
Differenzialrechnung leicht gemacht!

Jochen Balla

Differenzialrechnung leicht gemacht!

 Springer Spektrum

Jochen Balla
Hochschule Bochum
Bochum, Deutschland

ISBN 978-3-662-57298-6

ISBN 978-3-662-57299-3 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*In Gedanken an meine Lieben:
C. C. und T. M.*

Vorwort

Mathematik ist die Sprache von Wissenschaft und Technik. Jeder Studierende der Ingenieurwissenschaften, der Physik, der Wirtschaftswissenschaften usw. hat daher gleich zu Beginn seiner Ausbildung mit ihr zu tun. Die Differenzialrechnung, also alles rund um den Begriff der „Ableitung einer Funktion“, nimmt dabei einen besonderen Rang ein: Sie stellt normalerweise den Beginn der Mathematikausbildung dar, und in ihrem Bereich finden sich wohl die meisten Anwendungen der Mathematik überhaupt.

Auch wenn Mathematik klar und logisch ist, stellt sie doch für viele Studienanfänger eine ernst zu nehmende Hürde dar. Zum Teil einfach deshalb, weil sie am Beginn des Studiums liegt. Und natürlich finden sich Schwierigkeiten auch in der Sache selbst, die mathematischen Begriffe und Konzepte erscheinen zunächst komplex und verwirrend.

Aber Mathematik lässt sich lernen, wie alle anderen Dinge auch. Es ist eben nicht so, dass der eine sie einfach versteht und der andere einfach nicht.

Zielsetzung dieses Buchs Dieses Buch bietet dir eine kurze und – wie ich hoffe – leicht lesbare Darstellung der Kerninhalte der Differenzialrechnung. Es ist vorwiegend gedacht für Studierende der Ingenieurwissenschaften, der Physik, und auch der Wirtschaftswissenschaften oder anderer Fachgebiete, die Differenzialrechnung benötigen. Auch Studierenden der Mathematik sollte es als Einführung gute Dienste leisten. Es lässt sich inhaltlich wie folgt umreißen:

- **Kerninhalte der Differenzialrechnung:** Grundlagen, Folgen, Reihen, Funktionen, Grenzwerte, Ableitungen usw.
- Ausführliche Behandlung der **Exponentialfunktion** und der **Winkelfunktionen** und ihrer Umkehrfunktionen, d. h. des **Logarithmus** und der **Arcusfunktionen**
- Entwicklung der **Taylor-Formel** bis hin zu Taylor-Reihen
- Einführung in **komplexe Zahlen** und Formulierung der **Euler-Formel**, separat lesbar und ausreichend, um mit der Verwendung komplexer Zahlen in praktischen Anwendungen zurecht zu kommen
- Viele **Beispiele** und **Anwendungen**

- Darstellung mit **vollständiger mathematischer Notation**, transparent und klar (und ein solider Ausgangspunkt für weitergehendes Studium)
- **Beweise** ausführlich und mit vielen Erläuterungen
- **Übungsaufgaben und -lösungen.**

Die Beweise sind bewusst ausführlich geschrieben, damit es dir leicht fällt, sie nachzuvollziehen. Aber sie stehen nicht im Zentrum der Darstellung. Es ist ein normales Vorgehen, sie beim ersten Lesen nur zu überfliegen; auch so gewinnst du zumindest ein Gefühl dafür, wie viel hinter den verschiedenen Aussagen steckt.

Hilfestellungen Auch wenn es nicht immer zugegeben wird: Das Studium eines Mathematikbuchs fällt nicht leicht. Anfangs tut man sich schwer, „einen Fuß in die Tür“ zu kriegen und sich die Inhalte so zu erarbeiten, dass die Zusammenhänge klar sind und angewendet werden können. Um diesen ersten Einstieg zu erleichtern, gibt dir das Buch eine Reihe zusätzlicher Hilfestellungen:

- Zu Beginn eines jeden Kapitels wird noch einmal erläutert, in welchen Zusammenhängen die Inhalte bedeutsam sind.
- Der Text wird durch zahlreiche **Lesehilfen** ergänzt, die neue Begriffe, neue Schreibweisen, Hintergründe erläutern, und dir über problematische Stellen hinweghelfen.
- Der Text enthält **Zwischenfragen** (und etwas verzögert auch die **Antworten**), die dich zum Hinterfragen des Gelesenen anregen und somit das Verständnis prüfen und vertiefen.
- Am Ende eines jeden Kapitels erlaubt „**Das Wichtigste in Kürze**“ eine Rekapitulation der Inhalte, ergänzt durch eine kleine **Formelsammlung**. Verstehst du genau, was hier steht, und kannst du jede Formel erklären, so wirst du das gesamte Kapitel gut verinnerlicht haben.

Diese Hilfestellungen sind vorwiegend für das **erste Lesen** gedacht. Beim zweiten Lesen bzw. dem vertiefenden Studium wirst du sie beiseitelassen können, was durch ihre deutliche Hervorhebung ohne Weiteres möglich ist.

Auch die Übungsaufgaben, mit denen jedes Kapitel versehen ist, zielen vorwiegend auf das Verständnis der Inhalte ab (und weniger auf das Training aufwändiger Rechentechniken). Die zugehörigen Lösungen ermöglichen dir eine unmittelbare Selbstkontrolle.

Du wirst sehen, so schwierig ist das alles gar nicht :-)

Weiterführende Literatur Es gibt viele gute Bücher, die ein weitergehendes Studium der Differenzialrechnung erlauben. Welches du bei Bedarf am besten wählst, hängt letztendlich von deinen persönlichen Vorlieben ab.

Ein Standardwerk ist die „Analysis 1“ von Otto Forster. Es geht in Umfang und theoretischem Anspruch über die hier vorliegende Darstellung hinaus und eignet sich sehr gut für ein vertiefendes Studium der allgemeinen Analysis. Es liegt aktuell in der 12. Auflage vor.

Für ein Studium der komplexen Analysis kannst du beispielsweise die „Funktionentheorie“ von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb heranziehen, aktuell in der 9. Auflage.

Ich wünsche dir viel Erfolg im Studium und würde mich freuen, wenn dieses Buch einen Beitrag dazu leisten kann!

März 2018

Jochen Balla

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Reelle Zahlen	2
1.1.1	Mengen und Mengenbezeichnungen	3
1.1.2	Rationale Zahlen	5
1.1.3	Betrag einer reellen Zahl	7
1.2	Vollständige Induktion	8
1.2.1	Summe und Produkt	10
1.2.2	Potenzen	11
1.2.3	Geometrische Reihe	12
1.3	Archimedisches Axiom	13
	Übungsaufgaben	15
2	Folgen und Grenzwerte	17
2.1	Folgen	17
2.1.1	Konvergente Folgen	18
2.1.2	Beschränkte Folgen	21
2.1.3	Rechenregeln	23
2.1.4	Bestimmte Divergenz gegen Unendlich	24
2.1.5	Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen	26
2.2	Unendliche Reihen	28
2.2.1	Unendliche geometrische Reihe	29
2.2.2	Konvergenz unendlicher Reihen	30
2.2.3	Absolute Konvergenz	33
2.2.4	Quotientenkriterium	34
	Übungsaufgaben	37
3	Funktionen und Grenzwerte	39
3.1	Funktion und Funktionsgraph	39
3.2	Exponentialfunktion	42
3.2.1	Zum Beweis der Funktionalgleichung	44
3.2.2	Eigenschaften der Exponentialfunktion	46

3.3	Zusammengesetzte Funktionen	47
3.4	Grenzwerte bei Funktionen	48
3.4.1	Rechts- und linksseitiger Grenzwert	50
3.4.2	Beispiel: Exponentialfunktion	52
3.5	Stetigkeit	53
3.5.1	Beispiel: Stetigkeit der Exponentialfunktion	55
3.5.2	Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen	55
3.5.3	Zwischenwertsatz	57
	Übungsaufgaben	60
4	Umkehrfunktionen	61
4.1	Definition der Umkehrfunktion	62
4.1.1	Monotonie	63
4.1.2	Umkehrfunktion und Graph	64
4.2	Wurzelfunktionen	65
4.3	Logarithmus und allgemeine Exponentialfunktion	68
4.3.1	Natürlicher Logarithmus	68
4.3.2	Beispiel: Zerfallsgesetz und Halbwertszeit	70
4.3.3	Allgemeine Exponentialfunktion	71
4.3.4	Allgemeiner Logarithmus	75
4.3.5	Beispiel: Logarithmische Skalen	78
4.3.6	Einige Grenzwerte	78
	Übungsaufgaben	82
5	Winkelfunktionen	85
5.1	Einheitskreis und Winkelmaße	86
5.2	Sinus und Cosinus	88
5.2.1	Einige Sinus- und Cosinuswerte	90
5.2.2	Grundlegende Eigenschaften	91
5.2.3	Numerische Berechnung	93
5.2.4	Übertragung auf rechtwinklige Dreiecke	94
5.2.5	Sinussatz und Cosinussatz	95
5.2.6	Additionstheoreme	96
5.2.7	Beispiel: Schwingungen und Wellen	98
5.3	Tangens und Cotangens	100
5.4	Umkehrfunktionen	102
	Übungsaufgaben	106
6	Differenziation	109
6.1	Definition der Ableitung	110
6.2	Ableitung einiger Grundfunktionen	112
6.2.1	Numerische Differenziation	116
6.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	116
6.2.3	Alternative Darstellung der Euler-Zahl	119

6.3	Lineare Approximierbarkeit	119
6.3.1	Beispiel: Lineare Näherung für Sinus und Cosinus	121
6.3.2	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	122
6.4	Ableitung zusammengesetzter Funktionen	122
6.4.1	Linearität	123
6.4.2	Produkt- und Quotientenregel	123
6.4.3	Kettenregel	126
6.5	Höhere Ableitungen	130
6.6	Lokale Extrema	133
6.7	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	134
6.8	Monotonie und Ableitung	136
6.9	Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema	137
6.10	Globale Extrema	140
6.11	Satz von l'Hospital	143
	Übungsaufgaben	147
7	Taylor-Formel	151
7.1	Idee des Taylor-Polynoms	152
7.2	Formulierung der Taylor-Formel	153
7.3	Größe des Restglieds	156
7.4	Näherungsformeln	158
7.4.1	Beispiel: $E = mc^2$	161
7.5	Taylor-Reihen	163
7.5.1	Sinus- und Cosinusreihe	164
7.5.2	Exponentialreihe	167
7.5.3	Logarithmusreihe	168
	Übungsaufgaben	170
8	Komplexe Zahlen und Euler-Formel	173
8.1	Körper der komplexen Zahlen	174
8.1.1	Definition	174
8.1.2	Zusammenhang mit reellen Zahlen	175
8.2	Eigenschaften komplexer Zahlen	177
8.2.1	Komplexe Konjugation	178
8.2.2	Betrag	178
8.3	Exponentialfunktion in \mathbb{C}	181
8.3.1	Konvergenz in \mathbb{C}	181
8.3.2	Exponentialreihe	184
8.3.3	Eigenschaften der Exponentialfunktion	184
8.4	Euler-Formel	187
8.4.1	Beispiel: Beweis der Additionstheoreme	190

8.5	Polarkoordinaten	191
8.5.1	Multiplikation komplexer Zahlen	193
8.5.2	n -te Einheitswurzeln	193
8.6	Beispiel: Lösung der Schwingungsgleichung	195
	Übungsaufgaben	199
	Anhang – Lösungen der Übungsaufgaben	201
	Sachverzeichnis	219