
Optimierung interaktiv

Daniel Scholz

Optimierung interaktiv

Grundlagen verstehen, Modelle
erforschen und Verfahren
anwenden

Daniel Scholz
Braunschweig, Deutschland
daniel.scholz@taramath.de

Webseiten zum Buch
www.taramath.de
www.taramath.com

ISBN 978-3-662-57952-7 ISBN 978-3-662-57953-4 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57953-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

In dem im Jahre 2016 erschienenen Springer-Lehrbuch *Numerik interaktiv: Grundlagen verstehen, Modelle erforschen und Verfahren anwenden mit taramath* haben wir bereits eine ganze Reihe von Problemen kennengelernt, welche sich als mathematisches Modell formulieren lassen, um die Probleme anschließend mit Verfahren der numerischen Mathematik zu lösen.

Als Erweiterung präsentieren wir im vorliegenden Werk Fragestellungen, welche sich als Optimierungsaufgabe modellieren lassen: Wir beschreiben und analysieren rechnerbasierte Lösungsverfahren aus unterschiedlichen Gebieten der angewandten Optimierung, welche zur Lösung geeigneter Fragestellungen bzw. Modelle herangezogen werden können.

Ein besonderer Fokus des Buches besteht darin, die unterschiedlichen Gebiete der Optimierung so einfach wie möglich und mit vielen erklärenden Abbildungen vorzustellen. Zahlreiche anwendungsorientierte Beispiele sollen nicht nur die Freude und das Interesse am Lösen von Optimierungsaufgaben wecken, sondern auch zeigen, dass alle Algorithmen äußerst relevant sind und in vielen Bereichen tagtäglich zum Einsatz kommen.

Neben grundlegenden Kenntnissen aus den üblichen Mathematikvorlesungen zur Differenzial- und Integralrechnung sowie der linearen Algebra können an einigen Stellen Themen hilfreich sein, welche auch im Lehrbuch *Numerik interaktiv* behandelt werden: Beispielsweise werden Kenntnisse über Lösungsverfahren linearer und nichtlinearer Gleichungssysteme das Verständnis einiger Algorithmen ebenso unterstützen wie die Berechnung einer QR-Zerlegung. Zwingend vorausgesetzt werden derartige Kenntnisse jedoch nicht bzw. nur in ergänzenden Herleitungen.

Darüber hinaus ist die didaktische Konzeption des vorliegenden Werkes identisch zum Lehrbuch *Numerik interaktiv*: Wir konzentrieren uns häufig nicht auf den allgemeinsten Fall, sondern zeigen, wie auch mit einfachen Spezialfällen bereits interessante Ergebnisse erzielt werden können. Genaue Herleitungen der Verfahren sind zwar sehr wichtig, werden in diesem Buch jedoch bewusst nur dann vorgestellt, wenn sie zum Gesamtverständnis der Lösungsalgorithmen beitragen.

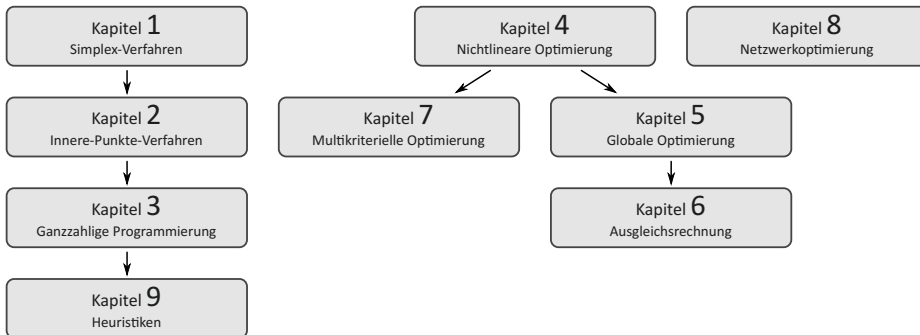


Abb. 1 Vorschlag einer Reihenfolge zur Durcharbeitung der einzelnen Kapitel dieses Buches. Dabei ist die Reihenfolge an einigen Stellen zum Verständnis zwingend erforderlich (beispielsweise bauen Innere-Punkte-Verfahren auf dem Simplex-Verfahren auf); an anderen Stellen dient die Reihenfolge lediglich als Vorschlag. Kapitel 8 kann weitestgehend unabhängig von allen anderen studiert werden



Herleitung *Beweise und Herleitungen, die einerseits für das Verständnis der Zusammenhänge wichtig oder hilfreich, andererseits aber zur reinen Anwendung der Verfahren nicht zwingend erforderlich sind, werden wie an dieser Stelle am Textrand mit einem Icon markiert. Es ist somit dem Leser überlassen, diese Abschnitte ggf. in einem ersten Lesedurchgang zu überspringen, sofern nur die Verfahren ohne weiteres Hintergrundwissen angewandt werden sollen.*







Die einzelnen Kapitel und Abschnitte mögen sicherlich unterschiedlich schwer erscheinen. Abb. 1 zeigt daher als Orientierung eine Reihenfolge zur Durcharbeitung der Themen. Als weitere Hilfestellung werden Aufgaben gestellt, welche zum Festigen und Hinterfragen der Inhalte sowie zum weiteren Nachdenken anregen sollen.

Darüber hinaus besteht ein besonderer Fokus darin, dass alle Inhalte nicht nur theoretisch erlernt und nachgeschlagen werden können, sondern es wird auch eine Möglichkeit geboten, praktische Erfahrungen zu sammeln. Genauer können viele der Algorithmen und Verfahren online unter

www.taramath.de

erprobt werden. Dort steht auch eine JavaScript-Bibliothek zum Download bereit, welche diverse numerische Verfahren beinhaltet und damit den Einstieg zur Lösung angewandter Optimierungsprobleme erleichtert. Weiterhin werden viele der Beispiele aus diesem Buch samt Quellcode zur Verfügung gestellt, sodass weitreichende Möglichkeiten zum experimentellen Lernen gegeben werden. Online verfügbare Beispiele werden wie in diesem Abschnitt mit einem QR-Code versehen, welcher in der E-Book-Version gleichzeitig als Link fungiert.



| Icon | Einsatzbereich des Containers | Besonderheit |
|---|-------------------------------------|--------------------|
|  | Definitionen und Notationen | grauer Hintergrund |
|  | Sätze und Lemmata | grauer Hintergrund |
|  | Aufgaben | grauer Hintergrund |
|  | Zusammenfassungen | grauer Hintergrund |
|  | Herleitungen, Beweise und Ausblicke | kursive Schrift |
|  | Beispiele | kursive Schrift |

Tab. 1 Übersicht der Icons, welche zur schnelleren Orientierung sowie zur Klassifizierung von Containern am Textrand verwendet werden

Zur übersichtlicheren Darstellung werden einige Absätze als Container oder Block zusammengefasst und durch einen grauen Hintergrund hervorgehoben. Insgesamt klassifizieren wir damit in sechs Arten von Containern und markieren diese durch ein Icon am Textrand. Eine Übersicht dieser Klassifizierung kann Tab. 1 entnommen werden.



Zusammenfassend hebt sich die vorliegende Ausarbeitung durch folgende Punkte von den üblichen Lehrbüchern der Optimierung entscheidend ab:

- (1) Alle Verfahren und Algorithmen werden nicht nur theoretisch hergeleitet, sondern anschauliche Beispiele sollen insbesondere den praktischen Nutzen der angewandten Optimierung verdeutlichen. Darüber hinaus können alle Verfahren zum schnelleren Verständnis sowie zum experimentellen Lernen eigenständig online erprobt und getestet werden.
- (2) Ganz bewusst werden keine schwierigen oder langwierigen Beweise vorgestellt. Weiterhin werden Aussagen und Sätze teilweise nicht in ihrer allgemeinsten Form präsentiert, sondern jeweils auf eine übersichtliche Art und Weise, in welcher sie möglichst leicht verständlich sind. Damit soll der Blick für die wesentlichen Ergebnisse und Verfahren geschärft werden.
- (3) In anderen Lehrbüchern fehlen bei der Beschreibung der Algorithmen häufig einige Teilschritte oder diese werden als bekannt vorausgesetzt. Wir leiten alle Verfahren Schritt für Schritt und so einfach wie möglich her. Dadurch kommt es an einigen Stellen teilweise gewollt zu Wiederholungen, ein unnötiges Blättern zwischen unterschiedlichen Kapiteln wird somit aber vermieden.

Viele der Inhalte dieses Buches wurden maßgeblich geprägt durch meine Ausbildung und Tätigkeiten bei Anita Schöbel, aber auch durch Emilio Carrizosa, Silvia Schwarze und einige andere – hierfür gilt mein ausdrücklicher Dank. Weiterhin bedanke ich mich bei allen Freunden und Bekannten, die durch gemeinsame Diskussionen oder das Korrekturlesen zur Verbesserung der Inhalte dieses Buches sowie der zugehörigen Homepage beigetragen haben. Zudem danke ich Annika Denkert vom Springer-Verlag für die freundliche und unkomplizierte Zusammenarbeit.

Schließlich freue ich mich über Anregungen und Feedback der Leserschaft, beispielsweise per Mail an daniel.scholz@taramath.de. Vielen Dank.

Daniel Scholz

Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

| | |
|----------------------------------|------|
| Vorwort | v |
| Symbole und Notationen | xiii |

1 Simplex-Verfahren

| | |
|---|----|
| 1.1 Grundlagen der linearen Optimierung | 1 |
| 1.2 Reduktion auf Standardform | 6 |
| 1.3 Basislösungen | 10 |
| 1.4 Primales Simplex-Verfahren. | 18 |
| 1.5 Dualität | 36 |
| 1.6 Duales Simplex-Verfahren | 39 |

2 Innere-Punkte-Verfahren

| | |
|--|----|
| 2.1 Grundlagen | 49 |
| 2.2 Kurz-Schritt-Verfahren | 52 |
| 2.3 Prädiktor-Korrektor-Verfahren. | 57 |
| 2.4 Charakteristisches lineares Gleichungssystem | 62 |
| 2.5 Anwendungsbeispiel Nullsummenspiele. | 63 |

3 Ganzzahlige Programmierung

| | |
|--------------------------|----|
| 3.1 Grundlagen | 71 |
|--------------------------|----|

| | | |
|-----|---------------------------------------|----|
| 3.2 | Totale Unimodularität | 76 |
| 3.3 | Branch-and-Bound-Verfahren | 80 |
| 3.4 | Schnittebenenverfahren | 86 |
| 3.5 | Problemspezifische Verfahren. | 94 |

4 Nichtlineare Optimierung

| | | |
|-----|----------------------------------|-----|
| 4.1 | Grundlagen | 99 |
| 4.2 | Gradientenverfahren | 103 |
| 4.3 | Konvexe Optimierung | 107 |
| 4.4 | Konkave Optimierung | 114 |
| 4.5 | Fritz-John-Bedingungen | 116 |
| 4.6 | Nelder-Mead-Verfahren | 120 |

5 Globale Optimierung

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.1 | Geometrisches Branch-and-Bound-Verfahren | 127 |
| 5.2 | Lipschitz-Schrankenvorschrift. | 130 |
| 5.3 | Intervall-Schrankenvorschrift | 132 |
| 5.4 | DC-Schrankenvorschrift. | 138 |
| 5.5 | Numerische Ergebnisse | 141 |
| 5.6 | Anwendungsbeispiel Standortplanung. | 145 |

6 Ausgleichsrechnung

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Einleitung | 149 |
| 6.2 | Lineare Regression | 151 |
| 6.3 | Polynomiale Regression. | 154 |
| 6.4 | Levenberg-Marquardt-Algorithmus. | 156 |
| 6.5 | Ausreißer | 161 |
| 6.6 | Geometrische Ausgleichsrechnung | 163 |
| 6.7 | Zusammenfassung. | 167 |

7 Multikriterielle Optimierung

| | | |
|-----|--|-----|
| 7.1 | Einleitung | 169 |
| 7.2 | Effiziente Lösungen | 171 |
| 7.3 | Gewichtete-Summen-Methode | 175 |
| 7.4 | Constraint-Methode | 179 |
| 7.5 | Benson-Methode | 180 |
| 7.6 | Kompromiss-Methode | 182 |
| 7.7 | Effiziente Lösungen im Entscheidungsraum | 184 |

8 Netzwerkoptimierung

| | | |
|-----|---------------------------|-----|
| 8.1 | Grundlagen | 189 |
| 8.2 | Spannende Bäume | 193 |
| 8.3 | Kürzeste Wege | 195 |
| 8.4 | Maximale Flüsse | 199 |
| 8.5 | Knotenfärbungen | 204 |

9 Heuristiken

| | | |
|-----|---|-----|
| 9.1 | Einleitung | 217 |
| 9.2 | Genetische Algorithmen | 219 |
| 9.3 | Anwendungsbeispiel Handlungsreisender | 226 |

| | |
|---------------------------|-----|
| Literatur | 231 |
| Sachverzeichnis | 235 |

Symbole und Notationen

Spezielle Exponenten

- x^\top transponierter Vektor oder transponierte Matrix
 A^{-1} Inverse einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Vektoren und Matrizen

- e_k k -ter Einheitsvektor im \mathbb{R}^n
 I_n Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n \times n}$

Klammerausdrücke

- (a, b) offenes Intervall
 $[a, b]$ geschlossenes Intervall
 $\lceil a \rceil$ kleinste ganze Zahl größer oder gleich $a \in \mathbb{R}$
 $\lfloor a \rfloor$ größte ganze Zahl kleiner oder gleich $a \in \mathbb{R}$
 $\langle a, b \rangle$ Skalarprodukt von a und b

Mengen

- $A \subset B$ die Menge A ist enthalten oder gleich der Menge B
 $A \cup B$ Vereinigung zweier Mengen A und B
 $A \cap B$ Durchschnitt zweier Mengen A und B
 \overline{A} abgeschlossene Hülle einer Menge A
 $\mathcal{C}([a, b])$ Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$

Ableitungen

| | |
|--------------------------------------|---|
| $f'(x)$ | erste Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $f''(x)$ | zweite Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $f^{(k)}(x)$ | k -te Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $\nabla f(x)$ | Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $\Delta f(x)$ | Laplace-Operator einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $Df(x)$ | Jacobi-Matrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ |
| $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ | partielle Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nach x_i |

Vektor- und Matrixnormen

| | |
|----------------|---|
| $\ x\ _1$ | Summennorm von $x \in \mathbb{R}^n$ |
| $\ x\ _2$ | euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ |
| $\ x\ _\infty$ | Maximumsnorm von $x \in \mathbb{R}^n$ |
| $\ A\ _1$ | Spaltensummennorm von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ |
| $\ A\ _2$ | Spektralnrm von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ |
| $\ A\ _\infty$ | Zeilensummennorm von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ |

Konvexität

| | |
|------------------|---|
| $\text{conv}(A)$ | konvexe Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ |
| $\partial f(a)$ | Subdifferenzial einer konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ |