

# Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen  
mit besonderer Berücksichtigung  
der Anwendungsgebiete

Band 179

*Herausgegeben von*

J. L. Doob · A. Grothendieck · E. Heinz · F. Hirzebruch  
E. Hopf · W. Maak · S. Mac Lane · W. Magnus · J. K. Moser  
M. M. Postnikov · F. K. Schmidt · D. S. Scott · K. Stein

*Geschäftsführende Herausgeber*

B. Eckmann und B. L. van der Waerden

Jean Giraud

# Cohomologie non abélienne



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971

Jean Giraud

Maitre de Conférences à l'Ecole Normale Supérieure de Saint Cloud

Geschäftsführende Herausgeber:

Prof. Dr. B. Eckmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Prof. Dr. B. L. van der Waerden

Mathematisches Institut der Universität Zürich

---

AMS Subject Classifications (1970): 18-02, 14 F 20, 55 B 30

---

ISBN 978-3-540-05307-1

ISBN 978-3-662-62103-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-62103-5

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photo-mechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist. © by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1971. Library of Congress Catalog Card Number 78-146049.

## Table des matières

Introduction . . . . .	1
Chapitre 0. Sites et topos . . . . .	4
§ 1. Topologies, sites . . . . .	4
§ 2. Faisceaux, topos . . . . .	6
§ 3. Morphismes de sites, de topos . . . . .	10
Chapitre I. Catégories fibrées et scindées . . . . .	18
§ 1. Rappels et notations . . . . .	18
1.1. Les catégories de morphismes . . . . .	19
1.2. Les accouplements de composition . . . . .	21
1.3. Les foncteurs de composition . . . . .	22
1.4. Leurs propriétés algébriques . . . . .	22
1.5. Composition avec une $E$ -équivalence . . . . .	23
1.6. Changement de base . . . . .	24
1.7. Univers . . . . .	25
1.8. La 2-catégorie $\mathcal{Fib}(E)$ . . . . .	26
1.9. La 2-catégorie $\mathcal{Scin}(E)$ . . . . .	27
1.10. La catégorie $\overrightarrow{\text{Lim}}(F/A)$ . . . . .	28
1.11. Adjoint d'un $E$ -foncteur . . . . .	29
§ 2. Le changement de base et ses adjoints . . . . .	32
2.1. Notations . . . . .	32
2.2. Adjoint d'un 2-foncteur . . . . .	33
2.3. Les 2-foncteurs de changement de base . . . . .	35
2.4. Les adjoints de $\mathcal{O}u\mathcal{L}_u$ . . . . .	37
2.5. Les 2-foncteurs $u_{\text{fib}}^\bullet$ et $u_{\text{fib}}^+$ . . . . .	41
2.6. Les préfaisceaux de $S$ -morphisms . . . . .	47
2.6.1. La catégorie fibrée des préfaisceaux . . . . .	47
2.6.2. Préfaisceaux $\text{Hom}_S(x, y)$ dans une catégorie scindée . . . . .	49
2.6.3. Dans une catégorie fibrée. . . . .	50
2.6.5. Effet d'un changement de base . . . . .	51

§ 3. Extension à $\hat{E}$ d'une $E$ -catégorie fibrée . . . . .	53
3.1. Univers . . . . .	53
3.2. L'extension canonique à $\hat{E}$ . . . . .	53
3.3. La $E$ -catégorie $\text{CART}(F, G)$ . . . . .	56
Chapitre II. Les champs . . . . .	64
§ 1. Propriétés diverses . . . . .	64
1.1. Topologie de la $F$ -descente . . . . .	64
1.2. Champs sur un site . . . . .	67
1.3. Champs sur un $U$ -site . . . . .	69
1.4. $E$ -foncteurs couvrants et bicouvrants . . . . .	72
§ 2. Champ associé à une catégorie fibrée . . . . .	76
2.1. Théorème d'existence . . . . .	76
2.2. Champ scindé associé à une catégorie fibrée . . . . .	78
§ 3. Images directe et inverse de champs . . . . .	82
3.1. Image directe . . . . .	82
3.2. Image inverse de champs . . . . .	84
3.3. Champs sur un site et sur le topos associé . . . . .	91
3.4. Le champ des faisceaux sur un site . . . . .	94
3.5. Les faisceaux $\text{Aut}_S(x)$ des $S$ -automorphismes . . . . .	104
Chapitre III. Torseurs. Cohomologie de degré 1 . . . . .	106
§ 1. Objets à opérateurs dans un topos . . . . .	106
1.1. Introduction: Objets à opérateurs dans une catégorie . . . . .	106
1.2. Les objets $\text{Hom}_G(P, Q)$ dans un topos . . . . .	108
1.3. Le produit contracté $P \underset{\wedge}{\overset{G}{\times}} Q$ ; extension du groupe structural . . . . .	114
1.4. Torseurs dans un topos . . . . .	117
1.5. Opposé d'un toiseur; bitorseurs . . . . .	121
1.6. Produit contracté par un toiseur . . . . .	123
1.7. Torseurs sur un site . . . . .	126
§ 2. Torseurs et objets à faisceaux d'opérateurs dans un champ . . . . .	129
2.1. Gerbes. Factorisation canonique d'un champ . . . . .	129
2.2. Morphismes d'une gerbe triviale dans un champ . . . . .	137
2.3. Objets tordus . . . . .	140
2.4. L'ensemble pointé $H^1(A)$ associé à un faisceau de groupes . . . . .	148
2.5. Classification d'objets localement isomorphes à un objet donné . . . . .	151
2.6. Changement d'origine . . . . .	153

§ 3. La suite exacte en degré 1 . . . . .	156
3.1. Le premier opérateur cobord . . . . .	156
3.2. Cas d'un sous-groupe . . . . .	159
3.3. Cas d'un sous-groupe invariant . . . . .	161
3.4. Cas d'un sous-groupe abélien ou central . . . . .	164
3.5. Effaçabilité; cohomologie abélienne . . . . .	168
3.6. Cohomologie de Čech . . . . .	170
3.7. Calculs galoisiens . . . . .	177
Chapitre IV. Liens et Gerbes (Cohomologie de degré 2) . . . . .	184
§ 1. Liens sur un site . . . . .	184
1.1. Le champ des liens . . . . .	184
1.2. Propriétés locales des liens . . . . .	191
1.3. Quotients de liens . . . . .	194
1.4. Produits finis de liens . . . . .	198
1.5. Centralisateur d'un morphisme de liens . . . . .	199
1.6. Le produit contracté $L_{\wedge}^C M$ de deux liens . . . . .	204
§ 2. Gerbes liées . . . . .	207
2.1. Opérations d'un lien sur un champ . . . . .	207
2.2. Lien d'une gerbe . . . . .	212
2.3. La gerbe des morphismes liés . . . . .	217
2.4. Le produit contracté $P_{\wedge}^C Q$ de deux gerbes . . . . .	229
2.5. La gerbe des relèvements d'une section . . . . .	236
§ 3. L'ensemble $H^2(L)$ attaché à un lien $L$ . . . . .	247
3.1. Définition, «fonctorialité» . . . . .	247
3.2. La gerbe des représentants d'un lien $L$ ; description de l'ensemble $H^2(L)'$ des classes neutres . . . . .	252
3.3. Comparaison entre la cohomologie d'un lien et celle de son centre . . . . .	256
3.4. Cohomologie abélienne . . . . .	259
3.5. Cohomologie de Čech . . . . .	264
3.6. Calculs galoisiens (suite) . . . . .	271
§ 4. Prolongement de la suite exacte de cohomologie . . . . .	273
4.1. Suites exactes de liens . . . . .	273
4.2. Le second cobord . . . . .	279
4.3. Compléments sur la suite exacte . . . . .	285
§ 5. Compléments . . . . .	293
5.1. Existence de sections d'un espace homogène . . . . .	293
5.2. Bitorseurs . . . . .	295

Chapitre V. Effet d'un morphisme de sites sur la cohomologie . . . . .	302
§ 1. Changement de site . . . . .	302
1.1. Image inverse de faisceaux de groupes . . . . .	302
1.2. Image inverse de liens . . . . .	304
1.3. Image inverse d'un objet tordu . . . . .	310
1.4. Image inverse de gerbes . . . . .	313
1.5. Les applications $H^i(E, A) \rightarrow H^i(E', f^*(A))$ . . . . .	316
§ 2. Les faisceaux $R^1 f_*(A)$ . . . . .	319
§ 3. La suite exacte attachée à un morphisme de sites . . . . .	321
3.1. Le cas général . . . . .	321
3.2. Le cas abélien; transgression . . . . .	330
3.3. Interprétation du second cobord attaché à un revêtement de groupes topologiques . . . . .	337
§ 4. Calculs formels concernant le groupe de Brauer . . . . .	339
Chapitre VI. Liens et 3-cohomologie . . . . .	348
§ 1. Effaçabilité . . . . .	348
§ 2. L'obstruction $c(L) \in H^3(C)$ attachée à un lien $L$ de centre $C$ . . . . .	361
Chapitre VII. Exemples tirés de la Géométrie Algébrique . . . . .	369
§ 1. Relèvement infinitésimal de schémas lisses . . . . .	369
1.1. Relèvements d'homomorphismes . . . . .	369
1.2. Relèvements de schémas lisses . . . . .	373
1.3. Relèvements de toseurs . . . . .	374
§ 2. Deux théorèmes de M. Artin et A. Grothendieck . . . . .	377
2.1. Le changement de base lisse . . . . .	378
2.2. Le changement de base pour un morphisme propre . . . . .	383
Chapitre VIII. Extension d'un topos . . . . .	392
§ 0. Conventions . . . . .	392
§ 1. Localisation d'un topos . . . . .	397
§ 2. Champs de topos . . . . .	400
§ 3. Morphismes de champs de topos . . . . .	407
§ 4. Le topos classifiant d'un faisceau de groupes . . . . .	411

§ 5. Topos classifiant d'une gerbe et effacement d'une classe de cohomologie de degré 2 . . . . .	416
5.1. Construction du topos classifiant $B_{\mathbf{G}}(X)$ d'une gerbe $\mathbf{G}$	417
5.2. La propriété universelle de $B_{\mathbf{G}}(X)$ . . . . .	419
5.3. Extensions d'un topos . . . . .	425
§ 6. Interprétation de $H^2(X, L)$ en termes d'extensions du topos $X$	428
6.1. Liens sur un topos classifiant . . . . .	429
6.2. La classe $b \in H^2(X, L)$ attachée à une extension $B$ d'un topos $X$ . . . . .	432
§ 7. Extensions de groupes dans un topos . . . . .	437
7.1. Une suite exacte pour les extensions de groupes à noyau abélien . . . . .	437
7.2. Extensions d'un groupe $H$ et extensions du topos $B_H$ . . . . .	441
7.3. Extensions d'un groupe $H$ par un lien $F$ sur $B_H$ . . . . .	445
7.4. Extensions de groupes et cohomologie des groupes discrets. . . . .	452
§ 8. Extensions de groupes topologiques . . . . .	453
Bibliographie . . . . .	459
Index des notations . . . . .	461
Index terminologique . . . . .	465