

Mathematische Modelle des Kontinuums

Ernst Kleinert

Mathematische Modelle des Kontinuums

 Springer Spektrum

Ernst Kleinert
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Hamburg, Deutschland

ISBN 978-3-662-59678-4 ISBN 978-3-662-59679-1 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-59679-1>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Der vorliegende Text ist aus Vorlesungen und Vorträgen hervorgegangen, die ich 1999/2000 und 2018 am Mathematischen Institut der Universität Hamburg gehalten habe. Meine allererste Motivation, mich in einige Gegenstände, die ich nur oberflächlich kannte, einmal gründlicher einzuarbeiten, ging alsbald über in den Wunsch, den gewaltigen mathematischen Reichtum, der sich unter dem Titel „Modelle des Kontinuums“ versammeln lässt, von einem übergreifenden Gesichtspunkt aus zu fassen und darzustellen. (Dass das Thema nicht zu erschöpfen ist, brauche ich wohl nicht eigens zu sagen.) So entsteht gleichzeitig eine Gelegenheit, am Leitfaden eines Gegenstandes von unbestreitbarer Bedeutsamkeit an einige philosophische Seiten der Mathematik heranzutreten. Umgekehrt kann eine Philosophie der Mathematik dem Thema des Kontinuums nicht ausweichen; mit vollem Recht schreibt Feferman: „But as long as science takes the real number system for granted, its philosophers must eventually engage the basic foundational question of modern mathematics: What are the real numbers, really?“ ([FL], S. 298).

Vom Leser wird erwartet, dass er über mathematisches Basiswissen und *common sense* verfügt, wie sie in einer an deutschen Universitäten üblichen Grundausbildung erworben werden können, einschließlich der ersten Begriffe von Algebra und Topologie. Gelegentliche Bemerkungen gehen darüber hinaus, werden dann aber in der Folge nicht benutzt. Die Sache bringt mit sich, dass er die ersten Schritte in die mathematische Logik zu tun lernt, ferner einen „starken Vorgeschmack“ von der (mathematischen) Kategorientheorie bekommt.

Dieses Buch ist kein Lehrbuch im üblichen Sinne, es führt nicht in eine bestimmte Theorie ein, will auch nicht pure Ideengeschichte sein, sondern widmet sich einem Thema, zu dessen Bearbeitung verschiedene Theorien entwickelt werden, die es zu vergleichen gilt, nach ihrer Rolle, ihrer Leistung, ihrem Recht. Hier ist nicht nur, wie meistens in der Mathematik, der bloße Nachvollzug gefordert, sondern auch Urteilsvermögen: der Leser soll die Sache zur seinigen machen. Ich habe darum, soweit es angängig schien, den Vorlesungston mit seiner direkten Ansprache beibehalten.

Eine erste Fassung erschien 2000 in den „Hamburger Beiträge[n] zur Mathematik“. Im Herbst und Winter 2018/2019 wurde der gesamte Text neu geschrieben,

und die Abschnitte über die Konstruktion von A'Campo und die Conwayzahlen wurden hinzugefügt. Prof. Detlef Laugwitz (†) bin ich verpflichtet für die zahlreichen Anregungen, die ich von ihm erhielt. Danken möchte ich auch Dr. Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag, ohne dessen Engagement und Entgegenkommen dieses Buch nicht hätte erscheinen können.

Hamburg
im Frühjahr 2019

Ernst Kleinert

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die griechische Proportionenlehre	11
3	Algebra aus Geometrie	17
3.1	Eine einfache Überlegung	17
3.2	Affine Ebenen	19
3.3	Affine Ebenen mit Koordinatenschiefkörpern	21
3.4	Affine Ebenen mit einem Koordinatenkörper	26
3.5	Anordnung	27
3.6	Schlussbetrachtung	29
4	Die reellen Zahlen	31
4.1	Mengentheoretische Grundlagen	31
4.2	Die natürlichen Zahlen	34
4.3	Strukturen auf \mathbb{N}	38
4.4	Von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} : Grothendieckgruppen	40
4.5	Von \mathbb{Z} nach \mathbb{Q} : Lokalisierung	42
4.6	Von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} : Kompletterung	44
4.7	Schlussbetrachtung: universelle Konstruktionen	51
5	Die Konstruktion von A'Campo	57
6	Nicht-Standardanalysis nach Robinson	63
6.1	Heuristische Betrachtungen	64
6.2	Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$	67
6.3	Übertragung von Relationen	70
6.4	Das allgemeine Übertragungsprinzip	72
6.5	Einige Illustrationen	76
6.6	Ergänzungen	81
6.7	Schlussbetrachtungen	82

7	Synthetische Infinitesimalrechnung	87
7.1	Das Axiom von Kock-Lawvere	88
7.2	Differentiation	93
7.3	Integration	96
7.4	Mathematik ohne Elemente	100
7.5	Sprachen und ihre Interpretationen	107
7.6	Kategorien von Funktoren	111
7.7	Kleine Diskussion	117
8	Conwayzahlen	121
8.1	Kleine Diskussion	131
9	Brouwers Theorie der reellen Zahlen	135
9.1	Konstruktive Logik	136
9.2	Reelle Zahlerzeuger	142
9.3	Das Kontinuum	145
9.4	Schlussbetrachtung	148
10	Zusammenfassung	153
	Literatur	163