Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie

Norbert Henze

Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie

Inkl. zahlreicher Erklärvideos

Springer Spektrum

Norbert Henze
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-662-59562-6 ISBN 978-3-662-59563-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59563-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Dieses Werk vermittelt eine fundierte, lebendige und durch diverse Erklärvideos audiovisuell ergänzte Einführung sowohl in die Stochastik (inklusive der Statistik) als auch in die Maß- und Integrationstheorie. Es wendet sich an Studierende im zweiten Jahr eines Mathematikstudiums, die Kenntnisse der Grundvorlesungen in Analysis und Linearer Algebra besitzen. Da Kenntnisse der Maß- und Integrationstheorie nach dem ersten Studienjahr nicht vorausgesetzt werden können und oft erst im dritten Semester innerhalb einer weiterführenden Vorlesung über Analysis erworben werden, ist dieses Buch so aufgebaut, dass große Teile keinerlei Vorwissen aus dieser mathematischen Teildisziplin benötigen.

Besondere didaktische Elemente dieses Buches sind neben den über QR-Codes verlinkten Erklärvideos

- farbige Überschriften, die den Kerngedanken eines Abschnitts markieren,
- gelbe Merkkästen, die wichtige Definitionen und Sätze enthalten,
- mit einem roten Achtung gekennzeichnete Stellen, die vor Fallstricken warnen,
- kleine Beispiele, die der Einübung des Stoffes dienen,
- ganzseitige Beispiele, die mehr Raum benötigende Probleme und deren Lösungen behandeln,
- Unter-der-Lupe-Boxen, die insbesondere Sätze von großer Bedeutung und deren Beweise genauer betrachten,
- mit einem Fragezeichen gekennzeichnete Selbsttests, die eine unmittelbare Verständniskontrolle ermöglichen,
- Übersichten, in denen verschiedene Begriffe, Formeln oder Rechenregeln zusammengestellt sind,
- Hintergrund-und-Ausblick-Boxen, die einen Einblick in ein weiterführendes Thema geben

sowie Zusammenfassungen am Ende eines jeden Kapitels, die die wesentlichen Inhalte, Ergebnisse und Vorgehensweisen beinhalten.

Insgesamt geht der behandelte Stoff über das, was üblicherweise Gegenstand einer 4+2-stündigen Einführungsveranstaltung ist, deutlich hinaus. Da meine Intention beim Verfassen dieses Buches ausdrücklich nicht darin bestand, „möglichst viel Mathematik pro Seite unterzubringen“, unterscheidet sich dieses Buch von anderen Lehrbüchern unter anderem durch eine relativ hohe Redundanz. So werden manche Begriffe wie Erwartungswert und Varianz zuerst in einem elementaren Rahmen auf diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen motiviert, eingeführt und diskutiert, und später erkennt man, dass alle Eigenschaften auch auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsräumen gelten, weil der im diskreten Fall eingeführte Erwartungswert ein Spezialfall des allgemeinen Maß-Integrals ist. Weil gerade in der Stochastik das Verständnis besonders wichtig ist, nehmen die Motivation von Begriffsbildungen wie z. B. stochastische Unabhängigkeit sowie Erklärungen breiten Raum ein. Hinzu kommt das „harte Geschäft“ der Modellierung zufallsabhängiger Vorgänge als ein wichtiges Aufgabenfeld der Stochastik. Da die Konstruktion geeigneter Modelle im Hinblick auf die vielfältigen Anwendungen der Stochastik von Grund auf gelernt werden sollte, ist dem Aspekt der Modellbildung viel Platz gewidmet. Hier mag es trösten, dass selbst Universalgelehrte wie Leibniz oder Galilei bei einfachen Zufallsphänomenen mathematische Modelle aufstellten, die sich nicht mit den gemachten Beobachtungen des Zufalls in Einklang bringen ließen.

Heutzutage ist die Wahrscheinlichkeitstheorie eine der fruchtbarsten mathematischen Theorien. Ihre Untersuchungsobjekte sind unter anderem stochastische Prozesse, die als Zufallsvariablen in geeigneten Funktionenräumen aufgefasst werden können. Grundbausteine vieler stochastischer Prozesse sind der eine zentrale Stellung in der stochastischen Analysis und Finanzmathematik einnehmende Brown-Wiener-Prozess sowie der Poisson-Prozess. Letzterer bildet den Ausgangspunkt für allgemeine Punktprozesse, wobei die untersuchten zufälligen Objekte, wie z.B. in der stochastischen Geometrie und räumlichen Stochastik, Werte in relativ allgemeinen topologischen Räumen annehmen können.

Die Verbreitung des Computers hat die Bedeutung der Mathematik im Allgemeinen und der Stochastik (und hier insbesondere der Statistik) im Speziellen ungemein vergrößert. So wären etwa die von Bradley Efron (*1938) im Jahr 1979 begründeten *Bootstrap-Verfahren* (siehe [9]), die die beobachteten Daten für weitere Simulationen verwenden, um etwa die Verteilung einer komplizierten Teststatistik zu approximieren, ohne leistungsfähige Computer undenkbar. Gleiches gilt für das sog. *maschinelle Lernen*, bei dem es unter anderem um das Erkennen von Mustern und Gesetzmäßigkeiten geht. Fast explosionsartig ansteigende Speicherkapazitäten und Rechengeschwindigkeiten erlauben die Verarbeitung immer größerer Datenmengen, was zum Schlagwort *Big Data* geworden ist.

Da man Mathematik am besten durch eine möglichst intensive Beschäftigung mit Aufgaben lernt, enthält das Buch insgesamt 332 Übungsaufgaben, die am Ende der Kap. 2–8 zusammengestellt sind. Diese in *Verständnisfragen*, *Rechenaufgaben* und *Beweisaufgaben* unterteilten Aufgaben sollen helfen, den Stoff aktiv zu verarbeiten. Versuchen Sie sich zuerst selbstständig an den Aufgaben. Erst wenn Sie sicher sind, dass Sie es alleine nicht schaffen, sollten Sie die Hinweise am Ende des Buches zurate ziehen oder sich an Kommilitonen wenden. Zur Kontrolle finden Sie hier auch die Resultate. Sollten Sie trotz Hinweisen nicht mit der Aufgabe fertig werden, finden Sie die Lösungswege im Arbeitsbuch zu diesem Werk.

Selbstverständlich ist dieses Buch nicht ohne die tatkräftige Hilfe anderer entstanden. So sind große Teile zunächst als Kapitel des Buches „Grundwissen Mathematikstudium – Höhere Analysis, Numerik und Stochastik“ erschienen. Hier schulde ich Christian Karpfinger Dank, dass ich in Abschn. 1.2 Anleihen aus dem dortigen Abschnitt machen und sogar größere Teile von dort übernehmen durfte. Frau Viola Riess und Herrn Bernhard Klar danke ich für geduldiges Korrekturlesen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge. Herrn M. Radke schulde ich Dank für ein perfektes Redigieren des Textes. Mein besonderer Dank gilt dem Verlag Springer Spektrum. Nur die strukturierende Übersicht von Frau Bianca Alton und die immer wieder beeindruckende Kompetenz von Herrn Andreas Rüdinger mit vielen kreativen und engagierten Vorschlägen machten die Umsetzung dieses ehrgeizigen Projektes überhaupt erst möglich.

Pfinztal
im Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Stochastik – eine Wissenschaft für sich . . . 1

1.1 Über dieses Buch . . . 2

1.2 Die didaktischen Elemente dieses Lehrbuches . . . 2

1.3 Zur Geschichte der Stochastik und der Maß- und Integrationstheorie . . . 5

1.4 Anmerkungen zur Mathematik und Stochastik . . . 6

2 Wahrscheinlichkeitsräume – Modelle für stochastische Vorgänge . . . 9

2.1 Grundräume, Ereignisse . . . 10

2.2 Zufallsvariablen . . . 13

2.3 Das Axiomensystem von Kolmogorov . . . 15

2.4 Verteilungen von Zufallsvariablen, Beispiel-Klassen . . . 17

2.5 Folgerungen aus den Axiomen . . . 22

2.6 Elemente der Kombinatorik . . . 28

2.7 Urnen- und Fächer-Modelle . . . 33

Zusammenfassung . . . 38

Aufgaben . . . 40

Antworten zu den Selbstfragen . . . 44

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit – Meister Zufall hängt (oft) ab . . . 45

3.1 Modellierung mehrstufiger stochastischer Vorgänge . . . 46

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . 49

3.3 Stochastische Unabhängigkeit . . . 54

3.4 Folgen unabhängiger Zufallsvariablen . . . 61

3.5 Markov-Ketten . . . 65

Zusammenfassung . . . 73

Aufgaben . . . 75

Antworten zu den Selbstfragen . . . 79

4 Diskrete Verteilungsmodelle – wenn der Zufall zählt . . . 81

4.1 Diskrete Zufallsvariablen . . . 82

4.2 Erwartungswert und Varianz . . . 85

4.3 Wichtige diskrete Verteilungen . . . 93

4.4 Kovarianz und Korrelation . . . 101

4.5 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen 106

4.6 Erzeugende Funktionen 112

Zusammenfassung 117

Aufgaben 119

Antworten zu den Selbstfragen 124

5 Stetige Verteilungen und allgemeine Betrachtungen – jetzt wird es analytisch 125

5.1 Verteilungsfunktionen und Dichten 126

5.2 Transformationen von Verteilungen 136

5.3 Kenngrößen von Verteilungen 145

5.4 Wichtige stetige Verteilungen 154

5.5 Charakteristische Funktionen (Fourier-Transformation) 159

5.6 Bedingte Verteilungen 165

5.7 Bedingte Erwartungen 171

5.8 Stoppzeiten und Martingale 176

Zusammenfassung 184

Aufgaben 186

Antworten zu den Selbstfragen 191

6 Konvergenzbegriffe und Grenzwertsätze – Stochastik für große Stichproben 195

6.1 Konvergenz fast sicher, stochastisch und im p-ten Mittel 196

6.2 Das starke Gesetz großer Zahlen 200

6.3 Verteilungskonvergenz 207

6.4 Zentrale Grenzwertsätze 215

Zusammenfassung 223

Aufgaben 224

Antworten zu den Selbstfragen 228

7 Grundlagen der Mathematischen Statistik – vom Schätzen und Testen 229

7.1 Einführende Betrachtungen 230

7.2 Punktschätzung 234

7.3 Konfidenzbereiche 246

7.4 Statistische Tests 255

7.5 Optimalitätsfragen: Das Lemma von Neyman-Pearson 271

7.6 Elemente der nichtparametrischen Statistik 276

Zusammenfassung 291

Aufgaben 293

Antworten zu den Selbstfragen 298

8 Grundzüge der Maß- und Integrationstheorie – vom Messen und Mitteln . . . 299

8.1 Inhaltsproblem und Maßproblem . . . 300

8.2 Mengensysteme . . . 302

8.3 Inhalte und Maße . . . 307

8.4 Messbare Abbildungen, Bildmaße . . . 318

8.5 Das Maß-Integral . . . 325

8.6 Nullmengen, Konvergenzsätze . . . 333

8.7 $\mathcal{L}^p$-Räume . . . 337

8.8 Maße mit Dichten . . . 341

8.9 Produktmaße, Satz von Fubini . . . 347

Zusammenfassung . . . 354

Aufgaben . . . 357

Antworten zu den Selbstfragen . . . 361

Hinweise zu den Aufgaben . . . 363

Lösungen zu den Aufgaben . . . 369

Bildnachweis . . . 371

Literatur . . . 373

Stichwortverzeichnis . . . 375

Verzeichnis der Übersichten

Urnen- und Fächer-Modelle . . . 37
Diskrete Verteilungen . . . 101
Stetige Verteilungen . . . 159
Konvergenzbegriffe in der Analysis, der Maßtheorie und der Stochastik . . . 212