
Einführung in die Theoretische Physik

Robin Santra

Einführung in die Theoretische Physik

Klassische Mechanik mit
mathematischen Methoden



Springer Spektrum

Robin Santra
Center for Free-Electron Laser Science
DESY und Universität Hamburg
Hamburg, Deutschland

ISBN 978-3-662-58520-7 ISBN 978-3-662-58521-4 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-58521-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Margit Maly

Illustrationen: Sherin Santra

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

In der traditionellen universitären Physikausbildung wird, über Vorlesungen in der Reinen Mathematik (primär Analysis und Lineare Algebra) hinaus, ein Kurs zu *Mathematischen Methoden für Physiker* angeboten. Dadurch soll das fortgeschrittene mathematische Handwerkszeug vermittelt werden, das in der Physik bereits ab dem ersten Semester benötigt wird, in der Reinen Mathematik aber aus didaktischen Gründen nicht hinreichend frühzeitig behandelt werden kann. Die Anwendung auf physikalische Fragestellungen ist jedoch nicht Gegenstand der *Mathematischen Methoden für Physiker*. Ein alternatives Lehrkonzept besteht darin, das enge Zusammenspiel von Physik und Mathematik bereits zu Studienbeginn in einem kombinierten Kurs zu erörtern. An der Universität Hamburg wurde diese *Einführung in die Theoretische Physik* von Bernhard Kramer etabliert. Das vorliegende Lehrbuch spiegelt zentrale Inhalte dieses Lehrkonzepts für das erste Studiensemester wider und ist der *Klassischen Mechanik* gewidmet.

Ein Vorteil, die traditionellen *Mathematischen Methoden für Physiker* durch die *Einführung in die Theoretische Physik* zu ersetzen, besteht darin, dass die Mathematik von Anfang an deutlich stärker mit der Physik verknüpft wird. Dadurch ist der Nutzen der jeweiligen mathematischen Methoden für die physikalische Anwendung besser motiviert und für die Studierenden leichter nachvollziehbar. Ein weiterer Aspekt ist, dass die Studienreform, die im Rahmen des Bologna-Prozesses stattfand, im Allgemeinen eine Umstrukturierung der Ausbildung in der Theoretischen Physik nach sich gezogen hat. Insbesondere ist es notwendig geworden, gewisse Standardthemen wie das Kepler-Problem näher an den Anfang des Studiums zu rücken. Im Rahmen der *Einführung in die Theoretische Physik* können diese Standardthemen in natürlicher Art und Weise vermittelt werden.

Der Grund, weshalb ich mich dazu entschieden habe, dieses Lehrbuch zu schreiben, ist, dass es zwar Lehrbücher zu „Mathematischen Methoden“ bzw. zu „Theoretischer Physik“ gibt, aber meines Wissens nach keine, die die beschriebene Grundintention der *Einführung in die Theoretische Physik* optimal zusammenführen. Das vorliegende Lehrbuch ist mein Versuch, diesem Ziel gerecht zu werden. Dabei ist die konkrete Zusammenstellung und Darstellung der Themen meine eigene. Ich habe aber zur Inspiration an der einen oder anderen Stelle Inhalte von bestimmten Quellen herangezogen. Zu nennen sind hier die Bücher *Classical Mechanics (The Theoretical Minimum)* von Leonard Susskind und

George Hrabovsky, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* von Mary L. Boas und *Chaotic Dynamics* von Gregory L. Baker und Jerry P. Gollub.

Kap. 1 dieses Lehrbuchs dient der Einleitung. Neben dem Begriff des dynamischen Gesetzes wird dort das Konzept des physikalischen Zustands bzw. des Zustandsraums eingeführt. Gerade der Zustandsbegriff zieht sich wie ein roter Faden durch das gesamte Lehrbuch. In Kap. 2 verbinde ich das physikalische Thema der Kinematik eines Punktteilchens mit den mathematischen Themen der Vektoren, der Differentialschreibweise und der krummlinigen Koordinaten. Nach Kap. 3, in dem der Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und der Beschreibung von dynamischen Prozessen diskutiert wird, behandle ich in Kap. 4 analytische Verfahren zur Lösung von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen. Dort diskutiere ich auch komplexe Zahlen und biete eine ausführliche Analyse des harmonischen Oszillators. Kap. 5 ist der Mathematik der Fourier-Reihen gewidmet. Den Zusammenhang zur Physik stelle ich über eine Untersuchung der Situation her, in der der harmonische Oszillator einer zeitlich periodischen Kraft ausgesetzt wird, die nicht rein sinusförmig ist.

In Kap. 6 nutze ich die Gelegenheit zu zeigen, wie man mit Hilfe von numerischen Methoden in einem augenscheinlich einfachen, aber nicht analytisch lösba- ren Modell verblüffend komplexe Physik entdecken kann. In den verbleibenden Kapiteln behandle ich abgeschlossene Mehrteilchensysteme. Die dazugehörigen Zustandsräume und die Erhaltung des Gesamtimpulses sind Gegenstand von Kap. 7. Nach einer Diskussion des mathematischen Themas der partiellen Ableitungen in Kap. 8 leite ich in Kap. 9 den Energieerhaltungssatz her und diskutiere die dazugehörigen Voraussetzungen. Ich behandle dort unter anderem auch das für den physikalischen Begriff der Arbeit erforderliche mathematische Konzept des Wegintegrals, wobei ich mich an Vorlesungsnotizen meiner Hamburger Kollegin Daniela Pfannkuche orientiert habe. Im Rahmen der Lösung des Kepler-Problems in Kap. 10 führe ich den Begriff des Drehimpulses ein und entwickle diesen im abschließenden Kap. 11 systematisch weiter. Kap. 11 dient darüber hinaus dazu, die Mathematik der Matrizen in Verbindung zur Physik der Drehbewegungen des starren Körpers zu setzen.

Ich habe mich durchweg bemüht, die Vorkenntnisse des Studienanfängers im Blickfeld zu behalten. Zum Beispiel habe ich alle logischen Schritte bzw. Rechenschritte in diesem Lehrbuch ausführlich dargestellt und erläutert. Dabei baue ich auf der Annahme auf, dass Sie mit mathematischen Methoden, wie sie in der Schule behandelt werden (z. B. die Lösung quadratischer Gleichungen), sicher und routiniert umgehen können. Natürlich kommt die erforderliche Routine nur durch regelmäßige Übung. Falls Sie also an der einen oder anderen Stelle das Gefühl haben, diese Routine nicht zu besitzen, dann sollten Sie sich die entsprechenden Methoden nochmals vor Augen führen und insbesondere durch das selbstständige Lösen von Aufgaben üben. Eine der Herausforderungen bei einem Universitätsstudium ist es, eigene Schwächen selbst zu erkennen und selbst die notwendigen Korrekturmaßnahmen einzuleiten.

Die hübschen, humorvollen Zeichnungen, von denen jeweils eine am Anfang jedes Kapitels erscheint, stammen von meiner Tochter Sherin Santra. Ihr gilt mein

ganz besonderer Dank für ihren wunderbaren Beitrag. Caroline Arnold, Katrin Buth und Ludger Inhester möchte ich für ihre hilfreichen Vorschläge zu den Inhalten dieses Lehrbuchs danken. Des Weiteren danke ich Daniel Knafla, Daniela Pfannkuche, Nina Rohringer, Thomas Schörner-Sadenius, Peter Schmelcher, Michael Thorwart und Wilfried Wurth für ihre Kommentare. Mein Dank gilt auch allen Studierenden der Universität Hamburg, die mir zu meinem Vorlesungsskript, aus dem dieses Lehrbuch hervorgegangen ist, Rückmeldung gegeben haben. Schließlich möchte ich mich herzlich bei meiner Frau Tanja Santra bedanken, ohne deren unermüdliche Unterstützung ich nicht den Freiraum gehabt hätte, um dieses Lehrbuch zu schreiben.

Hamburg
November 2018

Robin Santra

Inhaltsverzeichnis

1	Grundkonzepte	1
1.1	Begriffe, Annahmen und Ziele	2
1.1.1	Theoretische Physik	2
1.1.2	Determinismus und Reversibilität	3
1.2	Mathematische Modellbildung	4
1.3	Eindimensionaler, reeller Zustandsraum	7
1.3.1	f hängt nur von n ab	7
1.3.2	f hängt nur von Z_n ab	8
1.4	Aufgaben	11
2	Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten	13
2.1	Wo befindet sich das Teilchen?	14
2.1.1	Ortsvektoren	14
2.1.2	Orthonormale Basisvektoren	15
2.1.3	Das Kronecker-Delta	17
2.1.4	Koordinatendarstellung	18
2.2	Wie bewegt sich das Teilchen?	21
2.2.1	Der Differentialquotient	21
2.2.2	Geschwindigkeitsvektoren	22
2.2.3	Beschleunigungsvektoren	24
2.3	Beispiele	25
2.3.1	Eindimensionale Bewegung in z -Richtung	25
2.3.2	Schwingung in x -Richtung	25
2.3.3	Kreisbewegung in der xy -Ebene	28
2.4	Krummlinige Koordinaten	29
2.5	Bemerkungen zum Thema Zustand	33
2.6	Aufgaben	34
3	Dynamische Gesetze für einen Massenpunkt	35
3.1	Fundamentalsatz der Analysis	36
3.2	Aristoteles'sche Bewegungsgleichung	39
3.2.1	Diskretisierung und Determinismus	40
3.2.2	Integration der Bewegungsgleichung	41
3.2.3	Irreversible Dynamik	42

3.3	Newton'sche Bewegungsgleichung	44
3.3.1	Das zweite Newton'sche Gesetz	44
3.3.2	Das erste Newton'sche Gesetz	44
3.3.3	Konstante Kraft	46
3.3.4	Harmonischer Oszillator	46
3.4	Zustandsraum	48
3.5	Prinzipien	49
3.6	Aufgaben	50
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	53
4.1	Bezeichnungen	54
4.1.1	Ordnung und Linearität	54
4.1.2	Weitere Beispiele	56
4.2	Separable Differentialgleichungen	59
4.2.1	Beispiele	60
4.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	62
4.4	Komplexe Zahlen	65
4.5	Taylor-Reihen	69
4.6	Homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	72
4.6.1	Spezialfälle	75
4.7	Ungedämpfter bzw. gedämpfter harmonischer Oszillator	78
4.8	Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	86
4.8.1	Sukzessive Integration	87
4.8.2	Spezialfall	89
4.9	Erzwungene Schwingungen des gedämpften harmonischen Oszillators	93
4.10	Superpositionsprinzip	98
4.11	Aufgaben	100
5	Fourier-Reihen	103
5.1	Beispiel	104
5.2	Herleitung der Fourier-Koeffizienten	107
5.3	Anwendungen	113
5.3.1	Dreieckschwingung	113
5.3.2	Harmonischer Oszillator	115
5.4	Aufgaben	119
6	Nichtlineare Dynamik	121
6.1	Die Bewegungsgleichungen des getriebenen, gedämpften Pendels	122
6.1.1	Das ungedämpfte Pendel	122
6.1.2	Dämpfung und äußere Kraft	128
6.2	Elementare Verfahren zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	130

6.3	Numerische Ergebnisse	133
6.3.1	Reguläres Verhalten	133
6.3.2	Übergang zum Chaos	143
6.4	Aufgaben	154
7	Systeme mit mehr als einem Teilchen	157
7.1	Abgeschlossene Systeme	158
7.2	Der Zustandsraum eines Vielteilchensystems	160
7.3	Impuls und Phasenraum	162
7.3.1	Impulserhaltungssatz	162
7.4	Der Schwerpunkt	165
7.5	Aufgaben	166
8	Partielle Ableitungen	167
8.1	Ableitung von Funktionen mit mehreren Variablen	168
8.1.1	Beispiel	169
8.1.2	Variablenwechsel	170
8.2	Totale Differentiale	172
8.2.1	Herleitung des Runge-Kutta-Verfahrens zweiter Ordnung	174
8.3	Maximierungs- und Minimierungsaufgaben	175
8.3.1	Berücksichtigung von einer Nebenbedingung	176
8.3.2	Lagrange-Multiplikatoren	179
8.4	Aufgaben	183
9	Energie	185
9.1	Potential und Energieerhaltung	186
9.2	Der Nabla-Operator	188
9.2.1	Divergenz	190
9.2.2	Kreuzprodukt	191
9.2.3	Rotation	192
9.3	Wegintegrale	193
9.3.1	Weglänge	194
9.3.2	Arbeit	195
9.4	Konservative Kräfte	197
9.4.1	Zentralkräfte	199
9.5	Aufgaben	201
10	Zweiteilchenproblem mit Gravitationskraft	203
10.1	Schwerpunkts- und Relativkoordinaten	204
10.2	Relativbewegung	206
10.2.1	Energie- und Drehimpulserhaltung	207
10.2.2	Reduktion auf eine räumliche Dimension	209
10.2.3	Erlaubte und verbotene Bereiche	211
10.3	Bestimmung der Bahnkurve	214
10.4	Die Kepler'schen Gesetze	217
10.5	Aufgaben	221

11 Drehbewegungen	223
11.1 Erhaltung des Drehimpulses	224
11.2 Schwerpunkts- und Relativbewegung	227
11.2.1 Starre Körper	230
11.3 Matrizen	231
11.4 Drehungen und Kreuzprodukt	237
11.5 Der Trägheitstensor	242
11.6 Hauptachsentransformation	245
11.7 Bestimmung der Drehmatrix	250
11.7.1 Drehbewegung um eine Hauptträgheitsachse	254
11.7.2 Klassifizierung von starren Körpern	256
11.8 Energieerhaltung	258
11.9 Aufgaben	259
12 Anhänge	261
12.1 Computerprogramm zu Kap. 1	261
12.2 Computerprogramm zu Kap. 6	263
Sachverzeichnis	269