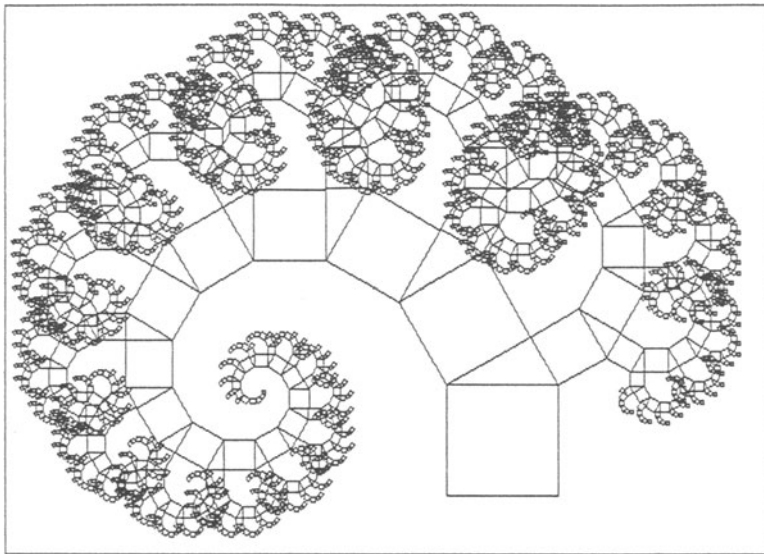


Wolfram Luther  
Martin Ohsmann

**Mathematische Grundlagen  
der Computergraphik**



Aus dem Programm Informatik

*K.H. Becker, M.Dörfler*

Dynamische Systeme und Fraktale  
Computergraphische Experimente mit Pascal

*K.H. Becker, G.Lamprecht*

Einführung in die Programmiersprache Pascal

*E.Börger*

Berechenbarkeit, Komplexität, Logik

*W.Coy*

Aufbau und Arbeitsweise von Rechenanlagen

*F.-P.Heider, D.Kraus, M.Welschenbach*

Mathematische Methoden der Kryptoanalyse

*G.Lamprecht*

Einführung in die Programmiersprache C

*O.Lange, G.Stegemann*

Datenstrukturen und Speichertechniken

*R.Schaback*

Grundlagen der Informatik  
für das Nebenfachstudium

*G.Schweizer, A.Fadini, T.Wunsch*

Mikrorechner – Architektur und Programmierung

Wolfram Luther  
Martin Ohsmann

# Mathematische Grundlagen der Computergraphik



Friedr. Vieweg & Sohn      Braunschweig / Wiesbaden

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Luther, Wolfram:**

Mathematische Grundlagen der Computer-  
graphik/Wolfram Luther; Martin Ohsmann. –  
Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1988

NE: Ohsmann, Martin:

#### Quellenhinweis

Figur 10.3 (Seite 161) aus

*Dürer, A.:* Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen und corporen.  
Nürnberg 1525.

*Germanisches Nationalmuseum, Nürnberg*

Das in diesem Buch enthaltene Programm-Material ist mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgend-einer Art verbunden. Der Autor und der Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieses Programm-Materials oder Teilen davon entsteht.

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Verlagsgruppe Bertelsmann.

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1988



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

ISBN 978-3-663-00135-5      ISBN 978-3-663-00134-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-00134-8

## Vorwort

Als zu Beginn der achtziger Jahre die ersten 64K Computer mit hochauflösender Bildschirmgraphik ihren Einzug in die mathematischen Institute und die Arbeitszimmer der Studenten nahmen, konnte man nur ahnen, welch unentbehrliches Hilfsmittel hier entstanden war, um mathematische und naturwissenschaftliche Phänomene graphisch sichtbar zu machen und ihre Strukturen aufzudecken. Wenn in Windeseile ein Funktionsgraph oder das Drahtmodell eines Körpers am Bildschirm erscheint, verschoben, gedreht oder vergrößert wird, Kurven oder Flächen in ein Gitternetz eingepaßt oder Datenmengen in Bildern veranschaulicht werden, dann liegen in allen Fällen mathematische Algorithmen zugrunde, deren Verständnis für ein sinnvolles Arbeiten mit fertigen oder selbsterstellten Programmen der Computergraphik eine große Hilfe ist. So verfolgt dieses Buch mehrere Ziele. Zum einen sollen einige wichtige Algorithmen zur Erzeugung der graphischen Grundelemente vorgestellt und exemplarisch in Prozeduren einer Standard-Hochsprache umgesetzt werden. Die mathematischen Grundlagen, die zum großen Teil aus der linearen Algebra, Analysis und Geometrie stammen, werden im Text mitentwickelt oder zitiert. So wendet sich das Buch an Studierende der Angewandten Mathematik, Informatik und der Ingenieurwissenschaften, ist aber auch dem interessierten Laien zugänglich. Andererseits haben wir besonderes Gewicht auf die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der Graphik zur Veranschaulichung von Kurvenverläufen, Oberflächenformen und Bewegungsabläufen aus den Bereichen der Ingenieurwissenschaften gelegt, die in den Grundkursen der Höheren Mathematik abgedeckt werden. Die gewählten Beispiele stammen zum großen Teil aus Veranstaltungen, die von den Autoren an der RWTH Aachen gehalten wurden. Ganz bewußt haben wir darauf verzichtet, ausgefeilte Industriegraphiken aus spezialisierten Computerzentren einzubeziehen. Alle Figuren wurden auf gängigen Mikrocomputern erstellt, die auch den Studenten zur Verfügung stehen. Dabei ziehen wir es vor, daß der Leser einen Anreiz erhält, am eigenen graphischen Arbeitsplatz bessere Routinen und Graphiken zu erreichen, als voll Resignation eine perfekte Graphik zu betrachten. Gerade eine am häuslichen Bildschirm in wenigen Minuten erstellte Skizze, die ein großes Maß an Abstraktionsvermögen zu ihrer Interpretation verlangt und bei der Auflösung und Rechenleistung der Zentraleinheit in einem vernünftigen Verhältnis zueinander stehen, vermittelt oft mehr, als stundenlanges Herumexperimentieren mit einem teuren, nicht dokumentierten Programmpaket an einer großen Anlage, die mit vielen anderen Benutzern zu geregelter Zeiten geteilt werden muß.

Der vorgestellte Stoff ist im allgemeinen in einer einsemestrigen Vorlesung zu bewältigen. Im ersten Teil des Buches sind ebene Probleme, im zweiten dreidimensionale Grundstrukturen besprochen. Übungsaufgaben dienen dazu, die mathematischen und algorithmischen Grundlagen zu vertiefen. Auf die Darstellung technischer Aspekte der Computergraphik haben wir wegen des schnellen Wandels im Hardwarebereich weitgehend verzichtet. Struktogramme wurden nicht erstellt. Dafür sind die wichtigsten Routinen im Text oder Anhang als *TURBO PASCAL* Source aufgeführt. Die vollständigen Programme sind bei den Autoren erhältlich. Einige Farbtafeln beschließen das Buch.

Unser Dank gilt Herrn Prof. Dr. Oberschelp für die freundliche Unterstützung, Herrn Prof. Dr. Niemeyer, dessen Vorlesungen für Ingenieur- und Physikstudenten an vielen Stellen eingeflossen sind, Herrn Dipl.-Math. Brakhage und den kritischen Studenten für die vielen Verbesserungsvorschläge, die sie während einer Vorlesung über Computergraphik gemacht haben, und dem Verlag mit Frau Schmickler-Hirzebruch für die angenehme Zusammenarbeit und die gute Ausstattung des Buchs.

Aachen, im Sommer 1988

Die Autoren

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	X
<b>1 Graphischer Arbeitsplatz</b>	1
1.1 Komponenten eines Personal-Computers	2
1.2 Komponenten eines Graphik-Platzes	2
1.3 Graphik-Bildschirm	3
1.4 Farbdarstellung	7
1.5 Graphikfähiger Drucker	12
1.6 Farbgraphikdrucker	13
1.7 Plotter	13
1.8 Rechnerinterne Darstellung von Bildern	16
1.9 Eingabehilfsmittel	19
<b>2 Grundelemente der Rastergraphik</b>	24
2.1 Ausgabegeräte	26
2.2 Schnelle Geraden und Kreise	29
2.3 Polygone	36
2.4 Algorithmus zur Konstruktion der konvexen Hülle aus N vorgegebenen Punkten des $\mathbb{R}^2$	38
2.5 Algorithmus zur Bestimmung der Lage eines Punktes bezüglich eines einfach geschlossenen Polygons	39
2.6 Konstruktion einer Ellipse durch drei Punkte	41
<b>3 Clippen und Füllen</b>	45
3.1 Koordinatensysteme	46
3.2 Ein Linienbegrenzungsalgorithmus	47
3.3 Polygonclipping	52
3.4 Füllalgorithmen der Rastergraphik	53
<b>4 Transformationen in der Ebene</b>	60
4.1 Punkte und Strecken im $\mathbb{R}^2$	62
4.2 Zweidimensionale Transformationen	64
4.3 Display-Files	70
<b>5 Mechanisch erzeugte ebene Kurven</b>	74
5.1 Parametrisierte Kurven	76
5.2 Kegelschnitte und abgeleitete Kurven	77
5.3 Evolute und Evolvente	80
5.4 Trochoiden	83
<b>6 Splines</b>	94
6.1 Kubische Splines	96

6.2	Parametrisierte kubische Splines	98
6.3	Bézier-Kurven	101
6.4	B-Splines	103
6.5	Text	107
6.6	Spline-Flächen	109
<b>7</b>	<b>Fraktale</b>	<b>111</b>
7.1	Nirgends differenzierbare, stetige Funktionen und nicht rektifizierbare Kurven	112
7.2	Peanokurven und Kurven gebrochener Dimension	115
7.3	Mehrdimensionale Fraktale	120
7.4	Der mathematische Hintergrund mehrdimensionaler Fraktale	121
7.5	Die Computer-Konfiguration	124
<b>8</b>	<b>Farbe als dritte Dimension</b>	<b>128</b>
8.1	Oberflächenbeschreibung	130
8.2	Grautönung	131
8.3	Höhenlinien	135
<b>9</b>	<b>Geometrie im Raum</b>	<b>145</b>
9.1	Geraden	146
9.2	Ebenen im Raum	147
9.3	Transformationen im Raum	149
<b>10</b>	<b>Projektionen in eine Bildebene</b>	<b>156</b>
10.1	Zentralprojektion	158
10.2	Parallelprojektion	164
10.3	Axonometrie	167
10.4	Projektion auf eine beliebige Ebene	173
<b>11</b>	<b>Konvexe Körper im Raum</b>	<b>175</b>
11.1	Vielfläche	176
11.2	Die Platonischen Körper	179
11.3	Computeranimation	184
<b>12</b>	<b>Anaglyphen</b>	<b>187</b>
12.1	Dreidimensionales Sehen	188
12.2	Anaglyphentechnik	191
12.3	Anwendungen	194
<b>13</b>	<b>Hidden Lines</b>	<b>196</b>
13.1	Hidden Line Algorithmus	199
13.2	Plotter Ansteuerung	210



---

13.3 Darstellung anderer Flächen	211
13.4 Tiefenpufferalgorithmus	215
<b>14 Oberflächen im Raum</b>	<b>218</b>
14.1 Flächen zweiter Ordnung	220
14.2 Allgemeine Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$	227
14.3 Flächendarstellungen	233
14.4 Darstellungen eines Torus	238
14.5 3D-Rekonstruktion	241
<b>15 Licht und Schatten</b>	<b>243</b>
15.1 Farben	244
15.2 Beleuchtung	245
15.3 Ray-Tracing	252
<b>Anhang Programme und Ergänzungen</b>	<b>255</b>
A.1 Ein Polygonschraffur-Programm	256
A.2 Eine dreidimensionale Clippingroutine bei Zentralprojektion	259
A.3 Ein Peanokurven-Programm	261
A.4 Ein Hidden Line-Programm	263
A.5 Ein 2D-Graphikpaket am Beispiel von Turbo Pascal 4.0	267
A.6 Das graphische Kernsystem (GKS)	272
A.7 Farbtafeln	273
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>283</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>286</b>

## Symbolverzeichnis

$> \geq$	größer, größer oder gleich
$< \leq$	kleiner, kleiner oder gleich
$<>$	ungleich
$\gg \ll$	sehr groß (klein) gegen
$\approx$	ungefähr gleich
$\{x \mid \dots\}$	Menge aller $x$ , für die gilt
$\varepsilon$	Element von
$A \cup B$	Vereinigungsmenge
$A \cap B$	Durchschnittsmenge
$A \setminus B$	A ohne B
$\mathbf{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$n!$	$n$ Fakultät, $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
$\mathbf{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbf{Q}$	Menge der rationalen Zahlen, $p/q$ , $p, q \in \mathbf{Z}$ , $q \neq 0$
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{R}^n$	$n$ -dimensionaler reeller euklidischer Raum
$\mathbf{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$ , $a \leq b$
$(a, b)$	halboffenes Intervall, links offen, $a < b$
$[a, b)$	halboffenes Intervall, rechts offen, $a < b$
$(a, b)$	offenes Intervall
$\arg z$	Argument von $z$ , $z \in \mathbf{C}$
$\operatorname{Re} z$	Realteil von $z$ , $z \in \mathbf{C}$
$\operatorname{Im} z$	Imaginärteil von $z$ , $z \in \mathbf{C}$
$ z $	Betrag von $z = x + i y$ , $(=\sqrt{x^2+y^2})$
$i$	imaginäre Einheit, $i^2 = -1$
$\sum_{l=1}^n a_l$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$	Limes von $a_k$ für $k \rightarrow \infty$
$f : D \rightarrow \mathbf{R}$	reellwertige Funktion definiert auf der Menge $D$
$f', f'', f^{(n)}$	erste, zweite, ..., $n$ -te Ableitung
$\operatorname{sqrt}, \sqrt{\quad}$	Wurzelfunktion
$\exp, \ln$	Exponential- und Umkehrfunktion
$(x, y)$	geordnetes Paar
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$n$ -Tupel
$\underline{0}$	Nullvektor
$\underline{a}, \underline{b}, \underline{x}$	Vektoren
$\underline{n}$	Normalenvektor
$(\dots)^T$	transponiert
$A, B, X$	Matrizen, $A = (a_{ik})$
$\det A,  a_{ik} $	Determinante von $A$
$(\underline{a}, \underline{b}), \underline{a} \cdot \underline{b}$	Skalarprodukt: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
$\underline{a} \times \underline{b}$	$(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^T$ , Vektorprodukt
$E$	Einheitsmatrix
$I$	Matrix mit ausschließlich Eins-Einträgen
$[A..]$	siehe Literaturverzeichnis unter [A ]