
Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von

Friedhelm Padberg, Universität Bielefeld, Bielefeld

Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen, Essen

Die Reihe „Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II“ (MPS I+II) ist die führende Reihe im Bereich „Mathematik und Didaktik der Mathematik“. Sie ist schon lange auf dem Markt und mit aktuell rund 60 bislang erschienenen oder in konkreter Planung befindlichen Bänden breit aufgestellt. Zielgruppen sind Lehrende und Studierende an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie Lehrkräfte, die nach neuen Ideen für ihren täglichen Unterricht suchen.

Die Reihe MPS I+II enthält eine größere Anzahl weit verbreiteter und bekannter Klassiker sowohl bei den speziell für die Lehrerausbildung konzipierten Mathematikwerken für Studierende aller Schulstufen als auch bei den Werken zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe (einschließlich der frühen mathematischen Bildung), der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II.

Die schon langjährige Position als Marktführer wird durch in regelmäßigen Abständen erscheinende, gründlich überarbeitete Neuauflagen ständig neu erarbeitet und ausgebaut. Ferner wird durch die Einbindung jüngerer Koautorinnen und Koautoren bei schon lange laufenden Titeln gleichermaßen für Kontinuität und Aktualität der Reihe gesorgt. Die Reihe wächst seit Jahren dynamisch und behält dabei die sich ständig verändernden Anforderungen an den Mathematikunterricht und die Lehrerausbildung im Auge.

Konkrete Hinweise auf weitere Bände dieser Reihe finden Sie am Ende dieses Buches und unter <http://www.springer.com/series/8296>

Hans-Dieter Sill · Grit Kurtzmann

Didaktik der Stochastik in der Primarstufe

 Springer Spektrum

Hans-Dieter Sill
Universität Rostock
Rostock, Deutschland

Grit Kurtzmann
Martha-Müller-Grählert-Schule
Franzburg, Deutschland

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II
ISBN 978-3-662-59267-0 ISBN 978-3-662-59268-7 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Hinweis der Herausgeber

Dieser Band von Hans-Dieter Sill und Grit Kurtzmann thematisiert vielseitig und aspektreich den Stochastikunterricht in der Grundschule. Der Band erscheint in der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. In dieser Reihe eignen sich insbesondere die folgenden Bände zur Vertiefung unter mathematikdidaktischen sowie mathematischen Gesichtspunkten:

- P. Bardy: Mathematisch begabte Grundschul Kinder – Diagnostik und Förderung
- C. Benz/A. Peter-Koop/M. Grüßing: Frühe mathematische Bildung
- M. Franke/S. Reinhold: Didaktik der Geometrie in der Grundschule
- M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule
- K. Hasemann/H. Gasteiger: Anfangsunterricht Mathematik
- K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 1
- K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2
- F. Käpnick: Mathematiklernen in der Grundschule
- G. Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule
- G. Krauthausen: Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule
- F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik
- P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe
- A.-S. Steinweg: Algebra in der Grundschule
- M. Helmerich/K. Lengnink: Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie
- T. Leuders: Erlebnis Arithmetik
- F. Padberg/A. Büchter: Einführung in die Arithmetik
- F. Padberg/A. Büchter: Arithmetik/Zahlentheorie
- F. Padberg/A. Büchter: Elementare Zahlentheorie
- E. Rathgeb-Schnierer/Ch. Rechtsteiner: Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln

Bielefeld/Essen
Mai 2019

Friedhelm Padberg
Andreas Büchter

Vorwort

Mit diesem Buch wollen wir vor allem die Arbeit von Lehrpersonen in der Primarstufe unterstützen. Wir stellen ein theoretisch begründetes und mit vielen praktischen Unterrichtsbeispielen versehenes Konzept zur schrittweisen Herausbildung stochastischer Kompetenzen von Kindern der ersten bis vierten Jahrgangsstufe vor. Unsere Vorschläge entsprechen der Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ der aktuellen Bildungsstandards für die Primarstufe sowie der daran anknüpfenden Leitidee „Daten und Zufall“ der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I.

Grundlage unserer Vorschläge sind Arbeiten zur Didaktik der Stochastik in der Primarstufe von Varga, Heitele, Winter, Müller und Wittmann sowie die zahlreichen fachdidaktischen Artikel und Erfahrungsberichte von Lehrpersonen in Fachzeitschriften. Wir beziehen aber auch eigene Unterrichtserfahrungen sowie Erfahrungsberichte von Teilnehmern zahlreicher von uns durchgeführter, schuljahresbegleitender Fortbildungsveranstaltungen zum Stochastikunterricht in der Primarstufe ein. Unsere Unterrichtsideen, die sich oft von den gegenwärtig dominierenden Unterrichtsvorschlägen unterscheiden, wurden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Fortbildungsveranstaltungen sehr positiv aufgenommen, erfolgreich in ihrem Unterricht erprobt und durch viele Anregungen von ihnen immer weiter verbessert. Dies hat uns sehr zum Schreiben dieses Buches ermutigt.

Wir verstehen in diesem Buch unter **Stochastik** eine Zusammenfassung der relativ selbstständigen mathematischen Teildisziplinen Beschreibende Statistik, Explorative Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische (auch Beurteilende oder Schließende) Statistik. Für die Primarstufe sind nur Elemente der Beschreibenden Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung relevant. Anstelle von Stochastik kann man deshalb im Unterricht der Primarstufe in Anlehnung an die Leitidee der Bildungsstandards auch vom Umgang mit Daten und Wahrscheinlichkeiten sprechen. Wir verwenden zur Verkürzung aber weiterhin den Begriff Stochastik, alle allgemeinen Ausführungen beziehen sich dabei nur auf die genannten beiden Teildisziplinen.

Eine besondere Rolle kommt der Kombinatorik zu. Sie zählt zwar nicht zur Stochastik, es gibt aber viele Berührungspunkte in fachlicher und unterrichtlicher Hinsicht, sodass wir uns entschlossen haben, Hinweise und Empfehlungen zu Problemen der Bestimmung von Anzahlen ebenfalls in das Buch aufzunehmen.

Neben den konkreten Unterrichts- und Stoffverteilungsvorschlägen erläutern wir ausgewählte fachliche Grundlagen.

Wir verwenden durchgehend die Bezeichnung „Primarstufe“ für die Jahrgangsstufen 1 bis 4. Bei der in der Literatur für diese Jahrgangsstufen oft zu findende Bezeichnung „Grundschule“ entsteht das Problem, dass in den Bundesländern Berlin und Brandenburg die Schulart „Grundschule“ die Jahrgangsstufen 1 bis 6 umfasst.

Wir bedanken uns bei Herrn Dr. Guder für die Hinweise während der Konzipierung des Buches sowie bei den Studierenden Frau Cordt, Frau Krause und Herrn Pilgermann für die Erarbeitung von Unterrichtsmaterialien, die erstellten Fotos aus dem Unterricht und die durchgeführten Schulbuchanalysen. Weiterhin bedanken wir uns bei Frau Bänsch, die durch das Einbringen ihrer Erfahrungen als Primarstufenlehrerin mit ihren Ideen und kritischen Hinweisen die Fertigstellung des Buches unterstützt hat.

Rostock
März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Konzeptionelle Überlegungen und Vorschläge zum Stochastikunterricht in der Primarstufe	1
1.1	Besonderheiten des Stochastikunterrichts in der Primarstufe	1
1.2	Entwicklung des Stochastikunterrichts in der Primarstufe	4
1.2.1	Entwicklungen bis zum Beschluss der Bildungsstandards 2004	4
1.2.2	Entwicklungen nach dem Beschluss der Bildungsstandards	11
1.3	Stochastik in den aktuellen Bildungsstandards	12
1.3.1	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	12
1.3.2	Allgemeine mathematische Kompetenzen	14
1.4	Modellierung stochastischer Situationen	18
1.4.1	Begriff der stochastischen Situation	18
1.4.2	Modellierung stochastischer Situationen	19
1.4.3	Prozessbetrachtung stochastischer Situationen	21
1.4.3.1	Aspekte des Begriffs „Vorgang“	22
1.4.3.2	Bestandteile einer Prozessbetrachtung	23
1.4.3.3	Stochastische und nichtstochastische Vorgänge	26
1.4.3.4	Prozessbetrachtung bei statistischen Untersuchungen	27
1.4.4	Besonderheiten der Prozessbetrachtung in der Primarstufe	28
1.5	Entwicklungslinien stochastischen Wissens und Könnens in der Primarstufe	29
2	Vorschläge für Ziele und Inhalte im Anfangsunterricht	35
2.1	Erfassen von Daten	35
2.1.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	35
2.1.2	Unterrichtsvorschläge	39
2.2	Lesen und Erstellen grafischer Darstellungen	43
2.2.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	43
2.2.1.1	Begriff und Arten grafischer Darstellungen	43
2.2.1.2	Aufbau von Kompetenzen im Lesen und Erstellen grafischer Darstellungen	47

2.2.2	Unterrichtsvorschläge	49
2.2.2.1	Lesen von Diagrammen	49
2.2.2.2	Erstellen von Streifendiagrammen	51
2.3	Konzept für die Vermittlung von Inhalten aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Anfangsunterricht	57
2.3.1	Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	57
2.3.2	Konzept des Vorgehens	59
2.3.3	Erste Erfahrungen mit der Umsetzung des Konzeptes	61
2.4	Erkennen von möglichen Ergebnissen eines Vorgangs	62
2.4.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	62
2.4.2	Unterrichtsvorschläge	66
2.4.3	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	68
2.5	Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten	70
2.5.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	70
2.5.2	Unterrichtsvorschläge	72
2.6	Beschreiben und Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten	75
2.6.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	75
2.6.2	Unterrichtsvorschläge	77
2.6.3	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	79
2.7	Darstellen von Wahrscheinlichkeiten auf einer Skala	80
2.7.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	80
2.7.2	Unterrichtsvorschläge	83
2.7.3	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	86
2.8	Untersuchen des Einflusses von Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen	87
2.8.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	87
2.8.2	Unterrichtsvorschläge	88
3	Vorschläge für Ziele und Inhalte im weiterführenden Unterricht	91
3.1	Statistische Untersuchungen planen und durchführen	91
3.1.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	91
3.1.2	Unterrichtsvorschläge	97
3.2	Lesen und Erstellen grafischer Darstellungen	103
3.2.1	Diagrammartentypen	103
3.2.2	Entwicklung von Teilhandlungen zum Erstellen eines vollständigen Streifendiagramms	110
3.2.3	Weitere Vorschläge und Stolpersteine	115
3.3	Ermitteln und Interpretieren von statistischen Kenngrößen	117
3.3.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	117
3.3.2	Der Durchschnitt (Arithmetisches Mittel)	118
3.3.2.1	Arithmetisches Mittel als Ausgleichswert	119
3.3.2.2	Arithmetisches Mittel als Ergebnis der Gleichverteilung	122

3.3.2.3	Der Durchschnitt als Gleichgewichtspunkt einer Häufigkeitsverteilung	123
3.3.3	Weitere statistische Kenngrößen	126
3.4	Vergleichen, Schätzen, Darstellen und Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten	129
3.4.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	129
3.4.2	Unterrichtsvorschläge	132
3.4.2.1	Vergleichen von unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten	132
3.4.2.2	Vorschläge zum Problem der Gleichwahrscheinlichkeit beim Werfen von Objekten	137
3.4.2.3	Schätzen und Darstellen von Wahrscheinlichkeiten	138
3.4.2.4	Untersuchen des Einflusses von Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen	144
3.4.2.5	Wahrscheinlichkeiten und erwarteter Gewinn	148
3.4.2.6	Experimente mit Glücksspielgeräten	148
3.4.3	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	156
3.5	Daten und Wahrscheinlichkeiten	156
3.5.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	156
3.5.2	Unterrichtsvorschläge	158
3.5.3	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	160
3.6	Ermitteln unbekannter Zustände	162
3.6.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	162
3.6.2	Unterrichtsvorschläge	163
3.6.3	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	165
4	Lösen kombinatorischer Aufgaben	169
4.1	Kombinatorik als Wissenschaftsdisziplin und ihre Aufnahme in Lehrpläne	169
4.2	Generelle fachliche und fachdidaktische Bemerkungen	171
4.3	Möglichkeiten zum Lösen kombinatorischer Aufgaben durch Lehrpersonen	174
4.4	Konzept der Entwicklung des kombinatorischen Könnens in der Primarstufe	186
4.5	Lösen kombinatorischer Aufgaben durch Probieren und systematisches Probieren	187
4.5.1	Fachliche und fachdidaktische Grundlagen	187
4.5.2	Unterrichtsvorschläge	191
4.6	Lösen kombinatorischer Aufgaben mit weiteren Methoden	196
4.6.1	Verwenden des kombinatorischen Aspektes der Multiplikation	196
4.6.2	Verwenden von Baumdiagrammen	198
4.6.3	Verwenden von Zählregeln	202
4.7	Bemerkungen zu anderen Unterrichtsvorschlägen	203

5	Analyse von Begriffen und Zusammenhängen	205
5.1	Der Begriff „Zufall“	205
5.1.1	Bedeutungen der Wörter „Zufall“ und „zufällig“	206
5.1.1.1	Zufall und irreversible Durchmischungen	206
5.1.1.2	Zufall und Determiniertheit, Kausalität sowie Schicksal	207
5.1.1.3	Zufall und Variabilität bei kausalen Zusammenhängen	208
5.1.1.4	Zufall und Grad der Erwartung	210
5.1.1.5	Zufall und Vorhersehbarkeit	210
5.1.1.6	Zufall und Rolle von beteiligten Personen	211
5.1.1.7	Zufall und Gleichwahrscheinlichkeit	212
5.1.2	Zufallsbegriff in der Literatur zum Primarstufenunterricht	212
5.1.3	Zu den Begriffen „zufälliges Ereignis“, „Zufallsexperiment“ und „Zufallsgerät“	214
5.1.4	Beschreibung von Aspekten des Zufallsbegriffs mit einer Prozessbetrachtung und Wahrscheinlichkeitsaussagen	218
5.2	Der Begriff „Wahrscheinlichkeit“	221
5.2.1	Formale Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs	221
5.2.2	Der objektive Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs	224
5.2.3	Der subjektive Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs	225
5.2.4	Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten	226
5.2.5	Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten	228
5.2.6	Wahrscheinlichkeiten und Chancen	229
5.2.7	Wahrscheinlichkeit und Häufigkeiten	233
5.2.7.1	Absolute und relative Häufigkeiten	233
5.2.7.2	Gesetze der großen Zahlen	234
5.3	Wahrscheinlichkeiten beim Umgang mit Glücksspielgeräten	237
5.3.1	Glücksspielgeräte im Stochastikunterricht der Primarstufe	237
5.3.2	Experimente zur Wiederholung von Vorgängen mit Glücksspielgeräten	241
5.3.2.1	Experimente zu zahlreichen Wiederholungen eines Vorgangs	241
5.3.2.2	Experimente zu Eigenschaften von Häufigkeitsverteilungen bei bekannten Wahrscheinlichkeiten	247
5.3.3	Entnehmen von Objekten aus Behältnissen	250
5.3.4	Werfen von Objekten	253
5.3.5	Drehen von Glücksrädern oder Glückskreiseln	256
5.3.6	Probleme mehrstufiger Vorgänge	257
5.4	Bemerkungen zu anderen Auffassungen und Bezeichnungen	259

Schulbücher und Arbeitshefte	263
Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II	265
Literatur	267
Stichwortverzeichnis	277