

Horst W. Hamacher

**Mathematische Lösungsverfahren für
planare Standortprobleme**

Horst W. Hamacher

Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme



Professor
Dr. Horst Hamacher
Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik
Erwin-Schrödinger-Str.
67663 Kaiserslautern

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1995

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlag: Klaus Birk, Wiesbaden

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-663-01969-5 ISBN 978-3-663-01968-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-01968-8

Vorwort

Standortprobleme spielen eine große Rolle bei der Modellierung von wirtschaftlichen, technischen und gesellschaftlichen Problemen. So hat die Wahl von geeigneten Standorten für Maschinen in einem Fabrikgebäude einen entscheidenden Einfluß auf die Produktivität eines Betriebs. Bei der Bestückung von Halbleiterplatten ist die Auswahl von guten Plazierungen für die einzelnen Bauteile ausschlaggebend für die Kosten und Zuverlässigkeit des Endprodukts. Die Tatsache, ob ein Krankenhaus gut und schnell erreichbar ist, hat große Auswirkungen im sozialen Bereich und kann sogar die Frage nach Leben und Tod entscheiden.

In vielen Fällen werden Standortentscheidungen gefühlsmäßig getroffen oder sind durch Zwänge vorgegeben. Meistens wird man jedoch die Möglichkeit haben, die entsprechenden Entscheidungskriterien zu quantifizieren. Mit solchen Problemen beschäftigt sich dieses Buch.

Es werden die grundlegenden Lösungsverfahren für planare Standortprobleme dargestellt und begründet. Dabei ist es erlaubt, die Standorte in der Ebene zu wählen, so daß man eine unendlich große Anzahl von Entscheidungsmöglichkeiten hat. (Probleme, bei denen man die Standorte auf Netzwerken wählt oder bei denen nur endlich viele Plazierungsalternativen zur Verfügung stehen, werden in einem später erscheinenden Lehrbuch behandelt.) Neben klassischen Verfahren wird dabei auch ausführlich auf neue Ergebnisse eingegangen, die zu einer größeren Realitätstreue der entsprechenden Modelle führen. Zum einen wird gezeigt, wie Probleme, bei denen Gebiete in der Ebene für die Standortwahl gesperrt sind (restriktive Standortprobleme), behandelt werden können. Zum anderen wird dargelegt, wie man Modelle für den Fall entwickelt, daß für die Standortwahl mehrere, sich teilweise widersprechende Kriterien vorliegen.

Das Buch ist entstanden aus Notizen für Vorlesungen, die an der Universität Kaiserslautern seit 1989 gehalten wurden. Diese Vorlesungen richteten sich an Hörer aller Fachgebiete wurden dann aber vorwiegend von Studierenden der Mathematik, des Wirtschaftsingenieurwesens und der Informatik besucht. Der Text ist geeignet für alle Bereiche, in denen Standortprobleme eine Rolle spielen, also z.B. für Mathematiker, Informatiker, Geographen, Raumplaner und Wirtschaftsingenieure. Es werden nur grundlegende Kenntnisse in Mathematik vorausgesetzt, so daß sich das Buch sowohl als Begleittext für Lehrveranstaltungen verschiedener Fachgebiete als auch für das Selbststudium eignet.

Nachdem die erste Version des Manuskripts vorlag, begann unter den Hörern meiner Vorlesung ein Wettbewerb darum, wer die meisten Fehler finden würde. Eindeutiger Gewinner dieses Wettbewerbs wurde Herr Ansgar Weißler, dem ich hiermit stellvertretend für alle Studierenden für Interesse und aktive Beteiligung bei dem nie endenden Versuch danken möchte, diesen Text fehlerfrei zu gestalten. Außerdem möchte ich mich bei meinen Mitarbeitern Anita Schöbel und Stefan Nickel bedanken, die in vielen Stunden der Diskussionen zu zahlreichen Verbesserungen des ursprünglichen Manuskripts beigetragen haben. Von ihnen stammen auch die Übungsaufgaben jeweils am Ende der einzelnen Kapitel. Beide stellen gerade ein kleines Büchlein zusammen, in denen Lösungsvorschläge der Aufgaben vorgestellt werden. Mein ursprüngliches handschriftliches Manuskript wurde von Michael Ochs mit großer Sorgfalt in \LaTeX Format übertragen. Ihn und Renate Feth, die einen weiteren Teil des Manuskripts erstellt hat, bewundere ich für die Geduld, die sie bei der Berücksichtigung aller Änderungswünsche gezeigt haben. Mein letzter Dank gilt Frau Schmickler-Hirzebruch, die im Vieweg Verlag das Lektorat übernommen hat. Ohne ihre Hilfe könnte ich dieses Buch jetzt nicht der Öffentlichkeit vorlegen.

Kaiserslautern im Juni 1995

Horst W. Hamacher

**Gewidmet
meiner Mutter,
Frau Helene Hamacher, geb. Hanussek,
und
meinem Vater,
Herrn Alois Hamacher**

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivierende Beispiele	2
1.2	Einige Bezeichnungen	7
1.3	Klassifikationsschema für Standortprobleme	8
1.4	Übungsaufgaben	11
2	1-Standort-Medianprobleme	12
2.1	Modelle ohne Besonderheiten	12
2.1.1	Probleme mit Rechteckentfernung	13
2.1.2	Lösungsverfahren für Probleme mit Tschebychev-Entfernung	20
2.1.3	Konvexität der Zielfunktion von Problemen mit l_p - Entfernung	23
2.1.4	Lösungsverfahren für Probleme mit quadratischer Euklidi- scher Entfernung	24
2.1.5	Lösungsverfahren für Probleme mit Euklidischer Entfernung	26
2.1.6	Lösungsverfahren für Probleme mit l_p -Entfernung	32
2.1.7	Übungsaufgaben	36
2.2	Modelle mit Restriktionen	39
2.2.1	Über die Lage von optimalen Standorten für Medianpro- bleme ohne Restriktionen	41
2.2.2	Niveaulinien, der Randsatz und ein Algorithmus zur Lösung von restriktiven Problemen	46
2.2.3	Lösungsverfahren für Probleme mit quadratischer Euklidi- scher Entfernung	50
2.2.4	Lösungsverfahren für Probleme mit Rechteckentfernung . .	52
2.2.5	Übungsaufgaben	66
2.3	Modelle mit mehreren Zielfunktionen	67
2.3.1	Lexikographisch minimale, effiziente Standorte und eine Charakterisierung effizienter Standorte	70
2.3.2	Effiziente Standorte für quadratische Euklidische Entfernung	77
2.3.3	Bi-kriterielle Standortprobleme	79
2.3.4	Übungsaufgaben	92

3	<i>N</i>-Standort Medianprobleme	94
3.1	Zusammenhang zu 1-Standortproblemen	97
3.2	Rechteck- und Tschebychev-Entfernung	104
3.3	Quadratische Euklidische Entfernung	107
3.4	l_p -Entfernung	111
3.5	Übungsaufgaben	112
4	Centerprobleme	114
4.1	<i>N</i> -Standortprobleme mit l_∞ - und l_1 -Entfernung	116
4.2	1-Standortprobleme mit l_∞ - und l_1 -Entfernung	120
4.3	Restriktive Probleme mit l_∞ - und l_1 -Entfernung	129
4.4	l_2 -Entfernung mit identischen Gewichten	136
4.5	l_2 -Entfernung mit beliebigen Gewichten	151
4.6	Übungsaufgaben	160
A	Konvexität	162
B	Tabelle der behandelten Probleme	167
	Index	170

Symbolverzeichnis

$\mathcal{E}x$ – Menge der existierenden Standorte

Ex_m – Eine existierende Anlage $Ex_m \in \mathcal{E}x$

$Ex_m = (a_{m1}, a_{m2})$ – Koordinatendarstellung eines einzelnen Standorts

$\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ – Indexmenge der existierenden Standorte

Neu – Menge der neuen Standorte

X_n – Ein neuer Standort $X_n \in Neu$

$X_n = (x_{n1}, x_{n2})$ – Koordinatendarstellung eines einzelnen neuen Standorts

$\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ – Indexmenge der neuen Standorte

$z(\mathcal{E}x, Neu)$ – Zielfunktion

$f(\mathcal{E}x, Neu)$ – Summenzielfunktion eines Standortproblems

Opt^* – Menge der optimalen Standorte eines Problems

$Opt^*(R)$ – Menge der optimalen Standorte eines Problems mit Restriktionen

X^* – Ein optimaler Standort

X^R – Ein optimaler Standort eines Problems mit Restriktionen

l_1 – Rechteck-, Tschebychev- oder "Manhattan"-Metrik

l_2 – Euklidische Metrik

l_2^2 – Quadrat der Euklidischen Metrik

l_p – p -Metrik, mit $1 \leq p \leq \infty$

l_∞ – Maximums-Metrik

$T(X)$ – Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$conv(P_1, \dots, P_n)$ – Konvexe Hülle der Punkte P_1, \dots, P_n

$int(R)$ – Das topologische Innere von $R \subseteq \mathbb{R}^2$

∂R – Der topologische Rand von $R \subseteq \mathbb{R}^2$

$L_=(z)$ – Niveaulinie zum Zielfunktionswert z

$L_<(z)$ – Niveaumenge zum Zielfunktionswert z

$\langle s, t \rangle$ – Koordinatendarstellung eines Rechtecks im \mathbb{R}^2

$\underline{f}(\mathcal{E}x, X)$ – Vektorwertige Summenzielfunktion eines Standortproblems

\preceq – Die auf dem \mathbb{R}^Q definierte lexikographische Ordnung

$f^{(i_1, \dots, i_Q)}(\mathcal{E}x, X)$ – Summenzielfunktion eines lexikographischen Standortproblems

$f^n(\mathcal{E}x, X_n)$ – Zielfunktionsanteil für n -ten neuen Standort

$f^{ex}(\mathcal{E}x, Neu)$ – Zielfunktionsanteil zwischen neuen und existierenden Standorten

$f^{neu}(Neu)$ – Zielfunktionswert zwischen neuen Standorten

$g(\mathcal{E}x, Neu)$ – Maximumszielfunktion für n -ten neuen Standort

$g^{ex}(\mathcal{E}x, Neu)$ – Maximumszielfunktion zwischen neuen und existierenden Standorten

$g^{neu}(Neu)$ – Maximumszielfunktion zwischen neuen Standorten