}$), Elastizitätsmodul ($\in \mathrm{R}^1$) Weierstraßfunktion ($\in \mathrm{R}^1$)
E	Deviationsmoment ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{F}$	Funktionalmatrix (z.B. $\in \mathrm{R}^{6p,g}$)
F	Deviationsmoment ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{G}$	Gyroskopische Matrix ($\in \mathrm{R}^{g,g}$), Gleitmodul ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{H}$	Hamiltonmatrix ($\in \mathrm{R}^{2n,2n}$), Hooke'sche Matrix ($\in \mathrm{R}^{6,6}$), Hamiltonfunktion ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{I}$	Trägheitstensor ($\in \mathrm{R}^{3,3}$), Massenträgheitsmomente
$\bar{\mathbf{I}}$	Trägheitstensor ($\in \mathrm{R}^{3,3}$), Flächenträgheitsmomente
$\mathbf{J}$	Jacobimatrix (z.B. $\in \mathrm{R}^{6p,f}$)
$\mathbf{K}$	Fesselungsmatrix konservativer Lagekräfte ($\in \mathrm{R}^{g,g}$)
$\mathbf{L}$	Drall ($\in \mathrm{R}^3$), Lagrangefunktion ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{M}$	Massenmatrix ($\in \mathrm{R}^{g,g}$)
$\mathbf{N}$	Matrix der nichtkonservativen Lagekräfte ($\in \mathrm{R}^{g,g}$)
$\mathbf{P}$	Lösungsmatrix der Riccati- bzw. Ljapunovgleichung ($\in \mathrm{R}^{n,n}$), Leistung ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{Q}$	Bewertungsmatrix ($\in \mathrm{R}^{n,n}$), Steuer-/Beobachtbarkeitsmatrix zweiter Art ($\in \mathrm{R}^{n,n}$, Indices S bzw. B)
$\mathbf{R}, \mathbf{S}$	Bewertungsmatrix ($\in \mathrm{R}^{n,n}$)
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix ($\in \mathrm{R}^{n,n}$), kinetische Energie ($\in \mathrm{R}^1$)
U	Ljapunovfunktion
V	Volumen, Potential
$\mathbf{W}$	Steuer-/Beobachtbarkeitsmatrix erster Art ($\in \mathrm{R}^{n,n}$, Indices S bzw. B), Arbeit ($\in \mathrm{R}^1$)
$\mathbf{X}$	Modalmatrix (Rechtseigenvektoren, $\in \mathrm{R}^{n,n}$)
$\mathbf{Y}$	Modalmatrix (Linkseigenvektoren, $\in \mathrm{R}^{n,n}$)
$\overline{\mathbf{Y}}$	Modalmatrix (Rechtseigenvektoren, $\in \mathrm{R}^{g,g}$)

$\alpha\ \beta\ \gamma$	Kardanwinkel
δ	Variationsparameter, Dirac-Distribution, Eigenwertrealteil
ε	Störungsparameter, Variationsparameter
$\boldsymbol{\eta}$	Quasikoordinaen der Drehung ($\in \mathrm{R}^g$), Variation ($\varepsilon\eta$, $\in \mathrm{R}^1$), Modalkoordinaten ($\in \mathrm{R}^g$), modaler Meßvektor $\left(\in \mathrm{R}^k\right)$
κ	Querschubkorrekturfaktor, $\overline{\overline{\kappa}}$ Verwölbungsfunktion
$\boldsymbol{\lambda}$	adjungierte Variable ($\in \mathrm{R}^n$), Eigenwert ($\in \mathrm{R}^1$)
ν	Poissonzahl, Frequenz
$\boldsymbol{\xi}$	Modalkoordinaten ($\in \mathrm{R}^n$)
$\boldsymbol{\rho}$	Unwucht ($\in \mathrm{R}^3$), Dichte ($\in \mathrm{R}^1$)
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungsvektor ($\in \mathrm{R}^6$), Empfindlichkeitsfunktion ($\in \mathrm{R}^p$, p : Parameterzahl)

$\boldsymbol{\varphi}$	(Kardan-) Winkel ($\in \mathrm{R}^3$)
$\psi \;\; \theta \;\; \varphi$	Euler-Winkel
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit ($\in \mathrm{R}^3$), Eigenwertimaginärteil ($\in \mathrm{R}^1$), Frequenz ($\in \mathrm{R}^1$)
Δ	Differenz
Ω	(Soll-) Winkelgeschwindigkeit