
Numerik

Andreas Meister · Thomas Sonar

Numerik

Eine lebendige und gut verständliche
Einführung mit vielen Beispielen

 Springer Spektrum

Andreas Meister
Universität Kassel
Kassel, Deutschland

Thomas Sonar
TU Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

ISBN 978-3-662-58357-9

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-58358-6>

ISBN 978-3-662-58358-6 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

Die Inhalte dieses Buches basieren größtenteils auf dem Werk „Grundwissen Mathematikstudium – Höhere Analysis, Numerik und Stochastik“, ISBN: 978-3-642-45077-8.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung und Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Seit vielen Jahren war es unser gemeinsamer Wunsch, einmal ein Lehrbuch über Numerische Mathematik zu schreiben. Hier ist es nun, und wir haben Herrn Andreas Rüdinger vom Verlag herzlich zu danken, dass er dieses Buch möglich gemacht hat! Die Inhalte dieses Buches sind größtenteils bereits in dem Werk *Grundwissen Mathematikstudium* erschienen, aber in Absprache mit dem Verlag haben wir uns entschlossen, sie nochmals als eigenes Werk zu veröffentlichen. Wir sind der Überzeugung, dass Studierende der Mathematik, Physik, und anderer Naturwissenschaften lieber zu einem eigenständigen, thematisch gestrafften Buch greifen, als dieses Thema in einem umfassenden Werk zur Höheren Analysis, Numerik und Stochastik zu suchen.

Wir sind zudem dankbar, unsere universitäre Ausbildung im Fach Numerik jeweils bei großartigen akademischen Lehrern wie Rainer Kress in Göttingen respektive Günter Mühlbach in Hannover erhalten zu haben. Dort haben wir beide gelernt und verinnerlicht, dass es sich bei Numerischer Mathematik eben um *Mathematik* handelt, und nicht um die Benutzung von fertigen Programmen auf Computern und die Interpretation bunter Bilder, die sich als Ausgabe solcher Computerprogramme ergeben. Wir sehen sehr klar die Bedeutung des Computers und haben auch selbst komplexe Algorithmen in sehr große Softwarepakete verwandelt; so waren wir beide zentral an der Erschaffung und der ersten Programmierung des DLR- τ -Codes beteiligt, der sich heute zu einem Arbeitspferd der *Computational Fluid Dynamics* (CFD) entwickelt hat. Etwas überspitzt hat es Edsger W. Dijkstra so ausgedrückt: „*Programming is one of the most difficult branches of applied mathematics; the poorer mathematicians had better remain pure mathematicians.*“*

In der Numerischen Mathematik (oder, wie es in der anglo-amerikanischen Welt heißt: *Numerical Analysis*) geht es um die zentralen Ideen zur Nutzung mathematischer Resultate im Kontext realitätsbezogener Anwendungen. Es geht um Konvergenzbeweise für Algorithmen, um den Einsatz von Funktionalanalysis zur Fehlerabschätzung oder zur Konstruktion ‚besserer‘, d. h. genauerer und effizienterer Algorithmen, und vieles mehr. Diesen mathematischen Kern der Numerischen Mathematik wollen wir herausarbeiten und den Studierenden, welche die Techniken der Numerischen Mathematik erlernen wollen, in einer ansprechenden Form präsentieren.

Unser Buch folgt einer heute fast klassisch zu nennenden Themenfolge: Interpolation und Approximation, Quadratur, Numerik linearer Gleichungssysteme, Eigenwertprobleme, Lineare Ausgleichsprobleme, Nichtlineare Gleichungen und Systeme sowie die Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Von einer Darstellung der Numerik partieller Differentialgleichungen haben wir Abstand genommen, denn allein für Teilaspekte dieses großen Gebietes bräuchte man jeweils ein eigenes Buch.

Unser Buch soll ein Lehrbuch sein, aber auch ein Lernbuch. Daher haben wir jedem Kapitel einige Selbstfragen und viele Aufgaben mit Lösungen mitgegeben. Wir hoffen, dass unsere eigene Begeisterung für die Numerische Mathematik durch dieses Buch auch eine neue Generation von Studierenden erfassen wird.

Heidelberg, Deutschland
November 2018

Andreas Meister
Thomas Sonar

* E.W. Dijkstra: How Do We Tell Truths that Might Hurt? (in: Edsger W. Dijkstra: Selected Writings on Computing: A Personal Perspective. Springer Verlag, p. 129, 1982).

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Mathematik – eine lebendige Wissenschaft | 1 |
| 1.1 | Über Mathematik, Mathematiker und dieses Lehrbuch | 2 |
| 1.2 | Die didaktischen Elemente dieses Lehrbuchs | 4 |
| 1.3 | Ratschläge zum weiterführenden Studium der Mathematik | 7 |
| 1.4 | Entwicklung und historische Einordnung | 7 |
| 2 | Warum Numerische Mathematik? – Modellierung, Simulation und Optimierung | 9 |
| 2.1 | Chancen und Gefahren | 10 |
| 2.2 | Ordnungssymbole und Genauigkeit | 14 |
| 2.3 | Kondition und Stabilität | 20 |
| | Zusammenfassung | 31 |
| | Aufgaben | 32 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 34 |
| 3 | Interpolation – Splines und mehr | 35 |
| 3.1 | Der Weierstraß'sche Approximationssatz und die Bernstein-Polynome | 36 |
| 3.2 | Die Lagrange'sche Interpolationsformel | 39 |
| 3.3 | Die Newton'sche Interpolationsformel | 45 |
| 3.4 | Splines | 55 |
| 3.5 | Trigonometrische Polynome | 64 |
| | Zusammenfassung | 71 |
| | Aufgaben | 75 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 77 |
| 4 | Quadratur – numerische Integrationsmethoden | 79 |
| 4.1 | Grundlegende Definitionen | 80 |
| 4.2 | Interpolatorische Quadraturen | 83 |
| 4.3 | Eine Fehlertheorie mit Peano-Kernen | 94 |
| 4.4 | Von der Trapezregel durch Extrapolation zu neuen Ufern | 99 |
| 4.5 | Gauß-Quadratur | 106 |
| 4.6 | Was es noch gibt: adaptive Quadratur, uneigentliche Integrale, optimale Quadraturverfahren und mehrdimensionale Quadratur | 116 |
| | Zusammenfassung | 120 |
| | Aufgaben | 123 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 125 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 5 | Numerik linearer Gleichungssysteme – Millionen von Variablen im Griff | 127 |
| 5.1 | Gauß-Elimination und QR-Zerlegung | 128 |
| 5.2 | Splitting-Methoden | 143 |
| 5.3 | Mehrgitterverfahren | 158 |
| | Zusammenfassung | 170 |
| | Aufgaben | 172 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 174 |
| 6 | Numerische Eigenwertberechnung – Einschließen und Approximieren | 175 |
| 6.1 | Eigenwerteinschließungen | 176 |
| 6.2 | Potenzmethode und Varianten | 183 |
| 6.3 | Jacobi-Verfahren | 190 |
| 6.4 | QR-Verfahren | 196 |
| | Zusammenfassung | 207 |
| | Aufgaben | 209 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 211 |
| 7 | Lineare Ausgleichsprobleme – im Mittel das Beste | 213 |
| 7.1 | Existenz und Eindeutigkeit | 214 |
| 7.2 | Lösung der Normalgleichung | 222 |
| 7.3 | Lösung des Minimierungsproblems | 225 |
| 7.4 | Störungstheorie | 234 |
| | Zusammenfassung | 238 |
| | Aufgaben | 240 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 242 |
| 8 | Nichtlineare Gleichungen und Systeme – numerisch gelöst | 243 |
| 8.1 | Bisektion, Regula Falsi, Sekantenmethode und Newton-Verfahren | 244 |
| 8.2 | Die Theorie der Iterationsverfahren | 254 |
| 8.3 | Das Newton-Verfahren und seine Varianten | 264 |
| 8.4 | Die Dynamik von Iterationsverfahren – Ordnung und Chaos | 274 |
| | Zusammenfassung | 281 |
| | Aufgaben | 284 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 286 |
| 9 | Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen – Schritt für Schritt zur Trajektorie | 289 |
| 9.1 | Grundlagen | 290 |
| 9.2 | Einschrittverfahren | 292 |
| 9.3 | Mehrschrittverfahren | 309 |
| 9.4 | Unbedingt positivitätserhaltende Verfahren | 324 |
| | Zusammenfassung | 332 |
| | Aufgaben | 334 |
| | Antworten zu den Selbstfragen | 336 |

| | |
|---------------------------------------|-----|
| Hinweise zu den Aufgaben | 337 |
| Lösungen zu den Aufgaben | 341 |
| Lösungswege | 345 |
| Bildnachweis | 377 |
| Stichwortverzeichnis | 379 |

Verzeichnis der Übersichten

| | |
|---|-----|
| Fehlertypen | 27 |
| Konsistenz, Stabilität und Konvergenz | 29 |
| Eine kleine Literaturübersicht | 30 |
| Approximation und Interpolation | 72 |
| Interpolatorische Quadraturformeln auf äquidistanten Gittern | 121 |
| Interpolatorische Quadraturformeln auf nichtäquidistanten Gittern | 122 |
| Zusammenhang iterativer und direkter Verfahren | 129 |
| Numerische Verfahren für lineare Gleichungssysteme | 169 |
| Eigenwerteinschließungen und numerische Verfahren für Eigenwertprobleme | 205 |
| Lösungstheorie und Numerik linearer Ausgleichsprobleme | 237 |
| Einfache Verfahren für skalare Gleichungen $f(x) = 0$ | 282 |
| Die Newton-Verfahren zur Lösung von Systemen $f(x) = 0$ | 283 |
| Mehrschrittverfahren aus der Klasse der Integrationsmethoden | 322 |