

Numerische Mathematik

Von Prof. Dr. sc. math. Hans Rudolf Schwarz
Universität Zürich

Mit einem Beitrag von Prof. Dr. sc. math. Jörg Waldvogel
Eidg. Technische Hochschule Zürich

4., überarbeitete und erweiterte Auflage
Mit 119 Figuren, 158 Beispielen und 118 Aufgaben



B. G. Teubner Stuttgart 1997

Prof. Dr. sc. math. Hans Rudolf Schwarz

Geboren 1930 in Zürich. Von 1949 bis 1953 Studium der Mathematik und Diplom an der ETH Zürich. Von 1953 bis 1957 Mathematiker bei den Flug- und Fahrzeugwerken Altenrhein (Schweiz). 1957 Promotion, ab 1957 wiss. Mitarbeiter an der ETH Zürich. 1962 Visiting Associate Professor an der Brown University in Providence, Rhode Island, USA. 1964 Habilitation an der ETH Zürich, von 1964 bis 1972 Lehrbeauftragter an der ETH Zürich. 1972 Assistenzprofessor, 1974 a. o. Professor, seit 1983 ord. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Zürich, Emeritierung 1994.

Titularprof. Dr. sc. math. Jörg Waldvogel

Geboren 1938 in Zürich. Von 1957 bis 1963 Studium der Mathematik und Diplom an der ETH Zürich. Von 1962 bis 1967 Assistent und wiss. Mitarbeiter an der ETH Zürich; 1966 Promotion. Von 1967 bis 1970 Research Scientist bei Lockheed Missiles and Space Company, Huntsville, Alabama und part-time Assistant Professor an der University of Alabama at Huntsville. 1970 bis 1972 Assistant Professor an der University of Texas at Austin. Ab 1972 Leitung der Numerikgruppe am Seminar für Angewandte Mathematik der ETH und Lehrbeauftragter der ETH Zürich auf dem Gebiet der numerischen und angewandten Mathematik. 1980 Gastprofessor an der Université de Paris VI. 1985 Titularprofessor der ETH. 1986 Visiting Professor an der University of South Florida in Tampa.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Schwarz, Hans Rudolf:

Numerische Mathematik : mit 158 Beispielen und 118 Aufgaben
/ von Hans Rudolf Schwarz. Mit einem Beitr. von Jörg
Waldvogel. – 4., überarb. und erw. Aufl. – Stuttgart : Teubner,
1997

ISBN 978-3-519-32960-2 ISBN 978-3-663-01227-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-01227-6

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1997

Satz: Elsner & Behrens GdbR, Oftersheim

Umschlaggestaltung: Peter Pfitz, Stuttgart

Vorwort

Das Buch entstand auf den seinerzeitigen ausdrücklichen Wunsch meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. E. Stiefel, der mich im Sinne eines Vermächtnisses beauftragte, sein während vielen Jahren wegweisendes Standardwerk [Sti76] von Grund auf neu zu schreiben und den modernen Erkenntnissen und Bedürfnissen anzupassen. Klarheit und Ausführlichkeit waren stets die Hauptanliegen von Herrn Professor Stiefel. Ich habe versucht, in diesem einführenden Lehrbuch dieser von ihm geprägten Philosophie zu folgen, und so werden die grundlegenden Methoden der numerischen Mathematik in einer ausführlichen Darstellung behandelt.

Das Buch ist entstanden aus Vorlesungen, die der Unterzeichnete an der Universität Zürich gehalten hat. Der behandelte Stoff umfaßt im wesentlichen das Wissen, das der Verfasser seinen Studenten in einem viersemestrigen Vorlesungszyklus zu je vier Wochenstunden vermittelte. Sie sollen damit in die Lage versetzt werden, Aufgaben der angewandten Mathematik mit numerischen Methoden erfolgreich zu lösen oder zumindest die Grundlagen für das Studium von weiterführender, spezialisierter Literatur zu haben. Das Buch richtet sich an Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker und Absolventen naturwissenschaftlicher Richtungen. Vorausgesetzt wird diejenige mathematische Vorbildung, die in den unteren Semestern eines Hochschulstudiums oder an Ingenieurschulen vermittelt wird.

Die Darstellung des Stoffes ist stark algorithmisch ausgerichtet, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß elektronische Rechengeräte sehr verbreitet und leicht zugänglich sind. Zur Begründung einer numerischen Methode werden zuerst die theoretischen Grundlagen vermittelt, soweit sie erforderlich sind, um anschließend das Verfahren so zu formulieren, daß seine Realisierung als Rechenprogramm einfach ist. Die algorithmische Beschreibung erfolgt in einer Form, die sich mit Leichtigkeit in irgendeine der gängigen Programmiersprachen übersetzen läßt. Dem Leser soll damit die Möglichkeit geboten werden, nach Vervollständigung der Algorithmen durch Ein- und Ausgabe-Anweisungen sowie durch Vereinbarungsteile die Arbeitsweise der Methoden auf dem ihm verfügbaren Rechner kennen zu lernen. Zusätzliche Übungsaufgaben findet man etwa in [CoA72, Hai83].

Um die speziellen Kenntnisse auf dem Gebiet der numerischen Integralberechnung, die Herr Dr. J. Waldvogel an der ETH Zürich erarbeitet hat, in das Buch einfließen zu lassen, hat er die Abschnitte 8.1 und 8.2 sowie die zugehörigen Aufgaben verfaßt. Für diese wertvolle Mitarbeit danke ich ihm hiermit bestens. Meinen beiden Assistenten, den Herren Dipl.-Math. W. Businger und H. P. Märchy verdanke ich viele Anregungen und die kritische Durchsicht des Manuskripts, was dazu beigetragen hat, die Darstellung zu verbessern. Schließlich danke ich dem Verlag B. G. Teubner für die Herausgabe des Buches und für die stets freundliche und entgegenkommende Zusammenarbeit.

Mit der vierten Auflage des Buches wurde versucht, eine Aktualisierung des Stoffumfangs zu erreichen, indem in verschiedener Hinsicht Ergänzungen eingefügt wurden. Um eine oft bemängelte Lücke zu schließen, wurden grundlegende Methoden zur Behandlung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen aufgenommen. Weiter wurde im gleichen Zug die für die Computergraphik zentrale Bézier-Technik zur Darstellung von Kurven und Flächen berücksichtigt. Schließlich fanden die modernen Aspekte der Vektorisierung und Parallelisierung von Algorithmen im Rahmen von zwei Problemstellungen Aufnahme im Buch. Das notwendige Vorgehen zur Vektorisierung wird am Beispiel der effizienten Lösung von linearen Gleichungssystemen mit vollbesetzter und tridiagonaler Matrix dargelegt. Desgleichen werden die wesentliche Idee und Techniken der Parallelisierung einerseits am Beispiel der Lösung von tridiagonalen linearen Gleichungssystemen und andererseits im Fall des Eigenwertproblems für eine symmetrische, tridiagonale Matrix entwickelt und die einschlägigen Algorithmen dargestellt.

Zürich, im Herbst 1996

H. R. Schwarz

Inhalt

1 Lineare Gleichungssysteme, direkte Methoden

1.1	Gaußscher Algorithmus	11
1.1.1	Der fundamentale Rechenprozeß	11
1.1.2	Pivotstrategien	19
1.1.3	Ergänzungen	26
1.2	Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen	29
1.2.1	Normen	29
1.2.2	Fehlerabschätzungen, Kondition	35
1.3	Systeme mit speziellen Eigenschaften	39
1.3.1	Symmetrische, positiv definite Systeme	39
1.3.2	Bandgleichungen	45
1.3.3	Tridiagonale Gleichungssysteme	47
1.4	Austausch-Schritt und Inversion von Matrizen	51
1.4.1	Lineare Funktionen, Austausch	51
1.4.2	Matrizeninversion	53
1.5	Verfahren für Vektorrechner und Parallelrechner	56
1.5.1	Vollbesetzte Systeme auf Vektorrechnern	56
1.5.2	Tridiagonale Gleichungssysteme auf Vektorrechnern	59
1.5.3	Tridiagonale Gleichungssysteme auf Parallelrechnern	64
1.6	Aufgaben	70

2 Lineare Optimierung

2.1	Einführungsbeispiele, graphische Lösung	73
2.2	Der Simplex-Algorithmus	78
2.3	Ergänzungen zum Simplex-Algorithmus	85
2.3.1	Degeneration	85
2.3.2	Mehrdeutige Lösung	90
2.3.3	Nichtbeschränkte Zielfunktion	91
2.4	Allgemeine lineare Programme	92
2.4.1	Behandlung von freien Variablen	92
2.4.2	Methode der Koordinatenverschiebung	93
2.4.3	Die Zweiphasenmethode	96
2.5	Diskrete Tschebyscheff-Approximation	100
2.6	Aufgaben	105

3 Interpolation

3.1	Existenz und Eindeutigkeit der Polynominterpolation	108
3.2	Lagrange-Interpolation	109

3.2.1	Rechentechnik	109
3.2.2	Anwendungen	113
3.3	Fehlerabschätzung	118
3.4	Newton-Interpolation	123
3.5	Interpolation nach Aitken-Neville	130
3.5.1	Die Algorithmen von Aitken und Neville	131
3.5.2	Extrapolation und Romberg-Schema	133
3.5.3	Inverse Interpolation	136
3.6	Rationale Interpolation	138
3.6.1	Problemstellung und Problematik	138
3.6.2	Spezielle Interpolationsaufgabe, Thiesescher Kettenbruch	140
3.7	Spline-Interpolation	147
3.7.1	Charakterisierung der Spline-Funktion	147
3.7.2	Berechnung der kubischen Spline-Interpolierenden	150
3.7.3	Allgemeine kubische Spline-Interpolation	154
3.7.4	Periodische kubische Spline-Interpolation	156
3.7.5	Glatte zweidimensionale Kurvendarstellung	159
3.8	Bézier-Technik für Kurven und Flächen	161
3.8.1	Bernstein-Polynome	162
3.8.2	Bézier-Kurven	165
3.8.3	Bézier-Flächen	175
3.9	Aufgaben	180
4 Funktionsapproximation		
4.1	Fourierreihen	184
4.2	Effiziente Berechnung der Fourierkoeffizienten	195
4.2.1	Der Algorithmus von Runge	196
4.2.2	Die schnelle Fouriertransformation	199
4.3	Orthogonale Polynome	209
4.3.1	Die Tschebyscheff-Polynome	209
4.3.2	Tschebyscheffsche Interpolation	217
4.3.3	Die Legendre-Polynome	222
4.4	Aufgaben	227
5 Nichtlineare Gleichungen		
5.1	Banachscher Fixpunktsatz	230
5.2	Konvergenzverhalten und Konvergenzordnung	234
5.3	Gleichungen in einer Unbekannten	242
5.3.1	Intervallschachtelung, Regula falsi, Sekantenmethode	242
5.3.2	Verfahren von Newton	248
5.3.3	Interpolationsmethoden	251
5.4	Gleichungen in mehreren Unbekannten	254
5.4.1	Fixpunktiteration und Konvergenz	254
5.4.2	Verfahren von Newton	256

5.5	Nullstellen von Polynomen	262
5.6	Aufgaben	272

6 Eigenwertprobleme

6.1	Das charakteristische Polynom, Problematik	275
6.2	Jacobi-Verfahren	278
	6.2.1 Elementare Rotationsmatrizen	279
	6.2.2 Das klassische Jacobi-Verfahren	281
	6.2.3 Zyklisches Jacobi-Verfahren	286
6.3	Transformationsmethoden	290
	6.3.1 Transformation auf Hessenbergform	290
	6.3.2 Transformation auf tridiagonale Form	294
	6.3.3 Schnelle Givens-Transformation	296
	6.3.4 Methode von Hyman	301
6.4	QR-Algorithmus	306
	6.4.1 Grundlagen zur QR-Transformation	306
	6.4.2 Praktische Durchführung, reelle Eigenwerte	311
	6.4.3 QR-Doppelschritt, komplexe Eigenwerte	316
	6.4.4 QR-Algorithmus für tridiagonale Matrizen	322
	6.4.5 Zur Berechnung der Eigenvektoren	326
6.5	Paralleler Algorithmus für tridiagonale Matrizen	327
6.6	Aufgaben	337

7 Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate

7.1	Lineare Ausgleichsprobleme, Normalgleichungen	340
7.2	Methoden der Orthogonaltransformation	345
	7.2.1 Givens-Transformation	345
	7.2.2 Spezielle Rechentechniken	351
	7.2.3 Householder-Transformation	354
7.3	Singulärwertzerlegung	360
7.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	365
	7.4.1 Gauß-Newton-Methode	365
	7.4.2 Minimierungsverfahren	369
7.5	Aufgaben	373

8 Integralberechnung

8.1	Die Trapezmethode	375
	8.1.1 Problemstellung und Begriffe	376
	8.1.2 Definition der Trapezmethode und Verfeinerung	376
	8.1.3 Die Euler-Maclaurinsche Summenformel	379
	8.1.4 Das Romberg-Verfahren	381
	8.1.5 Adaptive Quadraturverfahren	384
8.2	Transformationsmethoden	387
	8.2.1 Periodische Integranden	387

8.2.2	Integrale über \mathbb{R}	389
8.2.3	Transformationsmethoden	391
8.3	Interpolatorische Quadraturformeln	395
8.3.1	Newton-Cotes Quadraturformeln	395
8.3.2	Gaußsche Quadraturformeln	403
8.4	Aufgaben	409

9 Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1	Einschrittmethoden	412
9.1.1	Die Methode von Euler und der Taylorreihe	412
9.1.2	Diskretisationsfehler, Fehlerordnung	416
9.1.3	Verbesserte Polygonzugmethode, Trapezmethode, Verfahren von Heun	420
9.1.4	Runge-Kutta-Verfahren	425
9.1.5	Implizite Runge-Kutta-Verfahren	435
9.1.6	Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme	437
9.2	Mehrschrittverfahren	440
9.2.1	Die Methoden von Adams-Bashforth	441
9.2.2	Die Methoden von Adams-Moulton	444
9.2.3	Allgemeine Mehrschrittverfahren	447
9.3	Stabilität	457
9.3.1	Inhärente Instabilität	457
9.3.2	Absolute Stabilität	458
9.3.3	Steife Differentialgleichungen	467
9.4	Randwertaufgaben	472
9.4.1	Beispiele, Existenz von Lösungen	472
9.4.2	Analytische Methoden für lineare Randwertaufgaben	476
9.4.3	Schießverfahren	485
9.4.4	Differenzenmethode	493
9.5	Aufgaben	502

10 Partielle Differentialgleichungen

10.1	Elliptische Randwertaufgaben, Differenzenmethode	507
10.1.1	Problemstellung	507
10.1.2	Diskretisation der Aufgabe	509
10.1.3	Randnahe Gitterpunkte, allgemeine Randbedingungen	514
10.1.4	Diskretisationsfehler	526
10.1.5	Ergänzungen	538
10.2	Parabolische Anfangsrandwertaufgaben	541
10.2.1	Eindimensionale Probleme, explizite Methode	541
10.2.2	Eindimensionale Probleme, implizite Methode	547
10.2.3	Diffusionsgleichung mit variablen Koeffizienten	552
10.2.4	Zweidimensionale Probleme	554

10.3	Methode der finiten Elemente	559
10.3.1	Grundlagen	559
10.3.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente	562
10.3.3	Elementweise Bearbeitung	564
10.3.4	Aufbau und Behandlung der linearen Gleichungen	569
10.3.5	Beispiele	570
10.4	Aufgaben	573

11 Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren

11.1	Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	577
11.1.1	Konstruktion der Iterationsverfahren	577
11.1.2	Einige Konvergenzsätze	583
11.1.3	Optimaler Relaxationsfaktor der Überrelaxation	596
11.2	Methode der konjugierten Gradienten	603
11.2.1	Herleitung des Algorithmus	603
11.2.2	Eigenschaften der Methode der konjugierten Gradienten	608
11.2.3	Konvergenzabschätzung	611
11.2.4	Vorkonditionierung	614
11.3	Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen	621
11.3.1	Grundlagen des Verfahrens	621
11.3.2	Algorithmische Beschreibung und Eigenschaften	624
11.4	Speicherung schwach besetzter Matrizen	630
11.5	Aufgaben	633

Literatur		637
-----------------	--	-----

Sachverzeichnis		649
-----------------------	--	-----